Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2007/2008

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, F.-X. DEHON, J. YAMEOGO

Corrigé succinct de la Feuille TD N°2 - semaine du 11/02/2008
(les énoncés sont en bleu)

Exercice 1. (s'habituer à la technique d'intégration par parties)

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_1^{27} \sqrt[3]{x}\,\ln(x)\mathrm{dx}, \quad \int_0^{\pi} \theta(\cos(\theta)+1)d\theta, \quad \int_0^1 (6t+100)e^{-3t}\mathrm{dt}.$$

Réponse:

- $\sqrt[3]{x}$ s'écrit encore $x^{\frac{1}{3}}$.
  On fait une intégration par parties en posant $u'(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $v(x)=\ln(x)$.
  Ainsi $u(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ (par exemple) et $v'(x)=\frac{1}{x}$.
  On a alors $\int_1^{27} \sqrt[3]{x}\,\ln(x)\mathrm{dx}=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^{27}-\int_1^{27}\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}\mathrm{dx}=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln(x)\right]_1^{27}-\frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^{27}$,
  soit $\int_1^{27} \sqrt[3]{x}\,\ln(x)\mathrm{dx}=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}(\ln(x)-\frac{3}{4})\right]_1^{27}=\frac{3}{4}3^4\left(\ln(27)-\frac{3}{4}\right)+\frac{9}{16}=\frac{3^6}{16}(4\ln(3)-1)+\frac{9}{16}$
- On fait une intégration par parties en posant $u'(\theta)=\cos(\theta)+1$, $v(\theta)=\theta$, de sorte que $u(\theta)=\sin(\theta)+\theta$ et $v'(\theta)=1$.
  On en déduit $\int_0^{\pi}\theta(\cos(\theta)+1)d\theta=[\theta(\sin(\theta)+\theta)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(\sin(\theta)+\theta)d\theta$.
  Soit finalement $\int_0^{\pi}\theta(\cos(\theta)+1)d\theta=\left[\theta(\sin(\theta)+\theta)+\cos(\theta)-\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-2$.
- En faisant une intégration par parties, on montre que la fonction $t\mapsto(6t+100)e^{-3t}$ admet pour primitive $t\mapsto-\frac{1}{3}(6t+102)e^{-3t}$, d'où $\int_0^1(6t+100)e^{-3t}\mathrm{dt}=\frac{1}{3}(102-\frac{108}{e^3})$.

Exercice 2. (étudier une suite d'intégrales définies)

On pose $I_0=J_0=\int_1^e \ln(x)\mathrm{dx}$, et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $I_n=\int_1^e x^n\ln(x)\mathrm{dx}$, $J_n=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{dx}$.

1. Calculer I_0, I_1, et J_1.

   Réponse: Une intégration par parties donne $\int_1^e\ln(x)\mathrm{dx}=[x\ln(x)-x]_1^e$ (voir l'exemple traité en cours). On a donc $I_0=J_0=1$.
   En posant $u'(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$, une intégration par parties donne
   $I_1=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x\mathrm{dx}$, c'est-à-dire $I_1=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{1}{4}x^2\right]_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$.
   Pour calculer J_1 on peut faire une intégration par parties ou remarquer que $\frac{\ln(x)}{x}=\ln(x)\times(\ln(x))'$, donc une primitive de $\frac{\ln(x)}{x}=\frac{1}{2}(\ln(x))^2$. On en déduit $J_1=\frac{1}{2}$.

2. Pour $n\geqslant 2$, calculer I_n, J_n et dire si les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(J_n)_{\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Réponse: pour calculer I_n et J_n pour $n\geqslant 2$ on fait une intégration par parties.
$I_n=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^n}{n+1}\mathrm{dx}=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e=\frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.
$J_n=\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^{-n}}{-n+1}\mathrm{dx}=\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln(x)-\frac{x^{-n+1}}{(-n+1)^2}\right]_1^e=\frac{-ne^{-n+1}+1}{(-n+1)^2}$.
La suite de terme général I_n ne converge pas ($\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n=+\infty$). La suite (J_n) tend vers 0: $\lim_{n\longrightarrow+\infty} J_n=0$.

Exercice 3. (s'habituer à la technique de changement de variable)
Calculer les intégrales suivantes:
$\int_1^9\frac{3x}{\sqrt{2x+7}}\mathrm{dx}$ (indication: au choix, poser $u=(2x+7)$ ou $x=\frac{t^2-7}{2}$),
$\int_0^1\frac{x}{3x+1}\mathrm{dx}$,
$\int_0^2\frac{1+x}{4+x^2}\mathrm{dx}$
Réponse:

- En posant $u=2x+7$, nous obtenons par différentiation, $\mathrm{du}=2\mathrm{dx}$. Lorsque $x=1$, $u=9$ et lorsque $x=9$, $u=25$. On en déduit $\int_1^9\frac{3x}{\sqrt{2x+7}}\mathrm{dx}=\int_9^{25}\frac{3(u-7)}{4\sqrt{u}}\mathrm{du}$. On constate que pour u parcourant l'intervalle $[9,25]$, on a $\frac{u-7}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}-\frac{7}{\sqrt{u}}$ et
$\int_9^{25}\frac{3(u-7)}{4\sqrt{u}}\mathrm{du}=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-14\sqrt{u}\right]_9^{25}=28$.

