Perspectives sous-riemanniennes

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis

31 mars 2011

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

- Structures sous-riemanniennes

Plan de l'exposé

- Structures sous-riemanniennes

- Propriétés métriques des structures SR

Plan de l'exposé

- Structures sous-riemanniennes
- Propriétés métriques des structures SR
- Géodésiques des structures SR

Plan de l'exposé

- Structures sous-riemanniennes
- Propriétés métriques des structures SR
- Géodésiques des structures SR
- Perspectives SR

Structures sous-riemanniennes

Soit M une variété lisse connexe sans bord de dimension $n \geq 3$. Une **structure sous-riemannienne** (Δ, g) sur M correspond à la donnée de deux objets :

Structures sous-riemanniennes

Soit M une variété lisse connexe sans bord de dimension $n \geq 3$. Une **structure sous-riemannienne** (Δ, g) sur M correspond à la donnée de deux objets :

- Δ une **distribution totalement non-holonome** de rang $m \leq n$, localement représentée par une famille de champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^m$ tels que

$$\mathrm{Lie}\left\{X^1, \cdots, X^m\right\}(x) = T_x M.$$

Structures sous-riemanniennes

Soit M une variété lisse connexe sans bord de dimension $n \geq 3$. Une **structure sous-riemannienne** (Δ, g) sur M correspond à la donnée de deux objets :

- Δ une **distribution totalement non-holonome** de rang $m \leq n$, localement représentée par une famille de champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^m$ tels que

$$\mathrm{Lie}\left\{X^1, \cdots, X^m\right\}(x) = T_x M.$$

- g une **métrique** sur Δ, c'est à dire la donnée d'un produit scalaire sur $\Delta(x)$ en tout point $x \in M$.

Courbes horizontales

Une courbe absolument continue $\gamma : [0,1] \to M$ est dite **horizontale** si

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta\big(\gamma(t)\big) \qquad \text{p.p. } t \in [0,1].$$

Courbes horizontales

Une courbe absolument continue $\gamma : [0,1] \to M$ est dite **horizontale** si

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta\big(\gamma(t)\big) \qquad \text{p.p. } t \in [0,1].$$

Théorème (Chow-Rashevski, 1938)

Soit Δ une distribution totalement non-holonome sur M (connexe). Pour tout $x, y \in M$, il existe une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Exemples

• **Le groupe de Heisenberg** : Structure (Δ, g) dans $\mathbb{R}^3$ où Δ est engendrée par les champs

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}$$

et la métrique g rendant $\{X^1, X^2\}$ orthonormée.

Exemples

• **Le groupe de Heisenberg** : Structure (Δ, g) dans $\mathbb{R}^3$ où Δ est engendrée par les champs

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}$$

et la métrique g rendant $\{X^1, X^2\}$ orthonormée. On a

$$[X^1, X^2](x) \;=\; d_x X^2 \cdot X^1(x) - d_x X^1 \cdot X^2(x)$$

Exemples

• **Le groupe de Heisenberg** : Structure (Δ, g) dans $\mathbb{R}^3$ où Δ est engendrée par les champs

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}$$

et la métrique g rendant $\{X^1, X^2\}$ orthonormée. On a

$$\begin{aligned} [X^1, X^2](x) &= d_x X^2 \cdot X^1(x) - d_x X^1 \cdot X^2(x) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\left(e^{-tX^2} \circ e^{-tX^1} \circ e^{tX^2} \circ e^{tX1}\right)(x) - x}{t^2} \end{aligned}$$

Exemples

• **Le groupe de Heisenberg** : Structure (Δ, g) dans $\mathbb{R}^3$ où Δ est engendrée par les champs

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + \frac{x_1}{2}\partial_{x_3}$$

et la métrique g rendant $\{X^1, X^2\}$ orthonormée. On a

$$\begin{aligned}
[X^1, X^2](x) &= d_x X^2 \cdot X^1(x) - d_x X^1 \cdot X^2(x) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\left(e^{-tX^2} \circ e^{-tX^1} \circ e^{tX^2} \circ e^{tX1}\right)(x) - x}{t^2} \\
&= \partial_{x_3}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Vect}\left\{X^1(x), X^2(x), [X^1, X^2](x)\right\} = \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Exemples (suite)

• **Structures de contact** : Soit M de dimension $n = 2p + 1$ et α une 1-forme différentielle telle que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^p \neq 0.$$

Alors la distribution $\Delta = \mathrm{Ker}(\alpha)$ est totalement non-holonome sur M.

