Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2007/2008

2ème SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

Corrigé de l'épreuve écrite de Mathématiques de la deuxième session

---

Exercice 1. (6 points)
On considère la fonction réelle f définie par la formule $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$.

a) Le domaine de définition de f est un intervalle D de $\mathbb{R}$. Quel est cet intervalle?

b) Calculer $f'(x)$ en précisant le domaine de validité de votre calcul.

c) On considère sur l'intervalle $[1,2]$, la fonction g définie par la formule
$g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.
Calculer l'intégrale $i = \displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{dx}$.

Solution:

a) Le trinôme $-x^2+2x+3$ a pour racines -1 et 3. D'après la règle du signe d'un trinôme, on a $-x^2+2x+3 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1,3]$. Le domaine de définition de f est donc l'intervalle fermé $D = [-1,3]$.

b) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $\Big]-1,3\Big[$ et sur cet intervalle on a
$f'(x) = \dfrac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

c) Remarquons pour commencer que l'expression $\dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ est bien définie si et seulement si $\frac{1}{2} < x < 3$. D'après la question b), la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ admet pour primitive $x \mapsto -\sqrt{-x^2+2x+3}$ sur l'intervalle $[1,2]$. On voit facilement, quitte à faire un changement de variable en posant par exemple $u = 2x-1$, que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ admet pour primitive $x \mapsto \sqrt{2x-1}$.
Nous en déduisons que $i = \displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{dx} = \Big[-\sqrt{-x^2+2x+3} + \sqrt{2x-1}\Big]_1^2 = 1$.

Exercice 2. (6 points)
Sur l'intervalle $[-1, 1]$ on considère les deux fonctions réelles f et g définies par les formules $f(x) = \dfrac{3}{x+2} - 1$ et $g(x) = 1 - x$.

a) Montrer qu'on a $g(x) - f(x) = \dfrac{-x^2+1}{x+2}$.
En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.

b) Calculer et comparer les intégrales $i_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$ et $i_2 = \displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{dx}$.

Solution:

a) Nous avons $g(x) - f(x) = 1 - x + 1 - \dfrac{3}{x+2} = 2 - x - \dfrac{3}{x+2}$. Une simple mise au même dénominateur de cette dernière expression donne $g(x) - f(x) = \dfrac{-x^2+1}{x+2}$.
Sur l'intervalle $[-1,1]$, on a $x+2>0$. L'expression $\dfrac{-x^2+1}{x+2}$ a donc même signe que $-x^2+1$ sur $[-1,1]$. On voit facilement que $-x^2+1$ est positif ou nul sur $[-1,1]$, ce qui signifie que sur cet intervalle on a $f \leqslant g$.

b) Nous avons $i_1 = [3\ln(x+2) - x]_0^1 = 3\ln(3) - 1 - 3\ln(2) = 3\ln(\frac{3}{2}) - 1$ et $i_2 = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.
On peut utiliser la question b) pour obtenir $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x parcourant l'intervalle $[0,1]$. Il s'en suit que $i_1 \leqslant i_2$.

Exercice 3. (3 points)
Etudier la convergence de l'intégrale impropre $i = \displaystyle\int_2^{+\infty} 500\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{dx}$.
(on rappelle que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$)

Solution: Pour $b \in \left[0, +\infty\right[$, posons $i(b) = \displaystyle\int_2^b 500\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{dx}$.
En faisant une intégration par parties où on a posé $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $v(x) = \ln(x)$,
de sorte que $u(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, on a

$$i(b) = 500\int \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{dx} = 500\left[\left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_2^b + \int_2^b \frac{1}{x^2}\mathrm{dx}\right].$$

Nous obtenons alors $i(b) = 500\left[-\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}\right]_2^b = 500\left(\dfrac{\ln(2)+1}{2} - \dfrac{\ln(b)+1}{b}\right)$.

Par définition on a $\displaystyle\int_2^{+\infty} 500\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{dx} = \lim_{b \longrightarrow +\infty} i(b)$. Or $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} i(b) = 250(\ln(2)+1)$.
Conclusion: notre intégrale impropre converge vers $250(\ln(2)+1)$.

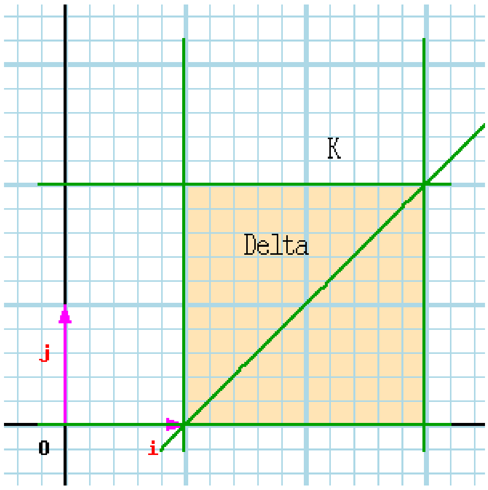
Exercice 4. (5 points)
Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, on considère le carré K défini par $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ et le triangle Δ défini par $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 1 \leqslant x \leqslant y+1\}$.

a) Dessiner le carré K et le triangle Δ.

b) On considère sur ces deux domaines, la fonction f définie par $f(x,\, y) = \dfrac{y+1}{x}$. Calculer les intégrales doubles $I = \displaystyle\iint_K f(x,y)\mathrm{dxdy}$ et $J = \displaystyle\iint_\Delta f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Solution:

a)



Dessin du carré et du triangle

b) Par le théorème de Fubini on a $I = \displaystyle\int_1^3 \left[\int_0^2 \frac{(y+1)}{x}\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx}$. Etant donné $x \in [1,\, 3]$, on a $I(x) = \dfrac{1}{x}\left[(\dfrac{1}{2}y^2 + y)\right]_{y=0}^{y=2} = \dfrac{4}{x}$. On en déduit $I = [4\ln(x)]_1^3 = 4\ln(3)$. Pour calculer l'intégrale double sur le triangle, on utilise encore le théorème de Fubini: $J = \displaystyle\int_0^2 \left[\int_1^{y+1} \frac{(y+1)}{x}\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}$.
Pour $y \in [0,2]$ fixé, on a $J(y) = (y+1)[\ln(x)]_{x=1}^{x=y+1} = (y+1)\ln(y+1)$.
Ce qui donne $J = \displaystyle\int_0^2 (y+1)\ln(y+1)\mathrm{dy}$. Une intégration par parties nous permet de voir que $\displaystyle\int_0^2 (y+1)\ln(y+1)\mathrm{dy} = \left[\frac{(y+1)^2}{2}\ln(y+1) - \frac{(y+1)^2}{4}\right]_0^2 = \frac{9}{2}\ln(3) - 2.$
