Combien de temps faut-il à un coureur pour être seul ?

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur

RAMA 12, Adrar (Algérie)
9-12 novembre 2023

Conjecture du coureur solitaire

Si x est un réel, on note $\{x\}$ sa partie fractionnaire, c'est à dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Conjecture du coureur solitaire (Bienia *et al.*, 1998)

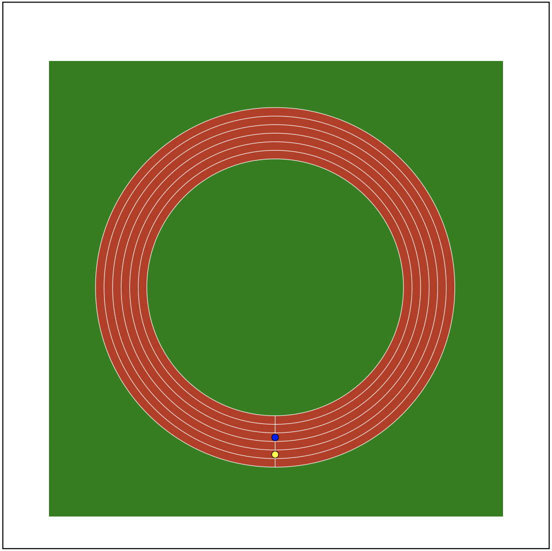
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si

$$x_1, \ldots, x_n \, : \, [0, \infty[\longrightarrow [0, 1[$$

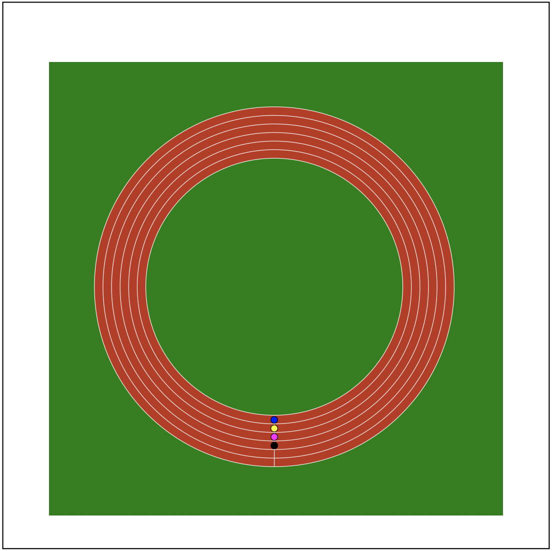
sont n coureurs partant de 0 au temps $t = 0$ avec des vitesses constantes distinctes $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$, c'est à dire tel que $x_i(t) = \{tv_i\}$ pour tous $t \geq 0$, alors pour tout i dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, il existe un réel $t > 0$ tel que

$$|x_j(t) - x_i(t)| \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \qquad \forall j \neq i.$$

Animation pour 2 coureurs



Animation pour 4 coureurs



Pourquoi $1/n$?

Pourquoi $1/n$?

Théorème (Dirichlet, 1842)

Soient α et Q deux nombres réels avec $Q > 1$. Alors il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < Q \quad \textit{et} \quad |\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}.$$

Pourquoi $1/n$?

Théorème (Dirichlet, 1842)

Soient α et Q deux nombres réels avec $Q > 1$. Alors il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < Q \quad \textit{et} \quad |\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}.$$

Démonstration

En se ramenant au cas où Q est entier, on découpe l'intervalle $[0,1]$ en Q intervalles de longueur $1/Q$. Par le principe des tiroirs (de Dirichlet), l'un de ces intervalles contient au moins deux des $Q+1$ points

$$0, 1, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{(Q-1)\alpha\},$$

propriété qui conduit facilement au résultat.

Pourquoi $1/n$?

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n coureurs ayant pour vitesses

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 1, \cdots, \quad v_n = n - 1,$$

alors pour tout $t > 0$, il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < n \quad \text{et} \quad |tq - p| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en prenant $i = q + 1 \geq 2$, on a

$$|tv_i - p| \leq \frac{1}{n}$$

ce qui signifie que

$$|x_i(t) - x_1(t)| = |\{tv_i\}| \notin \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Pourquoi $1/n$?

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n coureurs ayant pour vitesses

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 1, \cdots, \quad v_n = n-1,$$

alors pour tout $t > 0$, il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < n \quad \text{et} \quad |tq - p| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en prenant $i = q + 1 \geq 2$, on a

$$|tv_i - p| \leq \frac{1}{n}$$

ce qui signifie que

$$|x_i(t) - x_1(t)| = |\{tv_i\}| \notin \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right).$$

De plus, on a $|x_i(1/n) - x_1(1/n)| \in [1/n, 1 - 1/n]$ pour tout $i = 2, \ldots, n$.

