Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

CORRIGÉ DE LA FEUILLE TD N°4 - semaine du 17/03/2008
(les énoncés sont en bleu)

Exercice 1. (calculer et majorer une intégrale double sur un rectangle)
On considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$ et la fonction $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}$.

a) Expliquer pourquoi f est bien définie et continue sur D.

b) Montrer que pour tout $(x,y)\in D$ on a $f(x,y)<\frac{7}{4}$.

c) Calculer $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

d) Expliquer pourquoi on a $I<\frac{7}{2}$.

Solution:

a) On a $1\leqslant x+1\leqslant 2$ et $-1\leqslant -y\leqslant 1$.
En additionnant ces deux inégalités on trouve $0\leqslant x-y+1\leqslant 3$, ce qui entraîne que $\sqrt{x-y+1}$ est bien définie sur le rectangle en question.
f est la composée $f_2\circ f_1$ des fonctions continues $f_1\colon D\longrightarrow\mathbb{R}_+$ et $f_2\colon\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ définies par: $f_1(x,y)=x-y+1,\ f_2(t)=\sqrt{t}$.
f est donc continue en tant que composée de fonctions continues.

b) De l'inégalité $0\leqslant x-y+1\leqslant 3$, il vient que pour tout $(x,y)\in D$, on a $0\leqslant f(x,y)\leqslant\sqrt{3}$ (car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$). Il nous suffit maintenant de vérifier que $\sqrt{3}<\frac{7}{4}$. Ce qui revient à prouver (après élévation au carré), que $3<\frac{49}{16}$. Cette dernière inégalité est évidente car $\frac{49}{16}=3+\frac{1}{16}$.

c) Pour calculer l'intégrale $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$, on utilise le théorème de Fubini:
$$I=\int_{-1}^{1}\left[\int_0^1\sqrt{x-y+1}\,\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}.\ \text{On trouve } I=\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-4\sqrt{2}-1).$$

d) Sur le rectangle D on a $0\leqslant f(x,y)<\dfrac{7}{4}$ (d'après la question b)).
D'où $0\leqslant I<\displaystyle\iint_D\frac{7}{4}\mathrm{dxdy}=\frac{7}{4}\times 2=\frac{7}{2}$.

Exercice 2. (calculer une intégrale double sur un triangle)
Soit Δ le domaine de $\mathbb{R}^2$, bordé par le triangle dont les sommets sont les points A, B, et C de coordonnées respectives $(0,-1)$, $(3,1)$ et $(0,1)$.

a) La droite joignant les points A et B admet une équation ayant l'une des formes suivantes: $\boldsymbol{x=\alpha y+\beta}$ ou $\boldsymbol{y=ax+b}$ (α, β, a et b sont des réels).
Donner explicitement une de ces équations (en trouvant α et β ou a et b).

b) Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\iint_\Delta xy^2\mathrm{dxdy}$.

Solution:

a) Les coordonnées du point A vérifient l'équation $x=\alpha y+\beta$ si et seulement si $0=-\alpha+\beta$.
De même les coordonnées du point b vérifient l'équation $x=\alpha y+\beta$ si et seulement si $3=\alpha+\beta$.
Pour trouver α et β il nous suffit de résoudre le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases}-\alpha+\beta=0\\ \alpha+\beta=3\end{cases}$.
On trouve facilement que ce système admet pour unique solution $(\alpha,\beta)=(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.
La droite joignant les points A et B admet donc pour équation $x=\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}$.
Cette droite admet aussi pour équation $y=\frac{2}{3}x-1$.

