Transport de masse sur la Terre

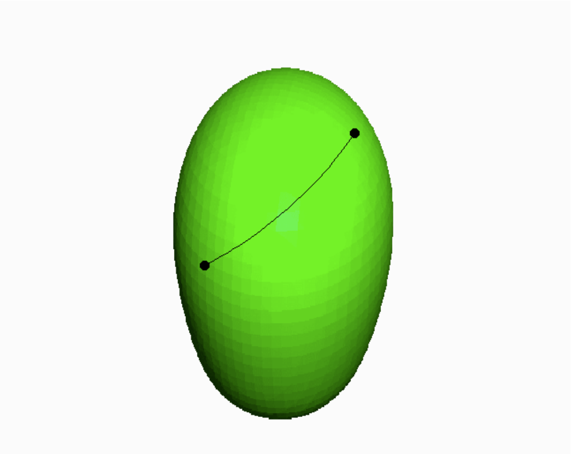
Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis
&
Institut Universitaire de France

Colloque 2012 de la Société Mathématique de Tunisie

Distance géodésique sur les surfaces

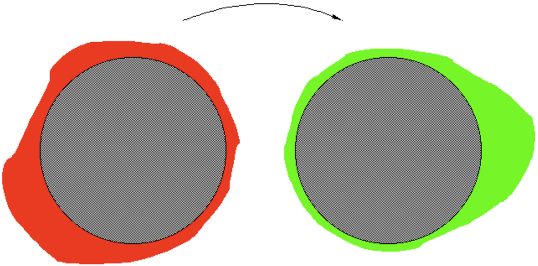
Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x, y \in M$, on définit la distance entre x et y, notée $d(x, y)$, comme le minimum des longueurs des courbes tracées sur M qui relient x à y.



Applications de transport

Soit μ_0 et μ_1 deux **mesures de probabilités** sur M. On appelle **application de transport** de μ_0 vers μ_1 toute application mesurable $T : M \to M$ telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$, c'est à dire

$$\mu_1(B) = \mu_0\big(T^{-1}(B)\big), \quad \forall B \text{ mesurable } \subset M.$$



Problème de Monge quadratique

Étant données deux mesures de probabilité μ_0, μ_1 sur M, trouver une application de transport $T : M \longrightarrow M$ de μ_0 vers μ_1 qui minimise le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Problème de Monge quadratique

Étant données deux mesures de probabilité μ_0, μ_1 sur M, trouver une application de transport $T : M \longrightarrow M$ de μ_0 vers μ_1 qui minimise le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Existence ?

Unicité ?

Régularité ?

Le théorème de Brenier

Problème de Monge quadratique dans $\mathbb{R}^n$: Étant données μ_0, μ_1 deux mesures de probabilité μ_0, μ_1 sur $\mathbb{R}^n$ à supports compacts, on s'intéresse aux applications de transport $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de μ_0 vers μ_1 qui minimisent le coût de transport

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, d\mu_0(x).$$

Le théorème de Brenier

Problème de Monge quadratique dans $\mathbb{R}^n$: Étant données μ_0, μ_1 deux mesures de probabilité μ_0, μ_1 sur $\mathbb{R}^n$ à supports compacts, on s'intéresse aux applications de transport $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de μ_0 vers μ_1 qui minimisent le coût de transport

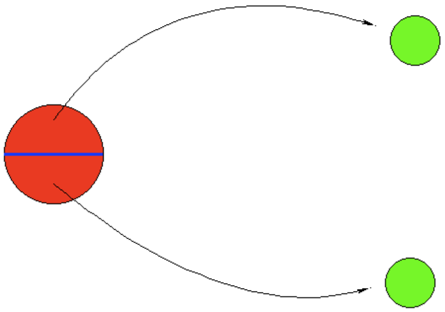
$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, d\mu_0(x).$$

Théoreme (Brenier '91)