Vers la conjecture sous forme obstruction

Lemme

Pour tous $\delta \in]0, 1/2], t > 0, v, v' \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|\{tv\} - \{tv'\}| \in [\delta, 1-\delta] \Longleftrightarrow \{t|v'-v|\} \in [\delta, 1-\delta].$$

Par conséquent, la conjecture est vérifiée pour $n \geq 2$ ssi pour tous $w_1, \ldots, w_{n-1} > 0$, il existe $t > 0$ tel que

$$\{tw_i\} \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1,$$

Vers la conjecture sous forme obstruction

Lemme

Pour tous $\delta \in]0,1/2], t>0, v, v' \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\left|\{tv\}-\{tv'\}\right| \in [\delta, 1-\delta] \Longleftrightarrow \{t|v'-v|\} \in [\delta, 1-\delta].$$

Par conséquent, la conjecture est vérifiée pour $n \geq 2$ ssi pour tous $w_1, \ldots, w_{n-1} > 0$, il existe $t>0$ tel que

$$\{tw_i\} \in \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \qquad \forall i = 1, \ldots, n-1,$$

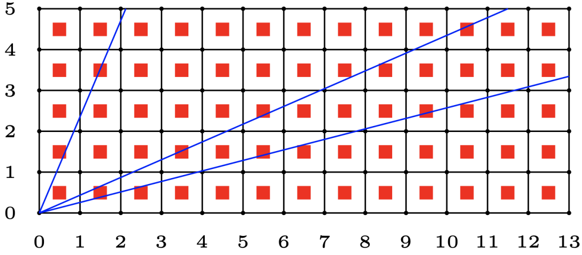
ou en d'autres termes

$$t \cdot (w_1, \ldots, w_{n-1}) \in \mathcal{K}^{n-1}(1/n),$$

avec pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et tous $\delta \in]0,1/2]$

$$\mathcal{K}^m(\delta) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^m} \left(k + [\delta, 1-\delta]^m\right).$$

Conjecture sous forme obstruction



Conjecture du coureur solitaire - Forme obstruction

Pour tout entier $m \geq 1$, pour tous nombres réels $w_1, \ldots, w_m > 0$, il existe $t > 0$ tel que

$$t \cdot (w_1, \ldots, w_m) \in \mathcal{K}^m \left(\frac{1}{m+1} \right).$$

Remarques

Remarques

1. Le résultat est vrai si les vitesses $w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

Remarques

Remarques

1. Le résultat est vrai si les vitesses $w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

2. On peut montrer que la conjecture est vraie si et seulement si elle est vérifiée pour les vitesses rationnelles.

Remarques

Remarques

1. Le résultat est vrai si les vitesses $w_1, \ldots, w_m$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$.

2. On peut montrer que la conjecture est vraie si et seulement si elle est vérifiée pour les vitesses rationnelles.

3. Par conséquent, cela autorise en fait à étudier uniquement le cas de vitesses entières.

Résultats connus

- **3 coureurs** : Wills (1967)
- **4 coureurs** : Betke et Wills (1972), Cusick (1974)
- **5 coureurs** : Cusick et Pomerance (1984) par une preuve assistée par ordinateur, puis Bienia, Goddyn, Gvozdjak, Sebö et Tarsi (1998)
- **6 coureurs** : Bohmann, Holzmann et Kleitman (2001)
- **3-6 coureurs** : Renault (2004)
- **7 coureurs** : Barajas et Serra (2008) par une preuve légerement assistée par ordinateur

La conjecture pour strictement plus de 7 coureurs est ouverte.

Autres types de résultats

- **Hypothèses sur les vitesses** : Ruzsa, Tusa et Voigt (2002), Pandey (2009), Barajas et Serra (2009), Dubickas (2011), Tao (2018)

Autres types de résultats

- **Hypothèses sur les vitesses** : Ruzsa, Tusa et Voigt (2002), Pandey (2009), Barajas et Serra (2009), Dubickas (2011), Tao (2018)

- **Fossé de solitude** : Étant donnés $m+1$ ($m \geq 2$) coureurs donc un statique, on définit la quantité $\tilde{\delta}_m$ comme le supremum des $\delta \in]0, 1/(m+1)]$ tels que

$$\forall w_1, \ldots, w_m > 0, \exists t > 0 \text{ t.q. } t \cdot (w_1, \cdots, w_m) \in \mathcal{K}^m(\delta).$$

Faisant suite à des résultats de Chen (1994, 1999) et Perarnau et Serra (2016), Tao (2018) obtient la borne inférieure suivante pour des grandes valeurs de m,

$$\tilde{\delta}_m \geq \frac{1}{2m} + \frac{c \log m}{m^2 (\log(\log m))^2},$$

pour un certain $c > 0$.

Une question

Peut-on dire quelque chose sur le temps nécessaire à un coureur pour être seul ?

Une question

Peut-on dire quelque chose sur le temps nécessaire à un coureur pour être seul ?

Cas connus : 2 et 3 coureurs

Vers la conjecture sous forme recouvrement

Remarque

La conjecture sous forme obstruction est vraie ssi pour tous $w_1, \ldots, w_m > 0$ tels que

$$1 = w_1 \leq w_2, \ldots, w_m,$$

il existe $\lambda > 0$ qui vérifie

$$\lambda = \lambda w_1 \in \mathcal{K}\left(\frac{1}{m+1}\right) \text{ et } \lambda \cdot (w_2, \ldots, w_m) \in \mathcal{K}^{m-1}\left(\frac{1}{m+1}\right).$$

Vers la conjecture sous forme recouvrement

Remarque

La conjecture sous forme obstruction est vraie ssi pour tous $w_1, \ldots, w_m > 0$ tels que

$$1 = w_1 \leq w_2, \ldots, w_m,$$

il existe $\lambda > 0$ qui vérifie

$$\lambda = \lambda w_1 \in \mathcal{K}\left(\frac{1}{m+1}\right) \text{ et } \lambda\cdot(w_2, \ldots, w_m) \in \mathcal{K}^{m-1}\left(\frac{1}{m+1}\right).$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ et $B \subset]0, \infty[$, on définit