b) Nous avons $\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/-1\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}\right\}$.
Pour $y\in[-1,1]$ fixé, posons $I(y)=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}} xy^2\mathrm{dx}$.
Par le théorème de Fubini nous obtenons $I=\displaystyle\iint_\Delta xy^2\mathrm{dxdy}=\int_{-1}^1 I(y)\mathrm{dy}$.
On a $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}} xy^2\mathrm{dx}=y^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}}=\frac{9}{8}y^2(y+1)^2$. On en déduit $I=\displaystyle\frac{9}{8}\int_{-1}^1(y^4+2y^3+y^2)\mathrm{dy}$.
Comme $\displaystyle\int_{-1}^1 y^3\mathrm{dy}=0$ (pour raison de parité), on a $I=2\times\displaystyle\frac{9}{8}\int_0^1(y^4+y^2)\mathrm{dy}$.
Il ne reste plus qu'à calculer $\displaystyle\int_0^1(y^4+y^2)\mathrm{dy}$ pour conclure.
$\displaystyle\int_0^1(y^4+y^2)\mathrm{dy}=\left[\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{3}y^2\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$.
Conclusion: $I=\frac{6}{5}$.

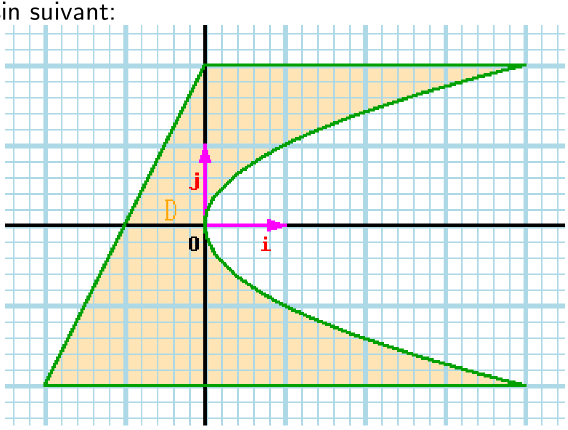
Exercice 3. (dessiner un domaine et calculer une intégrale double dessus)
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine D défini par
$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/ -2 \leqslant y \leqslant 2,\, \frac{1}{2}y - 1 \leqslant x \leqslant y^2\right\}$.

a) Dessiner ce domaine et calculer son aire.

b) Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y$. Calculer l'intégrale $I = \int\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Solution:

a) D est le domaine délimité par les deux droites horizontales d'équation $y = -2$, $y = 2$, la droite oblique d'équation $x = \frac{1}{2}y - 1$ et la parabole d'équation $x = y^2$.
On obtient le dessin suivant:



Calculer l'aire du domaine D revient par exemple à calculer $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (intégrale double sur D de la fonction constante $(x, y) \mapsto 1$). On obtient, par la définition même de D,
$\mathrm{aire}(D) = \int_{-2}^{2} (y^2 - (\frac{1}{2}y - 1))\mathrm{d}y = 2\int_0^2 (y^2 + 1)\mathrm{d}y$ (pour des raisons de parité).
D'où $\mathrm{aire}(D) = 2\left[\frac{1}{3}y^3 + y\right]_0^2 = \frac{28}{3}$ unités d'aire.

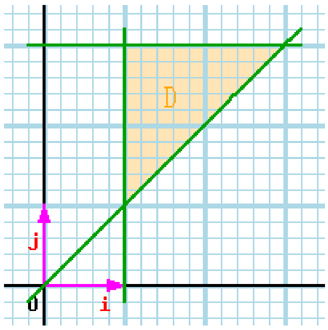
b) La fonction f est polynomiale, donc continue sur D qui est fermé borné.
En utilisant le théorème de Fubini on a $I = \int_{-2}^{2}\left[\int_{\frac{1}{2}y-1}^{y^2} (x + y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.
Posant $I(y) = \int_{\frac{1}{2}y-1}^{y^2} (x + y)\mathrm{d}x$,
on trouve $I(y) = \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{x=\frac{1}{2}y-1}^{x=y^2} = \frac{1}{2}y^4 + y^3 - \frac{5}{8}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$.
On en déduit $I = \int_{-2}^{2} I(y)\mathrm{d}y = 2\int_0^2 (\frac{1}{2}y^4 - \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2})\mathrm{d}y$ (pour des raisons de parité des termes de $I(y)$). Reste donc à calculer $\int_0^2 (\frac{1}{2}y^4 - \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2})\mathrm{d}y$.
On obtient $\int_0^2 (\frac{1}{2}y^4 - \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2})\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{10}y^5 - \frac{5}{24}y^3 - \frac{1}{2}y\right]_0^2 = \frac{32}{10} - \frac{40}{24} - 1 = \frac{8}{15}$.
Conclusion: $I = \frac{16}{15}$.

