Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **- Unité U5 -**
Année 2009/2010

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, P. BANSART, M. SARRAGE

Feuille TD N°4 - semaine du 15 mars 2010

Exercice 1. (s'entraîner à la technique de changement de variable)
Calculer les intégrales suivantes:
$I_1 = \int_1^9 \frac{3x}{\sqrt{2x+7}}\mathrm{dx}$ (indication: au choix, poser $u = (2x+7)$ ou $x = \frac{t^2-7}{2}$),
$I_2 = \int_0^1 \frac{5x}{3x+1}\mathrm{dx}$, $I_3 = \int_0^1 \frac{2-x}{1+x^2}\mathrm{dx}$.

Exercice 2. (utiliser la technique appropriée pour calculer)
Calculer les intégrales suivantes:

$$I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\mathrm{dx},\ I_2 = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^3}\mathrm{dx}.$$

Exercice 3. (étudier des intégrales impropres)
Calculer si possible les intégrales impropres suivantes:

$$i_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{3}x}\mathrm{dx},\ i_2 = \int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{11-x}}\mathrm{dx},\ i_3 = \int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{dx},\ \ i_4 = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\mathrm{dx}$$

Exercice 4. (étudier une suite d'intégrales définies) On pose $I_0 = J_0 = \int_1^e \ln(x)\mathrm{dx}$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \int_1^e x^n \ln(x)\mathrm{dx}$, $J_n = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{dx}$.

1. Calculer I_0, I_1, et J_1.
2. Pour $n \geqslant 2$, calculer I_n, J_n et dire si les suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(J_n)_{\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

Exercice 5. (modéliser) Une entreprise vient d'ouvrir une usine de fabrication de stylos.
On suppose que la production journalière de cette usine est modélisée par la fonction $f\colon [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = 4000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)$$

où t est le nombre de jours travaillés depuis l'ouverture de l'usine ($f(t)$ étant le nombre de stylos fabriqués par jour). On suppose qu'il y a 250 jours travaillés par an.

a) Quelle sera la production journalière à la fin du trentième jour travaillé?
b) Quelle est la limite de la production journalière lorsque t tend vers $+\infty$?
c) Au total, combien de stylos cette usine aura-t-elle produits au bout de ses 30 premiers jours travaillés? Quelle est la production journalière moyenne sur les 30 premiers jours travaillés?
d) Par quelle fonction $g\colon [0, +\infty[, x \mapsto g(x)$ peut-on modéliser le nombre total de stylos qui auront été fabriqués dans cette usine au bout de x années?