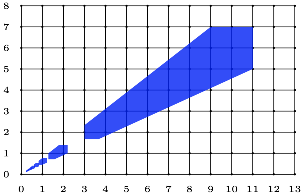
$$A/B = \left\{ \frac{a}{b} = \left(\frac{a_1}{b}, \cdots, \frac{a_d}{b}\right) \mid a = (a_1, \ldots, a_d) \in A, b \in B \right\}.$$

Conjecture du coureur solitaire - Recouvrement

Conjecture du coureur solitaire - Forme recouvrement

Pour tout entier $d \geq 1$, on a

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \delta_d = \frac{1}{d+2}.$$



$$\mathcal{K}_{(2,1)}(\delta_2)/\mathcal{K}(\delta_2)$$

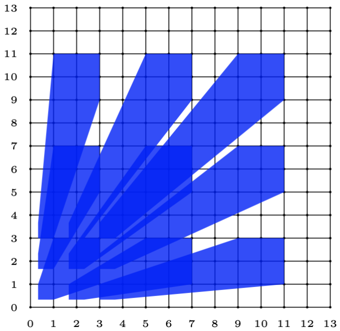
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_{(2,1)}(\delta_2)/\mathcal{K}_k(\delta_2)$$

Rappel : $\mathcal{K}^d(\delta) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^d} \left(k + [\delta, 1-\delta]^d\right)$ et $\mathcal{K}(\delta) = \mathcal{K}^1(\delta)$

Recouvrement en petite dimension

On peut vérifier informatiquement pour $d = 2$ et $d = 3$ que les cubes de la forme $[1, 100]^d$ sont en fait recouverts par les ensembles

$$\mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_0(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_0(\delta_d) = [\delta_d, 1 - \delta_d].$$



Spéculation

L'observation faite en petite dimension suggère peut-être qu'il existe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ un entier $N \geq 1$ tel que

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_k(\delta_d).$$

Spéculation

L'observation faite en petite dimension suggère peut-être qu'il existe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ un entier $N \geq 1$ tel que

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_k(\delta_d).$$

De plus, une telle propriété dirait que pour tous $w_1, \ldots, w_m > 0$ ($m = d+1$) avec $w_1 \leq w_2, \ldots, w_m$, on aurait

$$\left(\frac{w_2}{w_1}, \cdots, \frac{w_m}{w_1}\right) \in [1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$$

et il y aurait donc $t = \lambda\, w_1 \in [0, N/w_1]$ tel que $t \cdot (w_1, \ldots, w_m) \in \mathcal{K}^m(\delta_m)$.

Conjecture du coureur solitaire forte

Conjecture du coureur solitaire forte

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que:

- (Recouvrement) $[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$.

Conjecture du coureur solitaire forte

Conjecture du coureur solitaire forte

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que:

- (Recouvrement) $[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$.
- (Obstruction) Pour tous $w_1, \ldots, w_{d+1} > 0$, $\exists t > 0$ tel que

$$t \leq \frac{N}{\min\{w_1, \ldots, w_{d+1}\}} \text{ et } t \cdot (w_1, \ldots, w_{d+1}) \in \mathcal{K}^{d+1}(\delta_d).$$

Conjecture du coureur solitaire forte

Conjecture du coureur solitaire forte

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que:

- (Recouvrement) $[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$.
- (Obstruction) Pour tous $w_1, \ldots, w_{d+1} > 0$, $\exists t > 0$ tel que

$$t \leq \frac{N}{\min\{w_1, \ldots, w_{d+1}\}} \text{ et } t \cdot (w_1, \ldots, w_{d+1}) \in \mathcal{K}^{d+1}(\delta_d).$$

- (Coureurs) Si $x_1, \ldots, x_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont $n = d + 2$ coureurs avec des vitesses distinctes $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$, à 0 en $t = 0$, alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists t > 0$ tel que

$$t \leq \frac{N}{\min\{|v_i - v_j| \,|\, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}}$$

$$\text{et } |x_j(t) - x_i(t)| \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}.$$

Conjecture du coureur solitaire forte

Rappel : $\delta_d := 1/(d+2)$.

Définition

Pour tout entier $d \geq 1$, on note par N_d le plus petit entier $N \geq 1$ tel que

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d),$$

avec pour convention $N = \infty$ si l'ensemble des $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'inclusion ci-dessus est vide et

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}(\delta_d).$$

Conjecture du coureur solitaire forte

Rappel : $\delta_d := 1/(d+2)$.

Définition

Pour tout entier $d \geq 1$, on note par N_d le plus petit entier $N \geq 1$ tel que

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d),$$

avec pour convention $N = \infty$ si l'ensemble des $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'inclusion ci-dessus est vide et

$$[1,\infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}(\delta_d).$$

Statut de la conjecture en terme de N_d :
$N_d = \infty$ pour $d = 1, 2, 3, 4, 5$ et $N_1 = 1$.

Résultats sur la conjecture forte

Théorème (Rifford, 2021)

On a $N_1 = N_2 = N_3 = 1$, *c'est à dire*

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_0(\delta_d) \quad \textit{pour } d = 1, 2, 3.$$

Théorème (Rifford, 2021)

On a $N_4 = 2$, *c'est à dire*

$$[1, \infty[^4 \subsetneq \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_0(\delta_4)$$

et

$$[1, \infty[^4 \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_{[\![0,1]\!]}(\delta_4).$$

La preuve de ce dernier résultat est assistée par ordinateur.