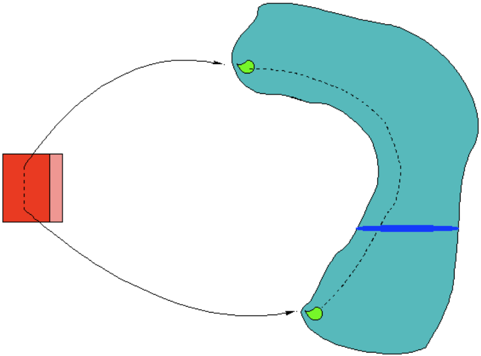
Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale pour le coût de transport quadratique. En fait, il existe une fonction **convexe** $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$T(x) = \nabla\psi(x) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

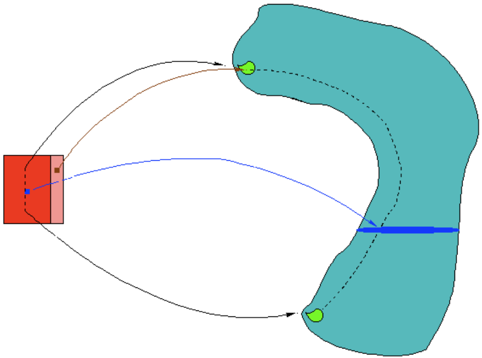
Contre-exemple trivial



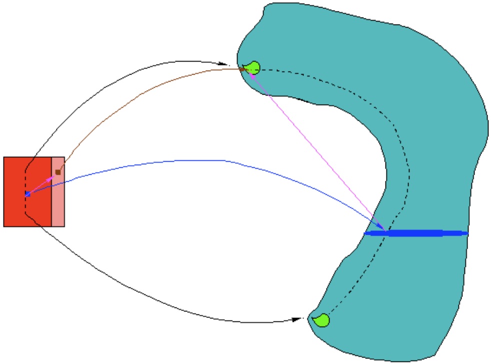
Nécessité de la convexité



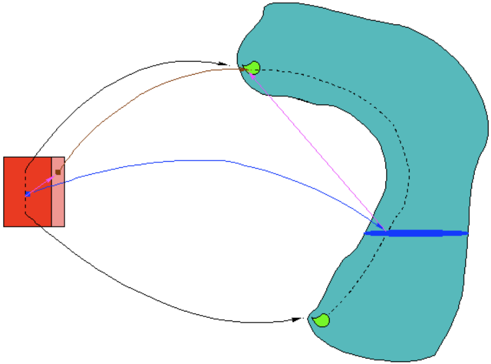
Nécessité de la convexité



Nécessité de la convexité

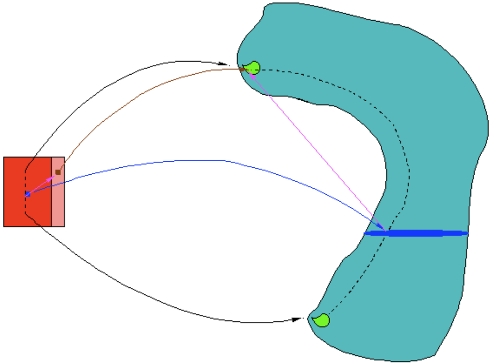


Nécessité de la convexité



T gradient d'une fonction convexe

Nécessité de la convexité



T gradient d'une fonction convexe $\Longrightarrow \langle y-x, T(y)-T(x)\rangle \geq 0$!!!

Théorie de la régularité de Caffarelli

Si μ_0 et μ_1 sont associées à des densités f_0, f_1 par rapport à Lebesgue. Alors

$$T_\sharp \mu_0 = \mu_1 \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \zeta\big(T(x)\big) f_0(x) dx = \int_{R^n} \zeta(y) f_1(y) dy \quad \forall \zeta.$$

$\rightsquigarrow$ φ solution faible de l'**équation de Monge-Ampère** :

$$\det\left(\nabla^2 \psi(x)\right) = \frac{f_0(x)}{f_1(\nabla \psi(x))}.$$

Théoreme (Caffarelli '90s)

Soit Ω_0, Ω_1 des ouverts bornés connexes de $\mathbb{R}^n$ et f_0, f_1 des densités de probabilité sur Ω_0 et Ω_1 telles que $f_0, f_1, 1/f_0$ et $1/f_1$ sont bornées. Si μ_0 et μ_1 ont pour densités f_0 et f_1 par rapport à la mesure de Lebesgue et si Ω_1 est convexe, alors le transport optimal quadratique entre μ_0 et μ_1 est continu.

