Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

Corrigé succinct de la Feuille TD N°3 - semaine du 03/03/2008
(les énoncés sont en bleu)

Exercice 1. (Etudier des intégrales impropres)

Calculer si possible les intégrales impropres suivantes:

$$i_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{dx}, \quad i_2 = \int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{11-x}}\mathrm{dx}, \quad i_3 = \int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{dx}, \quad i_4 = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}.$$

Réponse:

- Etude de la convergence de i_1: pour un nombre réel $\beta > 0$, on pose $i_1(\beta) = \int_0^\beta e^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{dx}$. La fonction f_1: $x \mapsto e^{-\frac{1}{3}x}$ admet pour primitive $F_1(x) = -3e^{-\frac{1}{3}x}$.
  On en déduit que $i_1(\beta) = F_1(\beta) - F_1(0)$, d'où $i_1(\beta) = 3 - 3e^{-\frac{1}{3}\beta}$. On a $\lim_{\beta \longrightarrow +\infty} i_1(\beta) = 3$.
  Conclusion: l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{dx}$ converge vers 3.
- Etude de la convergence de i_2: soit f_2 la fonction définie par $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{11-x}}$. f_2 n'est pas définie en 11 et on a $\lim_{x \longrightarrow 11^-} f_2(x) = +\infty$.
  Soit $\beta \in \mathbb{R}$, $2 < \beta < 11$, posons $i_2(\beta) = \int_2^\beta \frac{1}{\sqrt{11-x}}\mathrm{dx}$.
  $f_2(x)$ admet pour primitive $F_2(x) = -2\sqrt{11-x}$. On en déduit facilement $i_2(\beta) = 6 - 2\sqrt{11-\beta}$.
  Comme $\lim_{\beta \longrightarrow 11^-} i_2(\beta) = 6$, l'intégrale impropre $\int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{11-x}}\mathrm{dx}$ converge vers 6.
- Pour étudier la convergence de i_3, on pose $i_3(\alpha) = \int_\alpha^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{dx}$, $(3 < \alpha < 7)$.
  On a $i_3(\alpha) = \left[2\sqrt{x-3}\right]_\alpha^7 = 4 - 2\sqrt{\alpha-3}$. Lorsque α tend vers 3, on voit facilement que $i_3(\alpha)$ tend vers 4. Conclusion: l'intégrale impropre $\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{dx}$ converge vers 4.
- Pour $\beta \in \left[0, 1\right[$, posons $i_4(\beta) = \int_0^\beta \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$. On a $i_4(\beta) = [-\ln(|1-x|)]_0^\beta = -\ln(1-\beta)$.
  Lorsque β tend vers 1, $-\ln(1-\beta)$ tend vers $+\infty$.
  Conclusion: l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$ diverge.

Exercice 2. (Calculer une intégrale définie puis une intégrale impropre)

Soit α un nombre réel vérifiant $0<\alpha<1$. On pose $I_\alpha=\displaystyle\int_\alpha^3 \ln(x)\mathrm{d}x$.

a) Calculer l'intégrale I_α.
Réponse: une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x)-x$ (voir l'exercice 2 de la Feuille TD n°2). Ainsi $I_\alpha=[x\ln(x)-x]_\alpha^3=3\ln(3)-3-\alpha(\ln(\alpha)+\alpha$.

b) Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^3 \ln(x)\mathrm{d}x$.
(on pourra utiliser l'égalité $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0^+} t\ln(t)=0$)
Réponse: On a vu dans la question précédente que $I_\alpha=3\ln(3)-3-\alpha(\ln(\alpha)+\alpha$. Comme $\displaystyle\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+}-\alpha\ln(\alpha)+\alpha=0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} I_\alpha=3(\ln(3)-1)$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^3 \ln(x)\mathrm{d}x$ converge vers $3(\ln(3)-1)$.

c) On pose $f(x)=|\ln(x)|$.
Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.
Réponse: si α est un réel vérifiant $0<\alpha<1$, posons $J_\alpha=\displaystyle\int_\alpha^3 f(x)\mathrm{d}x$.
Comme on a $\ln(x)\leqslant 0$ pour tout x vérifiant $0<x\leqslant 1$, et $\ln(x)\geqslant 0$ pour tout $x\geqslant 1$, $J_\alpha=\displaystyle\int_\alpha^1 -\ln(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 \ln(x)\mathrm{d}x$. Il s'en suit que
$J_\alpha=[-x\ln(x)+x]_\alpha^1+[x\ln(x)-x]_1^3=(1+\alpha\ln(\alpha)-\alpha)+((3\ln(3)-3)+1)$.
$J_\alpha=3\ln(3)-1+\alpha\ln(\alpha)-\alpha$.
$\displaystyle\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} J_\alpha=3\ln(3)-1$, donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ converge vers $3\ln(3)-1$.

Exercice 3. (Calculer une intégrale définie puis une intégrale impropre)

Pour $\beta\geqslant 3$ on pose $I_\beta=\displaystyle\int_e^\beta \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$ et $J_\beta=\displaystyle\int_e^\beta \frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$.