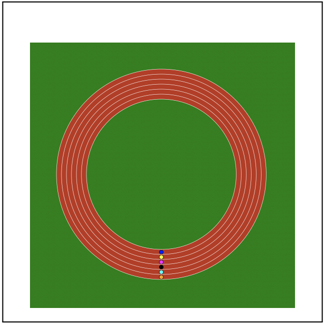
Animation pour 6 coureurs

Si on considère les six coureurs $x_1, \ldots, x_6$ ayant pour vitesses

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 10285, \quad v_3 = 26740,$$

$$v_4 = 35319, \quad v_5 = 46187, \quad v_6 = 61005,$$

alors le coureur x_1 n'est jamais solitaire pendant le premier tour de x_2 mais il le devient pendant le second tour.



Plan de la démonstration

La démonstration pour les cas $d = 3, 4$ se fait en deux étapes :

- **Étape 1 :** On montre que l'inclusion $(d = 3, 4)$

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d\left(\delta_d\right) / \mathcal{K}_0\left(\delta_d\right)$$

est vérifiée à l'infini, c'est à dire hors d'un certain compact P.

Plan de la démonstration

La démonstration pour les cas $d = 3, 4$ se fait en deux étapes :

- **Étape 1 :** On montre que l'inclusion $(d = 3, 4)$

  $$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d\left(\delta_d\right) / \mathcal{K}_0\left(\delta_d\right)$$

  est vérifiée à l'infini, c'est à dire hors d'un certain compact P.

- **Étape 2 :** On vérifie l'inclusion

  $$P \subset \mathcal{K}^d\left(\delta_d\right) / \mathcal{K}_{[\![0, N-1]\!]}\left(\delta_d\right),$$

  avec $N = 1$ pour $d = 3$ et $N = 2$ pour $d = 4$.

Étape 1

Proposition

Pour tout $(z_1, \ldots, z_d) \in [1, \infty[^d$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(z_1, \ldots, z_d) \in \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_0(\delta_d)$.

(ii) $\mathcal{K}_0(\delta_d) \cap \left(\cap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i\right) \neq \emptyset$.

(iii) $\mathcal{P}^d(z_1, \ldots, z_d) \cap \mathbb{N}^d \neq \emptyset$, *où* $\mathcal{P}^d(z_1, \ldots, z_d) \subset \mathbb{R}^d$ *est le polytope convexe correspondant à l'ensemble des* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ *tels que*

$$\delta_d z_i + \delta_d - 1 \leq \lambda_i \leq (1 - \delta_d) z_i - \delta \quad \forall i = 1, \ldots, d$$

$$\text{et } \lambda_j z_i - \lambda_i z_j \geq (\delta_d - 1) z_i + \delta_d z_j \quad \forall i, j = 1, \ldots, d \text{ t.q. } i \neq j.$$

Étape 1

Proposition

Pour tout $(z_1, \ldots, z_d) \in [1, \infty[^d$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(z_1, \ldots, z_d) \in \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_0(\delta_d)$.

(ii) $\mathcal{K}_0(\delta_d) \cap \left(\cap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i\right) \neq \emptyset$.

(iii) $\mathcal{P}^d(z_1, \ldots, z_d) \cap \mathbb{N}^d \neq \emptyset$*, où* $\mathcal{P}^d(z_1, \ldots, z_d) \subset \mathbb{R}^d$ *est le polytope convexe correspondant à l'ensemble des* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ *tels que*

$$\delta_d z_i + \delta_d - 1 \leq \lambda_i \leq (1 - \delta_d) z_i - \delta \quad \forall i = 1, \ldots, d$$

$$\text{et } \lambda_j z_i - \lambda_i z_j \geq (\delta_d - 1) z_i + \delta_d z_j \quad \forall i, j = 1, \ldots, d \text{ t.q. } i \neq j.$$

On reconnait dans (iii) un énoncé à la Minkowski.

Étape 1

Si l'inclusion désirée n'est pas vrai à l'infini, alors il existe $(z_1, \ldots, z_d) \in [1, \infty[^d$ tel que

$$1 < z_1 < z_2 < \cdots < z_d$$

$$\text{et} \quad \mathcal{K}_0(\delta_d) \cap \left(\cap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i \right) = \emptyset.$$

Étape 1

Si l'inclusion désirée n'est pas vrai à l'infini, alors il existe $(z_1, \ldots, z_d) \in [1, \infty[^d$ tel que

$$1 < z_1 < z_2 < \cdots < z_d$$

$$\text{et} \quad \mathcal{K}_0(\delta_d) \cap \left(\cap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i\right) = \emptyset.$$

Si on définit $\mathcal{B}(\delta_d)$ comme le complémentaire de $\mathcal{K}(\delta_d)$ c'est à dire par