Exemples (suite)

• **Structures de contact** : Soit M de dimension $n = 2p + 1$ et α une 1-forme différentielle telle que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^p \neq 0.$$

Alors la distribution $\Delta = \mathrm{Ker}(\alpha)$ est totalement non-holonome sur M.

En fait, pour toute section X de Δ non-nul en $x \in M$, on a

$$\Delta(x) + [\Delta, X](x) = T_x M,$$

où

$$[\Delta, X](x) = \Big\{ [Y, X](x) \,|\, Y \subset \Delta \Big\}.$$

Exemples

- **Distribution de Martinet** : Δ dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2^2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2}.$$

On a $[X^1, X^2] = x_2\partial_{x_3}$ et $[X^2, [X^1, X^2]] = \partial_{x_3}$.

Exemples

- **Distribution de Martinet** : Δ dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$X^1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2^2}{2}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2}.$$

On a $[X^1, X^2] = x_2\partial_{x_3}$ et $[X^2, [X^1, X^2]] = \partial_{x_3}$. Donc

$$\mathrm{Vect}\Big\{X^1(x), X^2(x), [X^1, X^2](x)\Big\} = \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = 0\}$$

et

$$\mathrm{Vect}\Big\{X^1(x), X^2(x), [X^1, X^2](x), [X^2, [X^1, X^2]](x)\Big\} = \mathbb{R}^3 \quad \forall x.$$

Exemples

- **Distributions de haut degré** : Δ dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$X^1 = \partial_{x_1} - x_2^\ell \partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2},$$

avec $\ell \geq 1$. Des crochets de longueur $\ell + 1$ suffiront à engendrer $\mathbb{R}^3$ en tout point.

Exemples

• **Distributions de haut degré** : Δ dans $\mathbb{R}^3$ engendrée par

$$X^1 = \partial_{x_1} - x_2^{\ell}\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2},$$

avec $\ell \geq 1$. Des crochets de longueur $\ell + 1$ suffiront à engendrer $\mathbb{R}^3$ en tout point.

• **Distributions génériques** : L'ensemble des distributions totalement non-holonomes de rank m est générique dans l'ensemble des distributions de rang m sur M.

Distance sous-riemannienne

Longueur d'une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$:

$$\mathrm{long}_g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}\, dt$$

Définition (Distance SR entre deux points $x, y \in M$)

$$d_{SR}(x,y) = \inf \Big\{ long_g(\gamma) \,|\, \gamma \text{ horiz. t.q. } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \Big\}$$

Distance sous-riemannienne

Longueur d'une courbe horizontale $\gamma : [0,1] \to M$:

$$\mathrm{long}_g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}\, dt$$

Définition (Distance SR entre deux points $x, y \in M$)

$$d_{SR}(x,y) = \inf \left\{ long_g(\gamma) \,|\, \gamma \text{ horiz. t.q. } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}$$

La fonction d_{SR} définit une distance sur M. De plus,

Théorème

Soit (Δ, g) une structure SR sur M. Alors la topologie définie par d_{SR} coincide avec la topologie de M. En particulier, la fonction d_{SR} est continue sur $M \times M$.