Le théorème de McCann

Étant données deux mesures de probabilité μ_0 et μ_1 sur M, on s'intéresse aux applications de transport $T : M \longrightarrow M$ ($T_\sharp \mu_0 = \mu_1$) qui minimisent le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Le théorème de McCann

Étant données deux mesures de probabilité μ_0 et μ_1 sur M, on s'intéresse aux applications de transport $T : M \rightarrow M$ ($T_\sharp \mu_0 = \mu_1$) qui minimisent le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Théoreme (McCann '01)

*Si μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale transportant μ_0 sur μ_1. En fait, il existe une fonction c-**convexe** $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$T(x) = \exp_x(\nabla\varphi(x)) \qquad \mu_0 \ p.p. \ x \in \mathbb{R}^n.$$

De plus, $\nabla\varphi(x)$ est dans le domaine d'injectivité en x.

Exponentielle et domaine d'injectivité

Soit $x \in M$ fixé.

- Pour tout $v \in T_x M$, on définit l'**exponentielle** de v par

$$\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1),$$

où $\gamma_{x,v} : [0,1] \longrightarrow M$ est l'unique géodésique partant de x avec vitesse v.

Exponentielle et domaine d'injectivité

Soit $x \in M$ fixé.

- Pour tout $v \in T_x M$, on définit l'**exponentielle** de v par

$$\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1),$$

  où $\gamma_{x,v} : [0,1] \longrightarrow M$ est l'unique géodésique partant de x avec vitesse v.

- On appelle **domaine d'injectivité** de x, le sous-ensemble de $T_x M$ défini par

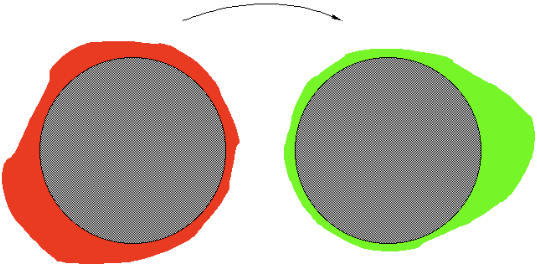
$$\mathcal{I}(x) := \left\{ v \in T_x M \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists t > 1 \text{ t.q. } \gamma_{tv} \text{ est l'unique} \\ \text{géod. minim. entre } x \text{ et } \exp_x(tv) \end{array} \right\}.$$

  C'est un ouvert borné étoilé (par rapport à $0 \in T_x M$) à bord Lipschitz.

La propriété TCP

On dira que la surface compacte $M \subset \mathbb{R}^n$ vérifie **TCP** (pour Transport Continuity Property) si la propriété suivante est satisfaite :

La propriété TCP



Pour toute paire de mesures de probabilité μ_0, μ_1 associées à des **densités continues strictement positives** ρ_0, ρ_1, c'est à dire

$$\mu_0 = \rho_0 \mathrm{vol}_g, \quad \mu_1 = \rho_1 \mathrm{vol}_g,$$

l'application de transport optimale quadratique entre μ_0 et μ_1 est **continue**.

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface compacte lisse dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Tous les domaines d'injectivités sont convexes.*
- *Le coût $c = \frac{1}{2}d^2$ est régulier, c'est à dire pour tous $x, x' \in M$, la fonction*

$$F_{x,x'} \, : \, v \in \mathcal{I}(x) \longmapsto c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$$

  est **quasi-convexe** *(ses sous-ensembles de niveau sont toujours convexes).*

Lemme facile

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Supposons que pour tout $v \in U$ et tout $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la propriété suivante est vérifiée :

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \implies \langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle > 0.$$

Alors F est quasi-convexe.