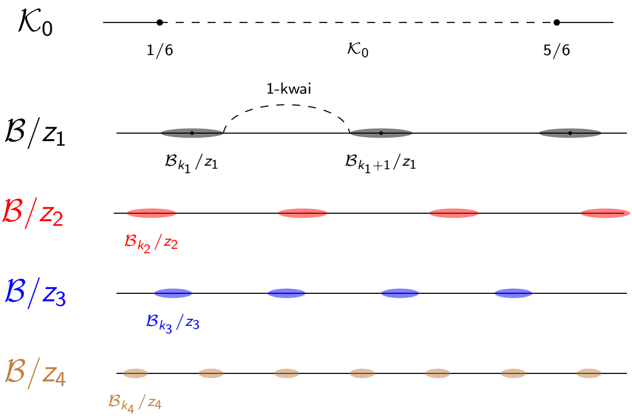
$$\mathcal{B}(\delta_d) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}_k(\delta_d) = (k - \delta_d, k + \delta_d),$$

alors la deuxième propriété s'écrit

$$\mathcal{K}_0(\delta_d) \subset \bigcup_{i=1}^d \mathcal{B}(\delta_d)/z_i.$$

Étape 1

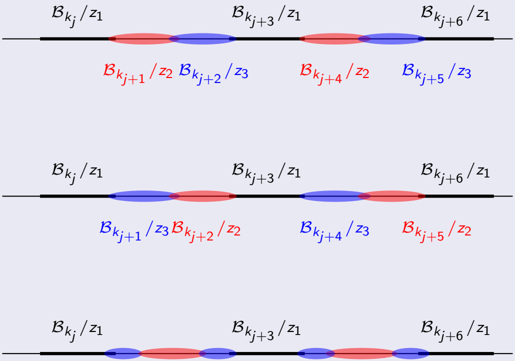
Illustration de $\mathcal{K}_0 \subset \bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{B}/z_i$



Étape 1 ($d = 3$)

Lemme ($d = 3$)

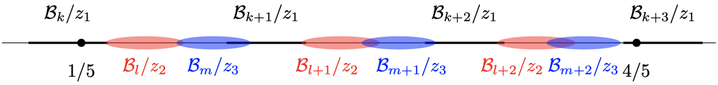
Les seules manières de recouvrir deux 1-kwais consécutifs par des 2 et 3-bridges sont les suivantes :



Étape 1 ($d = 3$)

Lemme ($d = 3$)

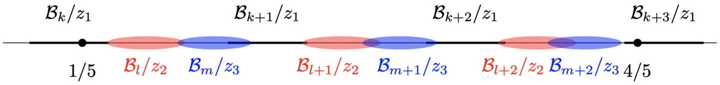
Si $z_1 \geq 7/2$ alors le nombre de 1-kwais consécutifs inclus dans $\mathcal{K}_0$ permet d'obtenir une contradiction.



Étape 1 ($d = 3$)

Lemme ($d = 3$)

Si $z_1 \geq 7/2$ alors le nombre de 1-kwais consécutifs inclus dans $\mathcal{K}_0$ permet d'obtenir une contradiction.



On en déduit facilement que la propriété de recouvrement désirée est vérifiée hors d'un compact.

Étape 1 ($d = 4$)

Notons $\mathcal{S}^4$ l'ensemble des $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$1 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4.$$

Proposition

On a

$$\mathcal{S}^4 \setminus P \subset \mathcal{K}^4 / \mathcal{K}_0,$$

où $P \subset \mathcal{S}^4$ est le compact des points $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5z_1 & \leq & 47 \\ 2z_2 & \leq & 5z_1 \\ z_2 z_3 + z_1 z_3 & \leq & 8 z_1 z_2 \\ z_3 z_4 + z_2 z_4 & \leq & 10 z_2 z_3. \end{array} \right.$$

Étape 1 ($d = 4$)

L'ensemble des chaines possibles pouvant recouvrir un 1-kwai est le suivant :

$$\mathcal{L} = \{[12341], [12431], [124341], [13241], [132341], [132431], [1324341], [14231], [142341], [142431], [1424341], [13421], [134231], [1342341], [134241], [1342431], [13424341], [14321], [143231], [1432341], [143241], [1432431], [14324341], [143421], [1434231], [14342341], [1434241], [14342431], [143424341]\}.$$

Étape 1 ($d = 4$)

L'ensemble des chaines possibles pouvant recouvrir un 1-kwai est le suivant :

$$\mathcal{L} = \{[12341], [12431], [124341], [13241], [132341], [132431], [1324341], [14231], [142341], [142431], [1424341], [13421], [134231], [1342341], [134241], [1342431], [13424341], [14321], [143231], [1432341], [143241], [1432431], [14324341], [143421], [1434231], [14342341], [1434241], [14342431], [143424341]\}.$$

Attention, il faut tenir compte des paramètres !!

Étape 1 ($d = 4$)

Lemme

L'ensemble des 1-chaines faibles admissibles de longueur 1 est donné par :

1	$\langle 234\|000\rangle$	
2	$\langle 243\|000\rangle$	
3	$\langle 324\|000\rangle$	
4	$\langle 342\|000\rangle$	
5	$\langle 423\|000\rangle$	
6	$\langle 432\|000\rangle$	
7	$\langle 2434\|0001\rangle$	
8	$\langle 3234\|0010\rangle$	
9	$\langle 3243\|0001\rangle$	
10-12	$\langle 4234\|000a\rangle$	$a \in \{1,2,3\}$
13-14	$\langle 4243\|00a0\rangle$	$a \in \{1,2\}$
15	$\langle 4323\|0001\rangle$	
16	$\langle 3423\|0001\rangle$	
17-19	$\langle 4324\|000a\rangle$	$a \in \{1,2,3\}$
20-21	$\langle 3424\|000a\rangle$	$a \in \{1,2\}$
22	$\langle 4342\|0010\rangle$	
23	$\langle 32434\|00011\rangle$	
24	$\langle 42434\|00102\rangle$	
25-27	$\langle 34234\|0001a\rangle$	$a \in \{1,2,3\}$
28-29	$\langle 34243\|000a1\rangle$	$a \in \{1,2\}$
30-32	$\langle 43234\|0001a\rangle$	$a \in \{2,3,4\}$
33-35	$\langle 43243\|000a1\rangle$	$a \in \{1,2,3\}$
36	$\langle 43423\|00101\rangle$	
37	$\langle 43424\|00102\rangle$	
38	$\langle 342434\|000213\rangle$	
39-40	$\langle 432434\|000a1\bar{a}\rangle$	$a \in \{2,3\}$
41-42	$\langle 434234\|00101a\rangle$	$a \in \{3,4\}$
43	$\langle 434243\|001031\rangle$	
44	$\langle 4342434\|0010314\rangle$	