Vecteurs de croissance et poids

On définit une suite de distributions (singulières)

$$\Delta = \Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots \subset \Delta^i \subset \cdots \subset TM,$$

$$\text{par} \quad \Delta^2 := \Delta + [\Delta, \Delta], \quad \Delta^{s+1} := \Delta^s + [\Delta, \Delta^s],$$

$$\text{où} \quad [\Delta, \Delta^s] = \mathrm{Vect}\left\{[X, Y] \,|\, X \subset \Delta,\ Y \subset \Delta^s\right\}.$$

Vecteurs de croissance et poids

On définit une suite de distributions (singulières)

$$\Delta = \Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots \subset \Delta^i \subset \cdots \subset TM,$$

$$\text{par} \quad \Delta^2 := \Delta + [\Delta, \Delta], \quad \Delta^{s+1} := \Delta^s + [\Delta, \Delta^s],$$

$$\text{où} \quad [\Delta, \Delta^s] = \mathrm{Vect}\left\{[X, Y] \,|\, X \subset \Delta, \ Y \subset \Delta^s\right\}.$$

On pose pour tout $x \in M$, $n_0(x) = 0$ et

$$n_s(x) := \dim \ [\Delta^s(x)] \quad \forall s \geq 1.$$

Vecteurs de croissance et poids

On définit une suite de distributions (singulières)

$$\Delta = \Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots \subset \Delta^i \subset \cdots \subset TM,$$

$$\text{par} \quad \Delta^2 := \Delta + [\Delta, \Delta], \quad \Delta^{s+1} := \Delta^s + [\Delta, \Delta^s],$$

$$\text{où} \quad [\Delta, \Delta^s] = \mathrm{Vect}\left\{[X, Y] \,|\, X \subset \Delta,\ Y \subset \Delta^s\right\}.$$

On pose pour tout $x \in M$, $n_0(x) = 0$ et

$$n_s(x) := \dim \ [\Delta^s(x)] \quad \forall s \geq 1.$$

Définition

- *Degré de non-holonomie en x :* $r(x) =$ *minimum des r tel que* $\Delta^r(x) = T_x M$.
- *Vecteur de croissance en x :* $(m, n_2(x), \ldots, n_r(x))$.
- *Poids en x :* $w_1(x) \leq \ldots \leq w_n(x)$ *définis par*

$$w_i(x) = s \quad si \quad n_{s-1}(x) < i \leq n_s(x).$$

Théorème Ball-Box

Théorème

Si (Δ, g) *est de degré de non-holonomie* $\leq r$*, alors la distance* d_{SR} *est localement* $1/r$*-Hölderienne.*

Théorème Ball-Box

Théorème

Si (Δ, g) *est de degré de non-holonomie* $\leq r$*, alors la distance* d_{SR} *est localement* $1/r$*-Hölderienne.*

Pour tout $x \in M$, on définit la boite (dans $\mathbb{R}^n$) de rayon ϵ par

$$\mathrm{Box}_x(\epsilon) := \left[-\epsilon^{w_1(x)}, \epsilon^{w_1(x)}\right] \times \cdots \times \left[-\epsilon^{w_n(x)}, \epsilon^{w_n(x)}\right].$$

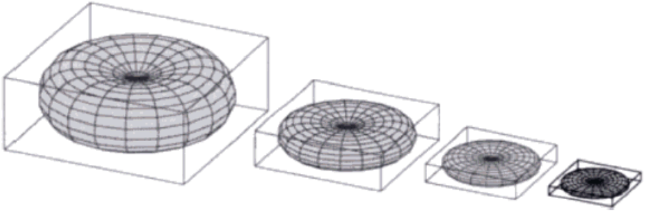
Théorème (Ball-Box Theorem)

Pour tout $x \in M$*, il existe un système de coordonnées et* $c, C > 0$ *tels que*

$$c Box_x(\epsilon) \subset B_{SR}(x, \epsilon) \subset C Box_x(\epsilon),$$

pour tout $\epsilon \geq 0$ *suffisament petit.*

Heisenberg balls



Dimension de Hausdorff

Théorème (Mitchell, 1985)

Soit (Δ, g) *une structure SR ayant un vecteur de croissance* $(m = n_1, \ldots, n_r = n)$ *constant. Alors la dimension de Hausdorff de l'espace métrique* (M, d_{SR}) *vaut*

$$D = \sum_{s=1}^{r} s\big(n_s - n_{s-1}\big).$$

Université Nice Sophia Antipolis

Dimension de Hausdorff

Théorème (Mitchell, 1985)

Soit (Δ, g) une structure SR ayant un vecteur de croissance $(m = n_1, \ldots, n_r = n)$ constant. Alors la dimension de Hausdorff de l'espace métrique (M, d_{SR}) vaut

$$D = \sum_{s=1}^{r} s\left(n_s - n_{s-1}\right).$$

Question ouverte

Les petites sphères SR sont-elles homéomorphes aux sphères euclidienne ? Sont-elles connexes ?