Preuve du lemme

Proof.

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$, pour tout $t \in [0,1]$. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t \in [0,1]} h(t) > \max\{h(0), h(1)\}.$$

On a

$$\dot{h}(\tau) = \langle \nabla_{v_\tau} F, \dot{v}_\tau \rangle \quad \text{et} \quad \ddot{h}(\tau) = \langle \nabla^2_{v_\tau} F \, \dot{v}_\tau, \dot{v}_\tau \rangle.$$

Comme τ est un maximum local, on a $\dot{h}(\tau) = 0$.
Contradiction !! $\square$

Exercices

Lemme faux

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert convexe et* $F : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Supposons que pour tout* $v \in U$ *et tout* $w \in \mathbb{R}^n$ *la propriété suivante est vérifiée :*

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \implies \langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle \geq 0.$$

Alors F *est quasi-convexe.*

Lemme vrai

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert convexe et* $F : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Si il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle \geq -C \left| \langle \nabla_v F, w \rangle \right| |w| \qquad \forall v \in U, \forall w \in \mathbb{R}^n,$$

alors F *est quasi-convexe.*

Retour à notre problème

Supposons que tous les domaines d'injectivités de M sont convexes. Rappel :

$$F_{x,x'}(v) = F(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big).$$

Retour à notre problème

Supposons que tous les domaines d'injectivités de M sont convexes. Rappel :

$$F_{x,x'}(v) = F(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big).$$

- F n'est pas lisse !

Retour à notre problème

Supposons que tous les domaines d'injectivités de M sont convexes. Rappel :

$$F_{x,x'}(v) = F(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big).$$

- F n'est pas lisse !
- Pour des segments génériques, la fonction $t \mapsto F(v_t)$ est lisse en dehors d'un ensemble fini de points "convexes".

Retour à notre problème

Supposons que tous les domaines d'injectivités de M sont convexes. Rappel :

$$F_{x,x'}(v) = F(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big).$$

- F n'est pas lisse !
- Pour des segments génériques, la fonction $t \mapsto F(v_t)$ est lisse en dehors d'un ensemble fini de points "convexes".
- Si lisse en v, alors $\nabla_v^2 F$ a la forme

$$\nabla_v^2 F(h,h) = -\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^4 c}{\partial^2 x \partial^2 y}(*)(*)\,dt.$$

Le tenseur de Ma-Trudinger-Wang

Le tenseur **MTW**, noté $\mathfrak{S}$, est défini par

$$\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) = -\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\,\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\, c\left(\exp_x(t\xi), \exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tous $x \in M$, $v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$.

Proposition (Villani '09, Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface dont tous les domaines d'injectivité sont convexes. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Le coût $c = d^2/2$ est régulier.*
- *Le tenseur **MTW** est $\succeq 0$, c'est à dire, pour tous $x \in M$, $v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$,*

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) \geq 0.$$

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *ssi les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Tous les domaines d'injectivités sont convexes.*
- $\mathfrak{S} \succeq 0$.

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *ssi les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Tous les domaines d'injectivités sont convexes.*
- $\mathfrak{S} \succeq 0$.

D'après une observation dûe à Loeper, pour tout $x \in M$ et pour toute paire de vecteurs tangents unitaires orthogonaux $\xi, \eta \in T_x M$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x,$$

où σ_x désigne la courbure de Gauss de M en x. Donc

$$\textbf{TCP} \Longrightarrow \sigma \geq 0.$$

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *ssi les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *Tous les domaines d'injectivités sont convexes.*
- $\mathfrak{S} \succeq 0$.

D'après une observation dûe à Loeper, pour tout $x \in M$ et pour toute paire de vecteurs tangents unitaires orthogonaux $\xi, \eta \in T_x M$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x,$$

où σ_x désigne la courbure de Gauss de M en x. Donc

$$\textbf{TCP} \Longrightarrow \sigma \geq 0.$$

En particulier, si $M \subset \mathbb{R}^3$ vérifie **TCP**, alors elle borde un ouvert **convexe**.