Étape 1 ($d = 4$)

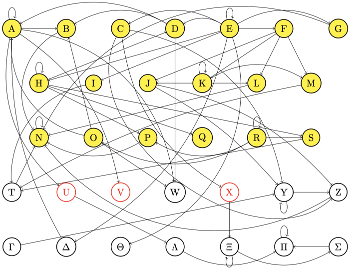
Exemple : Pour trouver les 1-chaines faibles de la forme $\langle 2434|000a\rangle$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, il faut trouver les valeurs de a pour lesquelles le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & < & 1 - 3h_2 \\ 0 & < & -1 + 3h_4 \\ 0 & < & \rho_2 + 3h_2 - 3h_4 \\ 0 & < & -\rho_2 - 3h_2 + 3h_3 \\ 0 & < & \rho_4 - 3h_3 + 3h_4 \\ 0 & < & \rho_3 - 3a\rho_4 + 3h_3 - 3h_4 \\ 0 & < & 3 - \rho_3 - 3h_3 \\ 0 & < & -3 + (3a+1)\rho_4 + 3h_4 \end{array}\right.$$

admet des solutions dans $\mathbb{R}^6$. On peut vérifier cela facilement avec **Sage**.

Il s'agit ensuite d'étudier la dynamique des 1-chaines faibles.

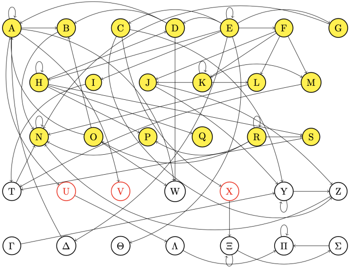
A	$\langle 342 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
B	$\langle 342 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1314 \rangle$	
C	$\langle 432 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 2, 3, 5, 7, 8$
D	$\langle 432 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 3, 4, 5$
E	$\langle 432 \shortmid 432 \vert 000 \shortmid a11 \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
F	$\langle 432 \shortmid 4324 \vert 000 \shortmid a11b \rangle$	$(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 8)$
G	$\langle 432 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1415 \rangle$	
H	$\langle 432 \shortmid 4342 \vert 000 \shortmid a1\bar{a}1 \rangle$	$a = 2, 3, 4$
I	$\langle 432 \shortmid 43424 \vert 000 \shortmid 31415 \rangle$	
J	$\langle 4324 \shortmid 324 \vert 000a \shortmid 11b \rangle$	$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (3, 8)$
K	$\langle 4324 \shortmid 4324 \vert 0002 \shortmid 3115 \rangle$	
L	$\langle 4324 \shortmid 3424 \vert 0002 \shortmid 1415 \rangle$	
M	$\langle 4324 \shortmid 43424 \vert 0002 \shortmid 31415 \rangle$	
N	$\langle 3424 \shortmid 3424 \vert 0001 \shortmid 1314 \rangle$	
O	$\langle 4342 \shortmid 342 \vert 0010 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 3, 4, 5$
P	$\langle 4342 \shortmid 3424 \vert 0010 \shortmid 1415 \rangle$	
Q	$\langle 4342 \shortmid 3424 \vert 0010 \shortmid 1a1\bar{a} \rangle$	$a = 3, 5$
R	$\langle 4342 \shortmid 4342 \vert 0010 \shortmid 3141 \rangle$	
S	$\langle 4342 \shortmid 43424 \vert 0010 \shortmid 31415 \rangle$	
T	$\langle 43424 \shortmid 3424 \vert 00102 \shortmid 1415 \rangle$	
U	$\langle 342 \shortmid 423 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
V	$\langle 342 \shortmid 3423 \vert 000 \shortmid 1112 \rangle$	
W	$\langle 342 \shortmid 3424 \vert 0001 \shortmid 1a1b \rangle$	$(a, b) = (2, 3), (4, 5), (5, 7)$
X	$\langle 324 \shortmid 243 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
Y	$\langle 324 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
Z	$\langle 324 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1213 \rangle$	
Γ	$\langle 432 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 4, 6$
Δ	$\langle 432 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 2, 6$
Θ	$\langle 432 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1a1\bar{a} \rangle$	$a = 2, 3, 5$
Λ	$\langle 423 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
Ξ	$\langle 243 \shortmid 243 \vert 000 \shortmid 111 \rangle$	
Π	$\langle 234 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 1, 2$
Σ	$\langle 243 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	



Étape 1 ($d = 4$)

Il s'agit ensuite d'étudier la dynamique des 1-chaines faibles.