Géodésiques sous-riemanniennes

On appelle **courbe horizontale minimisante** entre x et y toute courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ joignant x à y telle que

$$d_{SR}(x,y) = \mathrm{long}_g(\gamma).$$

Géodésiques sous-riemanniennes

On appelle **courbe horizontale minimisante** entre x et y toute courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ joignant x à y telle que

$$d_{SR}(x,y) = \mathrm{long}_g(\gamma).$$

Théorème (Hopf-Rinow)

Soit (Δ, g) une structure SR sur M telle que (M, d_{SR}) est un espace métrique complet. Alors :

- *Les boules $\bar{B}_{SR}(x,r)$ sont compactes.*
- *Pour tout $x, y \in M$, il existe au moins une courbe horizontale minimisante entre x et y.*

Géodésiques sous-riemanniennes

On appelle **courbe horizontale minimisante** entre x et y toute courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ joignant x à y telle que

$$d_{SR}(x,y) = \mathrm{long}_g(\gamma).$$

Théorème (Hopf-Rinow)

Soit (Δ, g) une structure SR sur M telle que (M, d_{SR}) est un espace métrique complet. Alors :

- *Les boules $\bar{B}_{SR}(x,r)$ sont compactes.*
- *Pour tout $x, y \in M$, il existe au moins une courbe horizontale minimisante entre x et y.*

Si (M,g) est une variété riemannienne complète et Δ une distribution totalement non-holonome, alors la structure sous-riemannienne (Δ, g) est complète.

Université Nice Sophia Antipolis

Applications Entrée-Sortie

Soit $\mathcal{O} \subset M$ un ouvert dans lequel Δ est paramétrée par m champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^m$ et $\bar{x} \in M$ fixé. On a une correspondence univoque entre les courbes horizontales absolument continues

$$\gamma : [0,1] \to \mathcal{O} \quad \text{t.q.} \quad \gamma(0) = \bar{x}$$

et les contrôles $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1]; \mathbb{R}^m\big)$ tels que la solution $x_u(\cdot)$ du problème de Cauchy suivant reste dans $\mathcal{O}$:

$$\dot{x}_u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X\left(x_u(t)\right), \quad x(0) = \bar{x}.$$

Applications Entrée-Sortie

Soit $\mathcal{O} \subset M$ un ouvert dans lequel Δ est paramétrée par m champs de vecteurs $X^1, \ldots, X^m$ et $\bar{x} \in M$ fixé. On a une correspondance univoque entre les courbes horizontales absolument continues

$$\gamma : [0,1] \to \mathcal{O} \quad \text{t.q.} \quad \gamma(0) = \bar{x}$$

et les contrôles $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ tels que la solution $x_u(\cdot)$ du problème de Cauchy suivant reste dans $\mathcal{O}$:

$$\dot{x}_u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X\left(x_u(t)\right), \quad x(0) = \bar{x}.$$

Définition

On définit l'application entrée-sortie partant de $\bar{x}$ par

$$E^{\bar{x}} \, : \, u \in L^1 \longmapsto x_u(1)$$

Géodesiques SR

Soit (Δ, g) une structure SR complète sur M et $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$ une courbe horizontale minimisante entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Quitte à reparamétrer γ et à prendre une famille orthonormée de champs $X^1, \ldots, X^m$ le long de $\bar{\gamma}$, on peut supposer qu'un certain contrôle $\bar{u} \in L^2\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ minimise le coût

$$C(u) = \int_0^1 |u(t)|^2 dt$$

parmi tous les contrôles $u \in L^2\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ tels que