Exercice 4. (dessiner un domaine et choisir judicieusement un ordre d'intégration)
Soit D le domaine du plan $\mathbb{R}^2$ formé des couples (x, y) vérifiant le système:
$\begin{cases} \boldsymbol{|y-2| \leqslant 1} \\ \boldsymbol{(x-1)(x-y) \leqslant 0} \end{cases}$. Dessiner D et calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D e^{(3-x)^2} \mathrm{dxdy}$.

Solution: L 'inégalité $\boldsymbol{|y-2| \leqslant 1}$ équivaut à $-1 \leqslant y-2 \leqslant 1$, c'est-à-dire $1 \leqslant y \leqslant 3$.

De même l'inégalité $\boldsymbol{(x-1)(x-y) \leqslant 0}$ équivaut à $\begin{cases} (x-1 \geqslant 0) \text{ et } (x-y \leqslant 0) \\ \text{ou} \\ (x-1 \leqslant 0) \text{ et } (x-y \geqslant 0) \end{cases}$.

En traçant les quatre droites d'équations respectives $y=1$, $y=3$, $x=1$ et $x=y$, les différentes inégalités nous permettent de voir que D est le triangle fermé dont les sommets ont pour coordonnées $(1,1)$, $(3,3)$ et $(1,3)$, illustré ci-dessous:



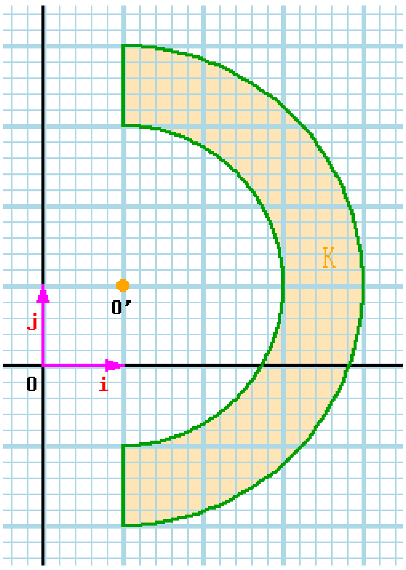
On peut ainsi écrire: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leqslant x \leqslant 3, x \leqslant y \leqslant 3\}$.

En utilisant le théorème de Fubini on obtient

$$I = \int_1^3 \left[\int_x^3 e^{(3-x)^2} \mathrm{dy} \right] \mathrm{dx} = \int_1^3 e^{(3-x)^2} (3-x) \mathrm{dx} = -\frac{1}{2} \left[e^{(3-x)^2} \right]_1^3 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

Exercice 5. (un changement de variables en coordonnées polaires)
On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé, les deux cercles concentriques Γ_1 et Γ_2 de centre $\omega=(1,1)$ et de rayons respectifs $R_1=2$ et $R_2=3$.
Si $\mathcal{C}$ est la couronne fermée comprise entre ces deux cercles, on note K la demi-couronne fermée située dans le demi-plan fermé défini par $x \geqslant 1$.
Dessiner K et calculer $I=\displaystyle\iint_K x\,y\,\mathrm{dxdy}$. (On pourra faire un changement de variables en posant: $x=1+r\cos(\theta)$, $y=1+r\sin(\theta)$ avec $2\leqslant r\leqslant 3$ et $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.)

