Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

Feuille TD N°4 - semaine du 17 mars 2008

Exercice 1. (calculer et majorer une intégrale double sur un rectangle)
On considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ et la fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x - y + 1}$.

a) Expliquer pourquoi f est bien définie et continue sur D.

b) Montrer que pour tout $(x, y) \in D$ on a $f(x, y) < \frac{7}{4}$.

c) Calculer $I = \iint_D f(x, y)\mathrm{dxdy}$.

d) Expliquer pourquoi on a $I < \frac{7}{2}$.

Exercice 2. (calculer une intégrale double sur un triangle)
Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^2$, bordé par le triangle dont les sommets sont les points A, B, et C de coordonnées respectives $(0, -1)$, $(3, 1)$ et $(0, 1)$.

a) La droite joignant les points A et B admet une équation ayant l'une des formes suivantes: $\boldsymbol{x = \alpha y + \beta}$ ou $\boldsymbol{y = a x + b}$ (α, β, a et b sont des réels).
Donner explicitement une de ces équations (en trouvant α et β ou a et b).

b) Calculer l'intégrale $I = \iint_\Delta x y^2 \mathrm{dxdy}$.

Exercice 3. (dessiner un domaine et calculer une intégrale double dessus)
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine D défini par
$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leqslant y \leqslant 2, \frac{1}{2}y - 1 \leqslant x \leqslant y^2\right\}$.

a) Dessiner ce domaine et calculer son aire.

b) Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$. Calculer l'intégrale $I = \iint_D f(x, y)\mathrm{dxdy}$.

Exercice 4. (dessiner un domaine et choisir judicieusement un ordre d'intégration)
Soit D le domaine du plan $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) vérifiant le système:
$\begin{cases} \boldsymbol{|y - 2| \leqslant 1} \\ \boldsymbol{(x - 1)(x - y) \leqslant 0} \end{cases}$. Dessiner D et calculer l'intégrale $I = \iint_D e^{(3-x)^2}\mathrm{dxdy}$.

Exercice 5. (un changement de variables en coordonnées polaires)
On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé, les deux cercles concentriques Γ_1 et Γ_2 de centre $\omega = (1, 1)$ et de rayons respectifs $R_1 = 2$ et $R_2 = 3$.
Si $\mathcal{C}$ est la couronne fermée comprise entre ces deux cercles, on note K la demi-couronne fermée située dans le demi-plan fermé défini par $x \geqslant 1$.
Dessiner K et calculer $I = \iint_K x y \,\mathrm{dxdy}$. (On pourra faire un changement de variables en posant: $x = 1 + r\cos(\theta)$, $y = 1 + r\sin(\theta)$ avec $2 \leqslant r \leqslant 3$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.)

Exercice 6. (dessiner un domaine et calculer son aire)
Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, le domaine D des couples (x, y) vérifiant
$\begin{cases} \boldsymbol{|y| \leqslant 2} \\ \boldsymbol{|x| \leqslant \frac{1}{4}y^2 + 1} \\ \boldsymbol{y \leqslant x^2 + 1} \end{cases}$. Calculer l'aire de D.
