Université de Nice Sophia Antipolis
L1 Sciences économiques - Gestion
Mathématiques 2 **- Unité U5 -**
Année 2009/2010

Enseignant: J. YAMEOGO
Chargés de TD: F. BARKATS, P. BANSART, M. SARRAGE

# Feuille TD N°2 - semaine du 8 février 2010

**Exercice 1. (savoir écrire Taylor-Young)**
On considère la fonction réelle $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - 3x + x^2 + x^3 - x^4$.
Écrire:

- le développement limité de $f$ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$
- le développement limité de $f$ à l'ordre 3 en $x_0 = 1$.

**Exercice 2. (domaine, calcul du DL d'un produit)**

a) Quels sont les domaines de définition des fonctions réelles $f$, $g$ et $h$ données par les formules suivantes?
$$f(x) = \ln(1+x),\ g(x) = \sqrt{2-x},\ h(x) = f(x) \times g(x).$$
b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $x_0 = 1$, pour chacune des fonctions $f$, $g$ et $h$ ci-dessus.

**Exercice 3. (routine de calcul de DL)** Calculer les développements limités suivants:

1. DL à l'ordre 4 en $x_0 = 0$ de $x \longmapsto \dfrac{1+x^2}{1+x}$
2. DL à l'ordre 3 en $x_0 = 0$ de $x \longmapsto \sqrt{1-x}$
3. DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ de $x \longmapsto \dfrac{1-x}{2+x}$
4. DL à l'ordre 4 en $x_0 = 0$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x - x}$

**Exercice 4. (utiliser des DL pour calculer des limites)** Calculer les limites suivantes:
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^2)}{x(e^x - 1)}$$

**Exercice 5. (DL, position de tangente)**

1. Soit $f$ la fonction définie au voisinage de $x_0 = 1$ par $f(x) = 2^{x^2} - 2^x + x$.
Un calcul (supposé juste) dit que le DL à l'ordre 2 de $f$ en $x_0$ est donné par
$f(x) = 1 + (2\ln(2) + 1)(x-1) + \ln(2)(3\ln(2) + 2)(x-1)^2 + o((x-1)^2))$.
Donner une équation de la tangente au graphe de $f$ en $(x_0, f(x_0))$ et étudier la position du graphe par rapport à cette tangente au voisinage de $(x_0, f(x_0))$.
2. Soit $g$ la fonction définie par la formule $g(x) = e^{-x^2}\sqrt{1-x^4} + \sin^2(x)$.
   a) Quel est le domaine de définition de $g$?
   b) Un calcul (supposé juste) dit que le DL à l'ordre 4 de $g$ en $x_0 = 0$ est donné par $g(x) = 1 - \dfrac{1}{3}x^4 + o(x^4)$.
   Donner une équation de la tangente au graphe de $g$ en $(0, g(0))$ et étudier la position du graphe de $g$ par rapport à cette tangente au voisinage de $(0, g(0))$.