$$E^{\bar{x}}(u) = \bar{y}.$$

Géodesiques SR

Soit (Δ, g) une structure SR complète sur M et $\bar{\gamma} : [0,1] \rightarrow M$ une courbe horizontale minimisante entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Quitte à reparamétrer γ et à prendre une famille orthonormée de champs $X^1, \ldots, X^m$ le long de $\bar{\gamma}$, on peut supposer qu'un certain contrôle $\bar{u} \in L^2\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ minimise le coût

$$C(u) = \int_0^1 |u(t)|^2 dt$$

parmi tous les contrôles $u \in L^2\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ tels que

$$E^{\bar{x}}(u) = \bar{y}.$$

Par le **théorème des multiplicateurs de Lagrange**, on a donc $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\lambda \in T^*_{\bar{y}}M$ (avec $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$) tel que

$$\lambda \cdot dE^{\bar{x}}(\bar{u}) = \lambda_0 dC(\bar{u}).$$

Courbes et contrôles singuliers

Définition

Un contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ *est dit* **singulier** *si l'application entrée-sortie* $E^{\bar{x}}$ *n'est pas une submersion en* u. *La courbe horizontale associée est dite singulière.*

Courbes et contrôles singuliers

Définition

Un contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ est dit **singulier** *si l'application entrée-sortie $E^{\bar{x}}$ n'est pas une submersion en u. La courbe horizontale associée est dite singulière.*

Soit $\bar{u}$ minimisant et $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\lambda \cdot dE^{\bar{x}}(\bar{u}) = \lambda_0 dC(\bar{u}).$$

Courbes et contrôles singuliers

Définition

Un contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ est dit **singulier** *si l'application entrée-sortie $E^{\bar{x}}$ n'est pas une submersion en u. La courbe horizontale associée est dite singulière.*

Soit $\bar{u}$ minimisant et $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\lambda \cdot dE^{\bar{x}}(\bar{u}) = \lambda_0 dC(\bar{u}).$$

Deux possibilités :

- Cas 1 : $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \bar{\gamma}$ est projection d'une extrémale.

Université Nice Sophia Antipolis

Courbes et contrôles singuliers

Définition

Un contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^1([0,1];\mathbb{R}^m)$ est dit **singulier** *si l'application entrée-sortie $E^{\bar{x}}$ n'est pas une submersion en u. La courbe horizontale associée est dite singulière.*

Soit $\bar{u}$ minimisant et $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\lambda \cdot dE^{\bar{x}}(\bar{u}) = \lambda_0 dC(\bar{u}).$$

Deux possibilités :

- Cas 1 : $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \bar{\gamma}$ est projection d'une extrémale.
- Cas 2 : $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}$ est singulière.

Courbes et contrôles singuliers

Définition

Un contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^1\big([0,1];\mathbb{R}^m\big)$ est dit **singulier** *si l'application entrée-sortie $E^{\bar{x}}$ n'est pas une submersion en u. La courbe horizontale associée est dite singulière.*

Soit $\bar{u}$ minimisant et $\lambda_0 \in \{0,1\}$ et $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ tel que

$$\lambda \cdot dE^{\bar{x}}(\bar{u}) = \lambda_0 dC(\bar{u}).$$

Deux possibilités :

- Cas 1 : $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \bar{\gamma}$ est projection d'une extrémale.
- Cas 2 : $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \bar{\gamma}$ est singulière.

Question ouverte

Les courbes horizontales minimisantes sont-elles toujours au moins C^1 ?

Courbes singulières (exemples)

- **Cas riemannien** ($\Delta = TM$) : pas de courbes singulières.

Courbes singulières (exemples)

- **Cas riemannien** ($\Delta = TM$) : pas de courbes singulières.
- **Structures de contact** : Pas de courbes singulières non-triviales.