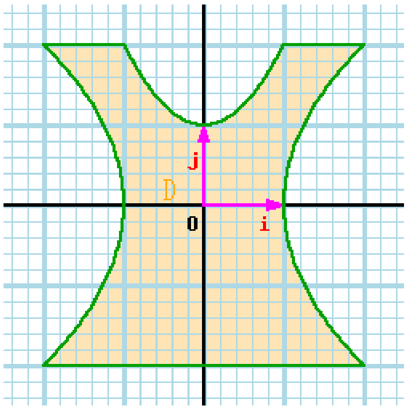
Solution: Pour dessiner le domaine K, il suffit de tracer les deux cercles concentriques Γ_1, Γ_2 et la droite d'équation $x=1$.



Si M est un point de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant au domaine K, la distance r, de M au point ω de coordonnées $(1,1)$ est comprise entre 2 et 3.
Si nous prenons ω comme origine d'un nouveau repère $\mathcal{R}'=(O',\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, le vecteur $\overrightarrow{\omega M}=\overrightarrow{O'M}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{\omega M}=r(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}\ )$, avec $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Ceci justifie le changement de variables $x=1+r\cos(\theta)$, $y=1+r\sin(\theta)$ avec $2\leqslant r\leqslant 3$ et $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.
L'application $\varphi\colon[2,3]\times\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\longrightarrow K$ définie par $\varphi(r,\theta)=(1+r\cos(\theta),1+r\sin(\theta))$ est bijective de classe $\mathcal{C}^1$ et de jacobien r. En utilisant la formule de changement de variables dans les intégrales doubles puis le théorème de Fubini, on obtient
$$I=\int_2^3\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+r\cos(\theta))(1+r\sin(\theta))\times r\,d\theta\right]\mathrm{dr}.$$
Tenant compte du fait que la fonction cosinus est paire et la fonction sinus impaire, on a
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+r\cos(\theta))(1+r\sin(\theta))\times r\,d\theta=2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+r\cos(\theta))d\theta=2r[\theta+r\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}}=2r(\frac{\pi}{2}+r).$$
Nous avons donc $I=\displaystyle\int_2^3 2r(\frac{\pi}{2}+r)\mathrm{dr}=\left[\frac{2}{3}r^3+\frac{\pi}{2}r^2\right]_2^3=\frac{38}{3}+\frac{5\pi}{2}.$

Exercice 6. (dessiner un domaine et calculer son aire)
Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, le domaine D des couples (x, y) vérifiant $\begin{cases} |\boldsymbol{y}| \leqslant \boldsymbol{2} \\ |\boldsymbol{x}| \leqslant \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1} \end{cases}$. Calculer l'aire de D.

Solution: Pour dessiner le domaine D, on considère la zone Z délimitée par les deux droites d'équations $y = -2$, $y = 2$ et les deux paraboles d'équations $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$, $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$. D est alors la partie de Z située en dessous de la parabole d'équation $y = x^2 + 1$



On peut remarquer que si le couple (x, y) vérifie le système d'inéquations définissant le domaine D, il en est de même pour le couple $(-x, y)$. Autrement dit, l'axe verticale (Oy) est un axe de symétrie orthogonale pour D.
Ainsi, si on pose $D' = \{(x, y) \in D / x \geqslant 0\}$, on a $\mathrm{aire}(D) = 2 \times \mathrm{aire}(D')$.
Pour calculer l'aire de D', nous pouvons décomposer D' en une réunion de deux sous-domaines D_1 et D_2, s'intersectant en un segment de droite:
$D_1 = \{(x, y) \in D / 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \in D / 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.
On aura alors $\mathrm{aire}(D') = \mathrm{aire}(D_1) + \mathrm{aire}(D_2)$.
On trouve $\mathrm{aire}(D_1) = \displaystyle\int_0^1 ((x^2 + 1) - (-2))\mathrm{dx}$ et $\mathrm{aire}(D_2) = \displaystyle\int_{-2}^2 ((\frac{1}{4}y^2 + 1) - (1))\mathrm{dy}$.
Ce qui donne $\mathrm{aire}(D_1) = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^1 = \frac{10}{3}$, $\mathrm{aire}(D_2) = 2\left[\frac{1}{12}y^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$.
Conclusion: $\mathrm{aire}(D) = \frac{28}{3}$ unités d'aire.