Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Année 2006/2007

1ère SESSION - 2ème Semestre
Filière Eco-Gestion
Première Année de Licence (L1)
Mathématiques 2 (DL1EMA2)
Unité U5
Enseignant: YAMEOGO J.

Corrigé de l'épreuve écrite de Mathématiques

durée: 1h 30

Calculatrices, documents et téléphones portables sont interdits

Réponses et calculs doivent être accompagnés de **justifications** sobres et pertinentes.

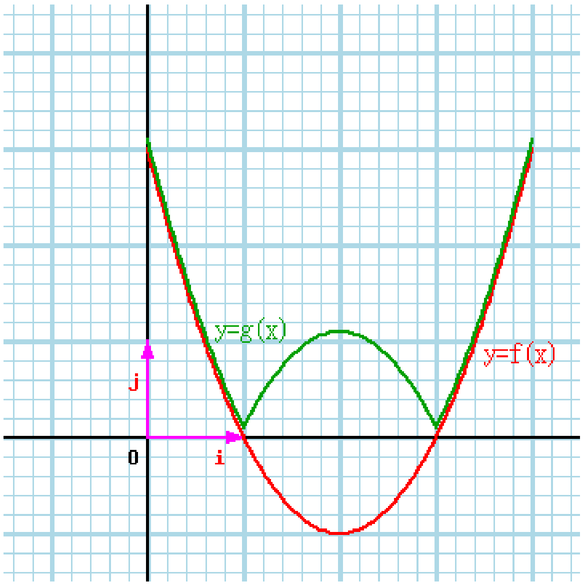
Tournez la page S.V.P.

Exercice 1. (5 points)
Le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère sur l'intervalle $[0,4] \subset \mathbb{R}$, les deux fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = \left| f(x) \right|$.

a) Dessiner les graphes des fonctions f et g.

b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Solution: Le graphe de f est la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$. Comme le trinôme $x^2 - 4x + 3$ admet $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$ pour racines, on a $f(x) < 0$ sur $]1,3[$ et $f(x) \geqslant 0$ sur $[0,1] \cup [3,4]$. On en déduit que $g(x) = f(x)$ sur $[0,1] \cup [3,4]$ et $g(x) = -f(x)$ sur $]1,3[$.
En utilisant la relation de Chasles, on trouve: $\displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$. Ce qui donne, par définition de g, $\displaystyle\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x + \int_1^3 -(x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.



Exercice 2. (5 points)
Soit α un nombre réel vérifiant $0 < \alpha < 1$. On pose $I_\alpha = \displaystyle\int_\alpha^{10} \ln(x)\mathrm{d}x$.

a) Calculer l'intégrale I_α.

b) Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{10} \ln(x)\mathrm{d}x$.
(on pourra utiliser l'égalité $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0^+} t\ln(t) = 0$)

c) On pose $f(x) = |\ln(x)|$.
Etudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

Solution: En faisant une intégration par parties (voir le calcul de l'exercice 1 de la feuille TD N°3), on trouve $I_\alpha = [x\ln(x) - x]_\alpha^{10} = 10(\ln(10) - 1) - \alpha(\ln(x) - 1)$.
Par définition, on $\displaystyle\int_0^{10} \ln(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} I_\alpha$.
Comme $\displaystyle\lim_{\alpha \longrightarrow 0^+} \alpha\ln(\alpha) = 0$, on a $\displaystyle\int_0^{10} \ln(x)\mathrm{d}x = 10(\ln(10) - 1)$.

Si on pose $f(x)=|\ln(x)|$, pour tout α vérifiant $0<\alpha<1$ on a
$\int_\alpha^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^1 -\ln(x)\mathrm{d}x + \int_1^{10} \ln(x)\mathrm{d}x$. Ce qui donne
$\int_\alpha^{10} f(x)\mathrm{d}x = -[x\ln(x)-x]_\alpha^1 + [x\ln(x)-x]_1^{10} = 10(\ln(10)-1)+\alpha(\ln(\alpha)+1)+2.$
En faisant tendre α vers 0 dans cette dernière expression, on trouve
$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 10\ln(10)-8.$

Exercice 3. (5 points)
On considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$ et la fonction $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}$.

a) Expliquer pourquoi f est bien définie et continue sur D.

b) Calculer $I=\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

c) Sachant que pour tout $(x,y)\in D$ on a $f(x,y)<\frac{7}{4}$, expliquer pourquoi on a $I<\frac{7}{2}$.

Solution:

a) On a $1\leqslant x+1\leqslant 2$ et $-1\leqslant -y\leqslant 1$. En additionnant ces deux inégalités on trouve $0\leqslant x-y+1\leqslant 3$, ce qui entraîne que $\sqrt{x-y+1}$ est bien définie sur le rectangle en question. f est la composée $f_2\circ f_1$ des fonctions continues $f_1\colon D\longrightarrow\mathbb{R}_+$ et $f_2\colon \mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ définies par: $f_1(x,y)=x-y+1$, $f_2(t)=\sqrt{t}$. f est donc continue en tant que composée de fonctions continues.

b) Pour calculer l'intégrale $I=\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, on utilise le théorème de Fubini: $I=\int_{-1}^1\left[\int_0^1\sqrt{x-y+1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$. On trouve $I=\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-4\sqrt{2}-1)\simeq 2,38$.

c) Sur le rectangle D on a $0\leqslant f(x,y)<\frac{7}{4}$, d'où $0\leqslant I<\int\int_D\frac{7}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{7}{4}\times 2=\frac{7}{2}$.

Exercice 4. (5 points)

a) Quels sont les domaines de définition des fonctions réelles f, g et h données par les formules suivantes?
$$f(x)=\ln(2-x),\qquad g(x)=\sqrt{1+x},\qquad h(x)=f(x)\times g(x).$$

b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $x_0=1$, pour chacune des fonctions f, g et h ci-dessus.

Solution:

a) Le domaine de définition de f est $D(f)=]-\infty,2[$, celui de g est $D(g)=[-1,+\infty[$. Le domaine de définition de h est alors l'intersection de $D(f)$ et $D(g)$:
$D(h)=[-1,2[$.

b) Les fonctions f et g étant dérivables au voisinage de $x_0=1$, on peut utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer leur développement limité à l'ordre 2 en $x_0=1$. Le développement limité de h à l'ordre 2 en $x_0=1$ s'obtient alors en multipliant les deux précédents. On trouve $f(x)=-(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)$,
$g(x)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)-\frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.
On en déduit alors $h(x)=-\sqrt{2}(x-1)+\frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.