Université Nice Sophia Antipolis

Courbes singulières (exemples)

- **Cas riemannien** ($\Delta = TM$) : pas de courbes singulières.
- **Structures de contact** : Pas de courbes singulières non-triviales.
- **Distributions de rang** 2 **en dimension** 3 :
  Si $\Delta = \mathrm{Vect}\{X^1, X^2\}$, alors les courbes horizontales singulières sont les courbes horizontales contenues dans la surface de Martinet

$$\Sigma_\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \det\left(X^1(x), X^2(x), [X^1, X^2](x)\right) = 0 \right\}.$$

  Elle est incluse dans une union dénombrable de surfaces lisses.

Courbes singulières (exemples)

- **Distributions de rang** 2 **en dimension** 4 :
  Si Δ est un germe générique de distribution de rang 2 dans $\mathbb{R}^4$, il existe une section lisse X de Δ telle que les courbes horizontales singulières sont exactement les courbes intégrales de X.

Courbes singulières (exemples)

- **Distributions de rang** 2 **en dimension** 4 :
  Si Δ est un germe générique de distribution de rang 2 dans $\mathbb{R}^4$, il existe une section lisse X de Δ telle que les courbes horizontales singulières sont exactement les courbes intégrales de X.

Conjecture de Sard SR

Soit $\bar{x} \in M$ et $\mathcal{S}_{\bar{x}}$ l'ensemble des courbes singulières horizontales $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ telles que $\gamma(0) = \bar{x}$. L'ensemble des valeurs critiques

$$\left\{ \gamma(1) \,|\, \gamma \in \mathcal{S}_{\bar{x}} \right\}$$

est-il de mesure nulle ? D'intérieur vide ?

Exponentielle SR

Le **Hamiltonien sous-riemannien** $H : T^*M \to \mathbb{R}$ est défini par

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{p(v)^2}{g_x(v,v)} \mid v \in \Delta(x) \setminus \{0\} \right\}.$$

Exponentielle SR

Le **Hamiltonien sous-riemannien** $H : T^*M \to \mathbb{R}$ est défini par

$$H(x,p) = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{p(v)^2}{g_x(v,v)} \,|\, v \in \Delta(x) \setminus \{0\} \right\}.$$

L'**exponentielle sous-riemannienne** au point $\bar{x}$ est définie par:

$$\begin{array}{rccc} \exp_{\bar{x}} : T^*_{\bar{x}}M & \longrightarrow & M \\ p & \longmapsto & \psi(1), \end{array}$$

où ψ est l'extrémale solution de

$$\dot{\psi}(t) = \overrightarrow{H}(\psi(t)), \qquad \forall t \in [0,1],$$

telle que $\psi(0) = (\bar{x}, p)$.

Sur l'image de l'exponentielle SR

Théorème (Agrachev-Rifford, 2008)

Soit (Δ, g) une structure SR sur M telle que (M, d_{SR}) est un espace métrique complet. Alors pour tout $\bar{x} \in M$, il existe un ouvert dense $\mathcal{O}$ de M tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- *L'ensemble* $\exp_{\bar{x}}(T^*_{\bar{x}}M)$ *contient* $\mathcal{O}$.
- *Pour tout $y \in \mathcal{O}$, il existe une unique courbe horizontale minimisante entre x et y et elle n'est pas singulière.*
- *La fonction $y \in \mathcal{O} \mapsto d_{SR}(\bar{x}, y)$ est C^∞.*

Sur l'image de l'exponentielle SR

Théorème (Agrachev-Rifford, 2008)

Soit (Δ, g) une structure SR sur M telle que (M, d_{SR}) est un espace métrique complet. Alors pour tout $\bar{x} \in M$, il existe un ouvert dense $\mathcal{O}$ de M tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- *L'ensemble $\exp_{\bar{x}}(T^*_{\bar{x}}M)$ contient $\mathcal{O}$.*
- *Pour tout $y \in \mathcal{O}$, il existe une unique courbe horizontale minimisante entre x et y et elle n'est pas singulière.*
- *La fonction $y \in \mathcal{O} \mapsto d_{SR}(\bar{x}, y)$ est C^∞.*

Question ouverte

L'ouvert dense $\mathcal{O}$ ci-dessus peut-il être pris de mesure pleine ?

