Sur les variétés riemanniennes jouissant de bons transports optimaux

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis

(en collaboration avec A. Figalli et C. Villani)

I. Introduction

Problème de transport optimal de Monge dans $\mathbb{R}^n$

Soit μ_0 et μ_1 deux **mesures de probabilités à support compacts** dans $\mathbb{R}^n$.
On appelle **application de transport** entre μ_0 et μ_1 toute application mesurable $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$, c'est à dire

$$\mu_1(B) = \mu_0\big(T^{-1}(B)\big), \quad \forall B \text{ mesurable } \subset \mathbb{R}^n.$$

Problème de Monge : Étude des applications de transport $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui minimisent le coût de transport

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x| \, d\mu_0(x).$$

Existence ? **Unicité** ? **Régularité** ?

Rappels de géométrie riemannienne

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension $n \geq 2$ et d_g la **distance géodésique** sur M.

Pour tout $x \in M$, on appelle **exponentielle en** x, l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} \exp_x : & T_xM & \longrightarrow & M \\ & v & \longmapsto & \exp_x(v) := \gamma_v(1), \end{array}$$

où $\gamma_v : [0,1] \rightarrow M$ est la géodésique partant de x avec vitesse v. En particulier,

$$d_g\left(x, \exp_x(v)\right) \leq \operatorname{long}_g\left(\gamma_v\right) = \sqrt{g_x(v,v)} =: \|v\|_x.$$

Transport optimal sur les variétés riemanniennes

Soit $c : M \times M \to [0, \infty)$ le **coût quadratique** défini par

$$c(x, y) := \frac{1}{2} d_g(x, y)^2 \qquad \forall x, y \in M.$$

Soit μ_0, μ_1 deux mesures (boréliennes) de probabilité μ_0, μ_1 sur M.

Problème de transport optimal quadratique : Étude des applications de transport $T : M \to M$ ($T_\sharp \mu_0 = \mu_1$) qui minimisent

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x)$$

Existence ? **Unicité** ? **Régularité** ?

Le théorème de Brenier-McCann

Théorème (McCann '01)

Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale pour le coût de transport

$$\int_M c(x, T(x))d\mu_0(x).$$

En fait, il existe une fonction semiconvexe $\psi : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \exp_x(\nabla\psi(x)) \qquad \mu_0 \textit{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

La propriété TCP

On dit que la variété riemannienne (M, g) vérifie **TCP** (pour Transport Continuity Property) si la propriété suivante est satisfaite :

Pour toute paire de mesures de probabilité μ_0, μ_1 associées à des **densités continues strictement positives** ρ_0, ρ_1, c'est à dire

$$\mu_0 = \rho_0 \mathrm{vol}_g, \quad \mu_1 = \rho_1 \mathrm{vol}_g,$$

l'application de transport optimale entre μ_0 et μ_1 est **continue**.

II. Conditions nécessaires

Conditions nécessaires

Théorème (Villani '09, Figalli-R-Villani)

Si (M, g) vérifie **(TCP)**, *les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivités sont convexes,*
- *le coût $c = \frac{1}{2} d_g^2$ est régulier.*

Domaines d'injectivité

Soit $x \in M$ fixé. On appelle **domaine d'injectivité** de x, le sous-ensemble de T_xM défini par

$$\mathcal{I}(x) := \left\{ v \in T_xM \,\middle|\, \begin{array}{c} \gamma_v \text{ est l'unique géodésique minimisante} \\ \text{entre } x \text{ et } \exp_x(v) \end{array} \right\}.$$

C'est un ouvert borné étoilé (par rapport à $0 \in T_xM$) à bord Lipschitz.

Coûts réguliers

Le coût $c = \frac{1}{2}d_g^2/2 : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit **régulier**, si pour tout $x \in M$ et tout $v_0, v_1 \in \mathcal{I}(x)$, on a

$$v_t := (1-t)v_0 + tv_1 \in \mathcal{I}(x) \qquad \forall t \in [0,1],$$

et

$$c\left(x', y_t\right) - c(x, y_t) \geq \min\Big(c\left(x', y_0\right) - c\left(x, y_0\right), \, c\left(x', y_1\right) - c\left(x, y_1\right)\Big),$$

pour tout $x' \in M$, avec $y_t := \exp_x v_t$.

Le tenseur de Ma-Trudinger-Wang

Le tenseur **MTW** noté $\mathfrak{S}$ est défini par :

$$\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) = -\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\,\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\, c\left(\exp_x(t\xi), \exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tout $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$.

Proposition (Villani '09, Figalli-R-Villani)

Supposons que tous les domaines d'injectivité de (M,g) sont convexes. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Le coût $c = \frac{1}{2} d_g^2$ est régulier.*
- *Le tenseur **MTW** est ≥ 0, c'est à dire qu'on a pour tout $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$,*

$$\langle \xi, \eta\rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) \geq 0.$$

Conditions nécessaires

Théorème (Villani '09, Figalli-R-Villani)

Si (M, g) vérifie **(TCP)**, *les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le coût c est régulier,*
- *le tenseur $\mathfrak{S}$ est ≥ 0.*

Par une observation dûe à Loeper, pour tout $x \in M$ et toute paire de vecteurs unitaires tangents orthogonaux $\xi, \eta \in T_xM$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x(P),$$

où P est le plan engendré par ξ et η, et $\sigma_x(P)$ est la courbure sectionelle de M par rapport à P. On a par conséquent :

$$\mathbf{TCP} \Longrightarrow \sigma \geq 0.$$

III. Conditions suffisantes

Conditions suffisantes

Théorème (Figalli-R-Villani)

Supposons que (M, g) satisfait les propriétés suivantes :

- *tous les domains d'injectivités sont strictement convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est > 0, c'est à dire que pour tout $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_x M$, on a*

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) > 0.$$

Alors (M, g) vérifie **TCP**.

