Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **(DL1EMA2) - Unité U5**
Année 2006/2007

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: E. AUBRY, F. BARKATS, M. VIRAT

FEUILLE TD N°4 - semaine du 19 mars 2007

Exercice 1.
On considère dans $\mathbb{R}^2$ le carré $C=[0,1]\times[0,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.
Soit $f\colon C\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}$.

a) Expliquer pourquoi f est bien définie et continue sur C.

b) Calculer $I=\displaystyle\iint_C f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Exercice 2. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$, le domaine Δ bordé par le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,2)$.

a) La droite joignant les points $(0,\ 0)$ et $(3,\ 2)$ admet une équation ayant l'une des formes suivantes: $\boldsymbol{x=\alpha y+\beta}$ ou $\boldsymbol{y=ax+b}$ (α, β, a et b sont des réels). Donner explicitement une de ces équations (en trouvant α et β ou a et b).

b) Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\iint_\Delta x^2y^3\mathrm{dxdy}$.

Exercice 3.
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -2\leqslant y\leqslant 2,\ \frac{1}{2}y-1\leqslant x\leqslant y^2\right\}$.
On considère $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y$.
Dessiner D et calculer $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy}$.

Exercice 4.

1. Dessiner le domaine D_1 de $\mathbb{R}^2$ défini par $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 2\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}\right\}$.
2. On pose $x=\dfrac{u+v}{2}$ et $y=\dfrac{u-v}{2}$. Montrer les équivalences suivantes:
$(1\leqslant x+y\leqslant 2)\Longleftrightarrow(1\leqslant u\leqslant 2)$; $(x\geqslant 0)\Longleftrightarrow(u+v\geqslant 0)$; $(y\geqslant 0)\Longleftrightarrow(u-v\geqslant 0)$.
3. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D_2 des couples $(u,\ v)$ vérifiant le système d'inégalités suivant: $\begin{cases}1\leqslant u\leqslant 2\\ u+v\geqslant 0\\ u-v\geqslant 0\end{cases}$.
4. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\iint_{D_1}(x+y)(y-x)^4\mathrm{dxdy}$. (On admet que l'application $\varphi\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u,v)=\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}\right)$ est bijective).

Exercice 5. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé, les deux cercles concentriques Γ_1 et Γ_2 de centre $\omega = (1,1)$ et de rayons respectifs $R_1 = 2$ et $R_2 = 3$. Si C est la couronne fermée comprise entre ces deux cercles, on note K la demi-couronne fermée située dans le demi-plan fermé défini par $x \geqslant 1$.

Dessiner K et calculer $I = \displaystyle\iint_K xy\,\mathrm{dxdy}$ (On pourra faire un changement de variables en posant: $x = 1 + r\cos(\theta)$, $y = 1 + r\sin(\theta)$ avec $2 \leqslant r \leqslant 3$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.)

Exercice 6. Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé, le domaine D des couples (x,y) vérifiant $\begin{cases} \boldsymbol{|y| \leqslant 2} \\ \boldsymbol{|x| \leqslant \frac{1}{4}y^2 + 1} \\ \boldsymbol{y \leqslant x^2 + 1} \end{cases}$. Calculer l'aire de D.