- En posant $u=3x+1$, ou encore $x=\frac{1}{3}(u-1)$,
on trouve $\int_0^1\frac{x}{3x+1}\mathrm{dx}=\frac{1}{9}\int_1^4(1-\frac{1}{u})\mathrm{du}=\frac{1}{9}(3-2\ln(2))$.

- Si on pose $x=2t$, on $\mathrm{dx}=2\mathrm{dt}$ et $\int_0^2\frac{1+x}{4+x^2}\mathrm{dx}=\int_0^1\frac{1+2t}{4(1+t^2)}\times 2\mathrm{dt}$.
Comme $\frac{1+2t}{4(1+t^2)}\times 2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^2}$,
on a $\int_0^1\frac{1+2t}{4(1+t^2)}\times 2\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{dt}+\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{dt}$.
$\frac{1}{1+t^2}$ admet pour primitive $\arctan(t)$ et $\frac{t}{1+t^2}$ admet pour primitive $\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.
On en déduit $\int_0^1\frac{1+2t}{4(1+t^2)}\times 2\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\left[\arctan(t)+\ln(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\ln(2))$.
Conclusion: $\int_0^2\frac{1+x}{4+x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\ln(2))$.

Exercice 4. (utiliser la technique appropriée pour calculer)

Calculer les intégrales suivantes: $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{dx}$, $\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\mathrm{dx}$, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}$.

Réponse:

- En faisant une intégration par parties où on pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$, on a $\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{dx} = \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

- En posant $u = x-1$ (soit $x = u+1$), on a
$$\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\mathrm{dx} = \int_1^2 \frac{(u+1)^2}{u^3}\mathrm{du} = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right)\mathrm{du} = \left[\ln(u) - 2\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2}\right]_1^2 = \ln(2) + \frac{11}{8}.$$

- La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1,1]$ étant paire, on a
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx} = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}.$$
Posant $x = \sin(t), 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, on obtient $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{dt} = \frac{\pi}{4}$.
Conclusion: $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5. (modéliser) Une entreprise vient d'ouvrir une usine de fabrication de stylos.

On suppose que la production journalière de cette usine est modélisée par la fonction $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par
$$f(t) = 4000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$$
où t est le nombre de jours travaillés depuis l'ouverture de l'usine ($f(t)$ étant le nombre de stylos fabriqués par jour). On suppose qu'il y a 250 jours travaillés par an.

a) Quelle sera la production journalière à la fin du trentième jour travaillé?
Réponse:
La production journalière à la fin du trentième jour travaillé est donnée par $f(30)$. Elle est donc de 3750 stylos/jour.

b) Quelle est la limite de la production journalière lorsque t tend vers $+\infty$?
Réponse:
On a $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f(t) = 4000$.

c) Au total, combien de stylos cette usine aura-t-elle produits au bout de ses 30 premiers jours travaillés? Quelle est la production journalière moyenne sur les 30 premiers jours travaillés?
Réponse:
En utilisant la fonction modélisant la production journalière, on peut estimer qu'au bout des trente premiers jours travaillés, le nombre de stylos fabriqués est donné par $\int_0^{30} f(t)\mathrm{dt}$.
La fonction $f(t)$ admet pour primitive $F(t) = 4000(t + \frac{100}{t+10})$.
On a $\int_0^{30} f(t)\mathrm{dt} = F(30) - F(0)$. Conclusion: au bout des trente premiers jours travaillés, cette usine aura produit au total 90000 stylos. La production journalière moyenne sur les 30 premiers jours travaillés est alors de 3000 stylos/jours.

d) Par quelle fonction g: $\left[0,+\infty\right[$, $x \mapsto g(x)$ peut-on modéliser le nombre total de stylos qui auront été fabriqués dans cette usine au bout de x années?

Réponse:

Comme une année compte 250 jours travaillés, x années correspondent à $250\times x$ jours travaillés. Au bout de x années l'usine aura produit au total un nombre de stylos égale à $\int_0^{250x} f(t)\mathrm{d}t$. On a vu au c) que $f(t)$ admet pour primitive $F(t)=4000(t+\frac{100}{t+10})$.

Il s'en suit que la fonction g qui modélise le nombre total de stylos qui auront été fabriqués dans cette usine au bout de x années est donnée par $g(x)=10^6x(1-\frac{1}{25x+1})$.

Exercice 6. (encore un changement de variable)

Pour un entier naturel non nul n donné, on pose

$$\boldsymbol{I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^n\mathrm{dx}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x))^n\mathrm{dx}}.$$

a) Calculer I_1, J_1.

Réponse: on trouve facilement $I_1=J_1=1$

b) En utilisant la formule trigonométrique $(\cos(x))^2=\frac{1+\cos(2x)}{2}$, calculer J_2.

Réponse: $J_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2x))\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n=J_n$.

(Indication: on pourra faire un changement de variable en posant $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}-t}$)

Réponse: en posant $x=\frac{\pi}{2}-t$,

on obtient $I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\sin(\frac{\pi}{2}-t))^n\times(-1)\mathrm{dt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(\frac{\pi}{2}-t))^n\mathrm{dt}$.

En utilisant le fait que pour tout nombre réel t on a $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos(t)$, il s'en suit que $I_n=J_n$.

d) Sachant que pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, on a $\boldsymbol{I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}}$, calculer J_4 et J_5.

Réponse: en utilisant la question c) et la relation de récurrence donnée ici, on a $J_4=\frac{3}{4}J_2=\frac{3\pi}{16}$, $J_5=\frac{4}{5}J_3=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}J_1=\frac{8}{15}$.