Exemples et contre-exemples

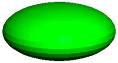
Exemples :

- Les tores plats (Cordero-Erausquin, 1999).
- Les sphères rondes (Loeper, 2006).
- Les quotients des objets ci-dessus.

Exemples :

- Les tores plats (Cordero-Erausquin, 1999).
- Les sphères rondes (Loeper, 2006).
- Les quotients des objets ci-dessus.

Contre-exemples :

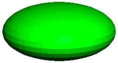


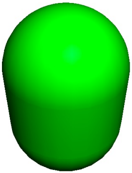
Exemples et contre-exemples

Exemples :

- Les tores plats (Cordero-Erausquin, 1999).
- Les sphères rondes (Loeper, 2006).
- Les quotients des objets ci-dessus.

Contre-exemples :





Sphères

Theorem (Loeper '06)

Le tenseur **MTW** *sur la sphère (unité) ronde* $\mathbb{S}^2$ *vérifie en fait* $\mathfrak{S} \succeq 1$*, c'est à dire pour tous* $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x)$ *et* $\xi, \eta \in T_x\mathbb{S}^2$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \Longrightarrow \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq |\xi|^2 |\eta|^2.$$

En particulier, la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ *vérifie* **TCP**.

Sphères

Theorem (Loeper '06)

Le tenseur **MTW** *sur la sphère (unité) ronde* $\mathbb{S}^2$ *vérifie en fait* $\mathfrak{S} \succeq 1$*, c'est à dire pour tous* $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x)$ *et* $\xi, \eta \in T_x\mathbb{S}^2$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq |\xi|^2 |\eta|^2.$$

En particulier, la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ *vérifie* **TCP**.

Ce résultat est-il stable ?

Problèmes

Deux problèmes à gérer

- Stabilité de la convexité (uniforme) des domaines d'injectivité.

Problèmes

Deux problèmes à gérer

- Stabilité de la convexité (uniforme) des domaines d'injectivité.
- Stabilité de condition du type $\mathfrak{S} \succeq K$ avec $K > 0$.

Problèmes

Deux problèmes à gérer

- Stabilité de la convexité (uniforme) des domaines d'injectivité.
- Stabilité de condition du type $\mathfrak{S} \succeq K$ avec $K > 0$.

  Sur $\mathbb{S}^2$, le tenseur **MTW** est donné par

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{(x,v)}\left(\xi,\xi^{\perp}\right) \\ &= 3\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\cos(r)}{r\sin(r)}\right]\xi_1^4 + 3\left[\frac{1}{\sin^2(r)} - \frac{r\cos(r)}{\sin^3(r)}\right]\xi_2^4 \\ &\quad + \frac{3}{2}\left[-\frac{6}{r^2} + \frac{\cos(r)}{r\sin(r)} + \frac{5}{\sin^2(r)}\right]\xi_1^2\xi_2^2,\end{aligned}$$

  avec
  $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x), r := |v|, \xi = (\xi_1,\xi_2), \xi^{\perp} = (-\xi_2,\xi_1).$

Transport de masse sur la Terre

Théoreme (Figalli-R '09)

Une petite perturbation de la sphère ronde $\mathbb{S}^2$ *en topologie* C^5 *vérifie* $\overline{\mathfrak{S}} \succeq 1/2$, *a des domaines d'injectivité uniformément convexes et donc vérifie* **TCP**.

Merci pour votre attention !!

La dimension supérieure

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse de dimension $n \geq 2$.

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Si (M, g) vérifie **(TCP)**, *alors :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est $\succeq 0$.*

Théoreme (Figalli-R-Villani '10)

Si (M, g) satisfait les deux propriétés suivantes :

- *tous les domaines d'injectivité sont strictement convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est $\succ 0$,*

alors elle vérifie **TCP**.