1. En faisant le changement de variable $x=e^t$, calculer I_β et J_β.
Réponse: en posant $x=e^t$ (ce qui équivaut à $t=\ln(x)$), on a $\mathrm{d}x=e^t\mathrm{d}t$;
lorsque $x=e$ on a $t=1$ et lorsque $x=\beta$, on a $t=\ln(\beta)$.
L'application $\varphi\colon[1,\ln(\beta)]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $\varphi([1,\ln(\beta)])=[e,\beta]$.
Ainsi I_β s'écrit $I_\beta=\displaystyle\int_1^{\ln(\beta)} \frac{1}{e^t\times t}\times e^t\mathrm{d}t=\int_1^{\ln(\beta)}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=[\ln(t)]_1^{\ln(\beta)}=\ln(\ln(\beta))$.
Le même changement de variable nous permet d'avoir $J_\beta=\displaystyle\int_1^{\ln(\beta)}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\ln(\beta)}=1-\frac{1}{\ln(\beta)}$.

2. Etudier la convergence des intégrales impropres $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$.
Réponse: par définition, $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\beta\longrightarrow+\infty} I_\beta$.
Comme $\displaystyle\lim_{\beta\longrightarrow+\infty}\ln(\ln(\beta))=+\infty$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$ diverge.
L'intégrale impropre $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln(x))^2}\mathrm{d}x$ converge vers 1 car $\displaystyle\lim_{\beta\longrightarrow+\infty} J_\beta=1$.

Exercice 4. (Découper une intégrale impropre en deux)

Soient α et β deux nombres réels vérifiant $0<\alpha<1<\beta<2$.

On pose $I_\alpha=\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$ et $I_\beta=\displaystyle\int_1^\beta \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$.

Calculer les intégrales I_α et I_β en faisant le changement de variable $x=\frac{1}{2}t^2$, $(0\leqslant t\leqslant 2)$.

En déduire la nature de l'intégrale impropre $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$.

Réponse: En posant $x=\frac{1}{2}t^2$ (ou encore $\sqrt{2x}=t$, $t\geqslant 0$), on a $\mathrm{dx}=t\,\mathrm{dt}$.

Lorsque $x=\alpha$, on a $t=\sqrt{2\alpha}$, lorsque $x=1$, $t=\sqrt{2}$ et enfin, lorsque $x=\beta$, $t=\sqrt{2\beta}$.

Les applications $\varphi_1\colon\left[\sqrt{2\alpha},\sqrt{2}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\varphi_2\colon\left[\sqrt{2},\sqrt{2\beta}\right]\longrightarrow\mathbb{R}$ définies respectivement par $\varphi_1(t)=\frac{1}{2}t^2$, $\varphi_2(t)=\frac{1}{2}t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $\varphi_1(\left[\sqrt{2\alpha},\sqrt{2}\right])=[\alpha,1]$, $\varphi_2(\left[\sqrt{2},\sqrt{2\beta}\right])=[1,\beta]$.

On obtient par ce changement de variable, $I_\alpha=\displaystyle\int_{\sqrt{2\alpha}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{-\frac{1}{2}t^2+t}\times t\,\mathrm{dt}=\int_{\sqrt{2\alpha}}^{\sqrt{2}}\frac{2}{2-t}\mathrm{dt}$.

De même, on a $I_\beta=\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2\beta}}\frac{2}{2-t}\mathrm{dt}$.

Ainsi $I_\alpha=[-2\ln(2-t)]_{\sqrt{2\alpha}}^{\sqrt{2}}=-2\ln(2-\sqrt{2})+2\ln(2-\sqrt{2\alpha})$

et $I_\beta=[-2\ln(2-t)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2\beta}}=-2\ln(2-\sqrt{2\beta})+2\ln(2-\sqrt{2})$.

Etant donnés deux réels a, $b\in]0,2[$ $(a<b)$, l'application

$$x\mapsto\frac{1}{-x+\sqrt{2x}}$$

est bien définie et continue sur $[a,b]$. Elle est donc intégrable sur $[a,b]$.

Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$, il nous suffit de prendre un point quelconque $c\in]0,2[$ et d'étudier les deux intégrales impropres

$$\int_0^c \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx} \text{ et } \int_c^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}.$$

Considérant les calculs déjà effectués, prenons $c=1$.

Par définition, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}=\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} I_\alpha$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}=\lim_{\beta\longrightarrow 2^-} I_\beta$.

Comme $\displaystyle\lim_{\alpha\longrightarrow 0^+} I_\alpha=-2\ln(2-\sqrt{2})+2\ln(2)$ et $\displaystyle\lim_{\beta\longrightarrow 2^-} I_\beta=+\infty$, nous en déduisons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$ converge tandis que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$ diverge.

Conclusion: l'intégrale impropre $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{-x+\sqrt{2x}}\mathrm{dx}$ diverge.