IV. Exemples

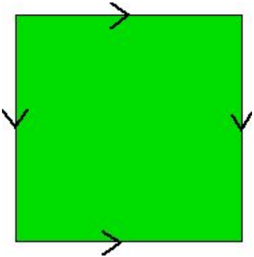
Le tore plat

Le tenseur **MTW** sur le tore plat $\left(\mathbb{T}^n, g^0\right)$ vérifie

$$\mathfrak{S}_{(x,v)} \equiv 0 \qquad \forall x \in \mathbb{T}^n, \forall v \in \mathcal{I}(x)$$

Théorème (Cordero-Erausquin '99)

Le tore plat $\left(\mathbb{T}^n, g^0\right)$ *vérifie* **TCP**.



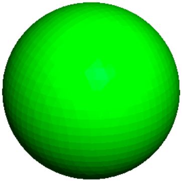
Les sphères rondes

Loeper a le premier vérifié que le tenseur **MTW** de la sphère ronde $\left(\mathbb{S}^n, g^0\right)$ satisfait pour tout $x \in \mathbb{S}^n$, $v \in \mathcal{I}(x)$ et $\xi, \eta \in T_x\mathbb{S}^n$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq \|\xi\|_x^2 \|\eta\|_x^2.$$

Théorème (Loeper '06)

La sphère ronde $\left(\mathbb{S}^n, g^0\right)$ vérifie **TCP**.



Quotients riemanniens

Soit G un groupe discret d'isométries agissant librement et proprement sur (M,g) acting freely and properly. Alors il existe sur la variété quotient $N = M/G$ une unique métrique riemannienne h qui fait de la projection canonique $p : M \rightarrow N$ un revêment riemannien.

Théorème (Delanoe-Ge '08)

Si (M,g) vérifie **TCP**, *alors $\left(N = M/G, h\right)$ vérifie* **TCP**.

Exemples : $\left(\mathbb{RP}^n, g^0\right)$, la bouteille de Klein plate.

Submersions riemanniennes

On appelle **submersion riemannienne** de (M, g) vers (N, h) toute submersion lisse $p : M \longrightarrow N$ telle que pour tout $x \in M$, la différentielle $d_x p$ est une isométrie de H_x vers $T_{p(x)}N$, où $H_x \subset T_x M$ est le **sous-espace horizontal** défini par

$$H_x := \left\{ \left(d_x p\right)^{-1}(0) \right\}^{\perp}.$$

Théorème (Kim-McCann '08)

Si (M, g) vérifie **MTW** > 0 *(resp. ≥ 0), alors (N, h) vérifie* **MTW** > 0 *(resp. ≥ 0).*

Exemples : les espaces projectifs complexes $\left(\mathbb{CP}^k, g^0\right)$ (dim $= 2k$), les espaces projectifs quaternioniens $\left(\mathbb{HP}^k, g^0\right)$ (dim $= 4k$).

Petites déformations de $(\mathbb{S}^2, g^0)$

Sur $(\mathbb{S}^2, g^0)$, le tenseur **MTW** est donné par

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\xi^\perp) &= 3\left[\frac{1}{r^2}-\frac{\cos(r)}{r\sin(r)}\right]\xi_1^4 + 3\left[\frac{1}{\sin^2(r)}-\frac{r\cos(r)}{\sin^3(r)}\right]\xi_2^4 \\ &\qquad + \frac{3}{2}\left[-\frac{6}{r^2}+\frac{\cos(r)}{r\sin(r)}+\frac{5}{\sin^2(r)}\right]\xi_1^2\xi_2^2,\end{aligned}$$

avec $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x), r := \|v\|_x, \xi = (\xi_1,\xi_2), \xi^\perp = (-\xi_2,\xi_1)$.

Théorème (Figalli-R '09)

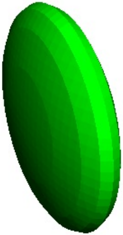
Toute petite déformation de la sphère ronde $(\mathbb{S}^2, g^0)$ en topologie C^4 vérifie **TCP**.

Ellipsoides

L'ellipsoide de révolution (E_ϵ) dans $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{\epsilon^2} + y^2 + z^2 = 1, \qquad \text{with } \epsilon = 0.29,$$

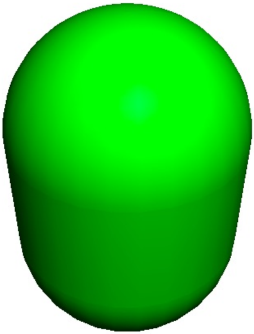
ne vérifie pas **MTW** ≥ 0.



Par conséquent, (E_ϵ) ne vérifie pas **TCP**.

Sauts de courbure

La surface faite de deux hémisphères liés par un tube cylindrique n'a pas un coût régulier.



Donc, il ne vérifie pas **TCP**.

Petites déformations de $\left(\mathbb{S}^n, g^0\right)$

Théorème (Figalli-R-Villani'09)

Toute petite déformation de la sphère ronde $\left(\mathbb{S}^n, g^0\right)$ en topologie C^4 vérifie **TCP**.

On en déduit en particulier que tous les domaines d'injectivité de petites perturbations C^4 de $\left(\mathbb{S}^n, g^0\right)$ sont convexes.

V. Perspectives

Perspectives

Théorème (Conditions nécessaires)

Si (M, g) vérifie **(TCP)**, *alors :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est* ≥ 0.

Theorem (Conditions suffisantes)

Si (M, g) satisfait les deux propriétés suivantes :

- *tous les domaines d'injectivité sont strictement convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est* > 0,

alors elle vérifie **TCP**.

A-t-on équivalence ? Plus d'exemples ? Stabilité ?