A	$\langle 342 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
B	$\langle 342 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1314 \rangle$	
C	$\langle 432 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 2, 3, 5, 7, 8$
D	$\langle 432 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 3, 4, 5$
E	$\langle 432 \shortmid 432 \vert 000 \shortmid a11 \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
F	$\langle 432 \shortmid 4324 \vert 000 \shortmid a11b \rangle$	$(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 8)$
G	$\langle 432 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1415 \rangle$	
H	$\langle 432 \shortmid 4342 \vert 000 \shortmid a1\bar{a}1 \rangle$	$a = 2, 3, 4$
I	$\langle 432 \shortmid 43424 \vert 000 \shortmid 31415 \rangle$	
J	$\langle 4324 \shortmid 324 \vert 000a \shortmid 11b \rangle$	$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (3, 8)$
K	$\langle 4324 \shortmid 4324 \vert 0002 \shortmid 3115 \rangle$	
L	$\langle 4324 \shortmid 3424 \vert 0002 \shortmid 1415 \rangle$	
M	$\langle 4324 \shortmid 43424 \vert 0002 \shortmid 31415 \rangle$	
N	$\langle 3424 \shortmid 3424 \vert 0001 \shortmid 1314 \rangle$	
O	$\langle 4342 \shortmid 342 \vert 0010 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 3, 4, 5$
P	$\langle 4342 \shortmid 3424 \vert 0010 \shortmid 1415 \rangle$	
Q	$\langle 4342 \shortmid 3424 \vert 0010 \shortmid 1a1\bar{a} \rangle$	$a = 3, 5$
R	$\langle 4342 \shortmid 4342 \vert 0010 \shortmid 3141 \rangle$	
S	$\langle 4342 \shortmid 43424 \vert 0010 \shortmid 31415 \rangle$	
T	$\langle 43424 \shortmid 3424 \vert 00102 \shortmid 1415 \rangle$	
U	$\langle 342 \shortmid 423 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
V	$\langle 342 \shortmid 3423 \vert 000 \shortmid 1112 \rangle$	
W	$\langle 342 \shortmid 3424 \vert 0001 \shortmid 1a1b \rangle$	$(a, b) = (2, 3), (4, 5), (5, 7)$
X	$\langle 324 \shortmid 243 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
Y	$\langle 324 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
Z	$\langle 324 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1213 \rangle$	
Γ	$\langle 432 \shortmid 324 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 4, 6$
Δ	$\langle 432 \shortmid 342 \vert 000 \shortmid 1a1 \rangle$	$a = 2, 6$
Θ	$\langle 432 \shortmid 3424 \vert 000 \shortmid 1a1\bar{a} \rangle$	$a = 2, 3, 5$
Λ	$\langle 423 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	
Ξ	$\langle 243 \shortmid 243 \vert 000 \shortmid 111 \rangle$	
Π	$\langle 234 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 11a \rangle$	$a = 1, 2$
Σ	$\langle 243 \shortmid 234 \vert 000 \shortmid 112 \rangle$	



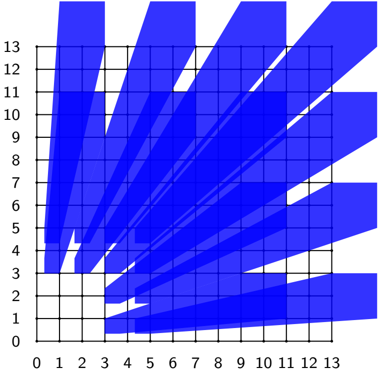
On conclut par un argument de décalage des bridges comme dans le cas $d = 3$.

Étape 2

On vérifie l'inclusion

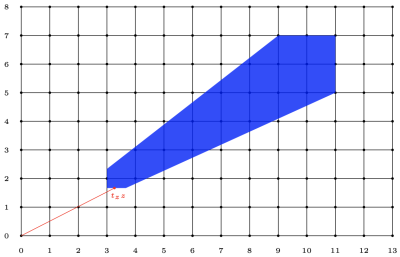
$$P \subset \mathcal{K}^d\left(\delta_d\right)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}\left(\delta_d\right),$$

avec $N = 1$ pour $d = 3$ et $N = 2$ pour $d = 4$, sachant que la propriété de recouvrement est vérifiée hors de P.

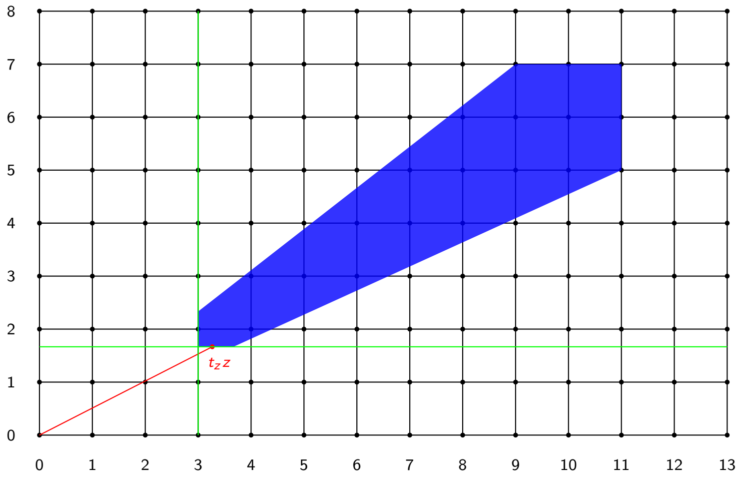


Étape 2

Si la propriété de recouvrement n'est pas vérifiée sur le compact P, alors il existe un bout de rayon qui n'est pas recouvert et qui vient taper une feuille sur l'une de ses faces inférieures.