Distances SR loin de la diagonale

Théorème

Soit (Δ, g) une structure SR sur M telle que (M, d_{SR}) est un espace métrique complet et Ω un ouvert de $M \times M$ tel que pour toute paire $(x, y) \in \Omega$ avec $x \neq y$, les courbes horizontales minimisantes entre x et y ne sont pas singulières. Alors d_{SR} est localement un minimum de fonctions C^∞ (paramétrées sur une variété compacte lisse) sur $\Omega \setminus D$ où $D := \{(x, x) \,|\, x \in M\}$.

Université Nice Sophia Antipolis

Structures SR génériques

Théorème (Chitour-Jean-Trélat, 2006)

Soit (M, g) *une variété riemannienne complète de dimension* $n \geq 4$. *Pour tout entier* $m \in [3, n]$, *il existe un ouvert dense* $\mathcal{D}_m$ *dans l'ensemble des distributions de rank* m *tel que pour tout* $\Delta \in \mathcal{D}_m$, *aucune minimisante non-triviale n'est singulière.*

Université Nice Sophia Antipolis

Le théorème de Brenier-McCann

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geq 2$, d_g la distance géodésique sur M, et μ_0, μ_1 deux **mesures de probabilité** sur M.

Théorème (McCann, 2001)

Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$ qui minimise le coût

$$\int_M d_g(x, T(x))^2 d\mu_0(x).$$

En fait, il existe une fonction lipschitzienne $\psi : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \exp_x\left(\nabla \psi(x)\right) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Transport de Monge SR quadratique

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit (Δ, g) *une structure SR sur* M *compacte connexe et* μ_0, μ_1 *deux mesures de probabilités sur* M*. Si il existe une ouvert* $\Omega \subset M \times M$ *tel que* $Supp(\mu_0 \times \mu_1) \subset \Omega$ *et* d_{SR} *est localement lipschitzienne sur* $\Omega \setminus D$*, alors il existe une unique application de transport optimale telle que* $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$ *qui minimise le coût*

$$\int_M d_{SR}(x, T(x))^2 d\mu_0(x).$$

Transport de Monge SR quadratique

Théorème (Figalli-Rifford, 2010)

Soit (Δ, g) une structure SR sur M compacte connexe et μ_0, μ_1 deux mesures de probabilités sur M. Si il existe une ouvert $\Omega \subset M \times M$ tel que $Supp(\mu_0 \times \mu_1) \subset \Omega$ et d_{SR} est localement lipschitzienne sur $\Omega \setminus D$, alors il existe une unique application de transport optimale telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$ qui minimise le coût

$$\int_M d_{SR}(x, T(x))^2 d\mu_0(x).$$

De plus, si Ω est totalement géodésiquement convexe, alors la mesure d'interpolation μ_t est absolument continue pour tout $t \in [0, 1)$.

Propriété MCP

Pour tout $K \in \mathbb{R}$, on définit $s_K : [0,\infty) \to [0,\infty)$ par

$$s_K(t) := \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}} & \text{if } K > 0 \\ t & \text{if } K = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}} & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

Définition (Ohta, 2007)

Soit $K \in \mathbb{R}$ et $N \geq 2$ un entier. L'espace métrique mesuré (X, d, m) satisfait la propriété $MCP(K, N)$ si pour tout $x \in X$, pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, et pour tout $s \in [0,1]$, on a

$$m(\rho_s(A)) \geq \int_A s \left[\frac{s_K\left(sd(x,z)/\sqrt{N-1}\right)}{s_K\left(d(x,z)/\sqrt{N-1}\right)} \right]^{N-1} dm(z),$$

où $\rho_s(A)$ désigne l'interpolé entre x et A au temps s.

Références

- **A. Bellaïche**, The tangent space in sub-Riemannian geometry, Birkhäuser (1996)
- **R. Montgomery**, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, AMS (2002)
- **A. Figalli, L. Rifford**, Mass Transportation on sub-Riemannian Manifolds, GAFA (2010)
- **A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain**, Introduction to Riemannian and sub-Riemannian geometry, notes (2011)