Étape 2



Étape 2

Notons par $\mathfrak{S}_d$ l'ensemble des permutations sur $\{1,\ldots,d\}$ et étant donné un compact $P \subset \mathcal{S}^d$, posons

$$\mathfrak{S}_d(P) := \left\{ \left(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(d)}\right) \,|\, (z_1,\ldots,z_d) \in P,\, \sigma \in \mathfrak{S}_d \right\}.$$

De plus, notons $\mathbb{I}$ l'ensemble des unions disjointes de familles finies d'intervalles compacts de $\mathbb{R}$ et si $A \in \mathbb{I}$ est l'union disjointe des intervalles $[a_l, b_l] \subset \mathbb{R}$ avec $l = 1,\ldots,L$, alors on définit les ensembles A^-, A^+ et $A^>$ par

$$A^- := \left\{ a_l \,|\, l = 1,\ldots,L \right\}, \quad A^+ := \left\{ b_l \,|\, l = 1,\ldots,L \right\}$$

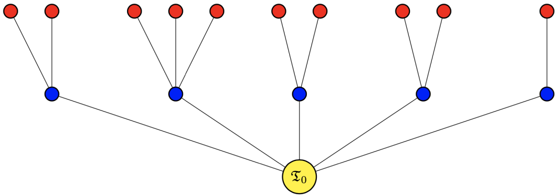
et

$$A^> := \bigcup_{l=1,\ldots,L}]a_l, b_l],$$

avec la convention $]a_l, b_l] = \emptyset$ si $a_l = b_l$.

Étape 2

Rappelons qu'on appelle *arbre enraciné* (rooted tree) tout arbre dans lequel un sommet spécial a été spécifié, on appelle ce sommet *racine* ou 0-*enfant*. Étant donné un arbre enraciné $\mathfrak{T}$ avec racine $\mathfrak{T}_0$, on appelle l-*enfant* ($l \in \mathbb{N}$) tout sommet de l'arbre situé à distance l de $\mathfrak{T}_0$.



Étape 2

Nous allons travailler avec des arbres enracinés dont les sommets vivent dans $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$. Étant donné un d-enfant $(z, \mathfrak{K})$, on définit sa $\mathbb{R}$-*ascendance* par

$$\mathrm{Anc}_{\mathbb{R}}(z, \mathfrak{K}) := (z_1, \cdots, z_{d-1}, z),$$

où $z_1, \ldots, z_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ sont associés à $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{d-1} \in \mathbb{I}$ de telle manière que chaque $(z_i, \mathfrak{K}_i)$ est un i-enfant (avec $i = 1, \ldots, d-1$) et les arêtes de $\mathfrak{T}_0$ à $(z, \mathfrak{K})$ passant par les sommets $(z_1, \mathfrak{K}_1), \ldots, (z_{d-1}, \mathfrak{K}_{d-1})$ connectent $\mathfrak{T}_0$ à $(z, \mathfrak{K})$.

Étape 2

Nous allons travailler avec des arbres enracinés dont les sommets vivent dans $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$. Étant donné un d-enfant $(z, \mathfrak{K})$, on définit sa $\mathbb{R}$-*ascendance* par

$$\mathrm{Anc}_{\mathbb{R}}(z, \mathfrak{K}) := (z_1, \cdots, z_{d-1}, z),$$

où $z_1, \ldots, z_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ sont associés à $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{d-1} \in \mathbb{I}$ de telle manière que chaque $(z_i, \mathfrak{K}_i)$ est un i-enfant (avec $i = 1, \ldots, d-1$) et les arêtes de $\mathfrak{T}_0$ à $(z, \mathfrak{K})$ passant par les sommets $(z_1, \mathfrak{K}_1), \ldots, (z_{d-1}, \mathfrak{K}_{d-1})$ connectent $\mathfrak{T}_0$ à $(z, \mathfrak{K})$.

Fixons $d, N \in \mathbb{N}^*$, $C > 1$ et $P \subset \mathcal{S}^d$ un ensemble compact tel que

$$P \subset \mathcal{C} := [1, C]^d \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^d \setminus P \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d).$$

Étape 2

Proposition

Soit $\mathfrak{T}$ *l'arbre enraciné à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$ *défini par*

$$\mathfrak{T}_0 := (1, \mathfrak{K}_0) \quad \textit{avec} \quad \mathfrak{K}_0 := \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$$

et tel que l'ensemble des enfants d'un i-enfant $(z, \mathfrak{K})$ *(avec* $i \in \{0, \ldots, d-1\}$*) est donné par l'ensemble des* $(z', \mathfrak{K}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{I}$ *tels que*

$$z' \in \left(\mathcal{K}^-(\delta_d)/\mathfrak{K}^+\right) \cap]1, C] \text{ et } \mathfrak{K}' := Clos\left(\mathfrak{K} \cap \mathcal{K}^>(\delta_d)/z'\right).$$

Étape 2

Proposition

Soit $\mathfrak{T}$ *l'arbre enraciné à valeurs dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$ *défini par*

$$\mathfrak{T}_0 := (1, \mathfrak{K}_0) \quad avec \quad \mathfrak{K}_0 := \mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$$

et tel que l'ensemble des enfants d'un i-enfant $(z, \mathfrak{K})$ *(avec* $i \in \{0, \ldots, d-1\}$*) est donné par l'ensemble des* $(z', \mathfrak{K}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{I}$ *tels que*

$$z' \in \left(\mathcal{K}^{-}(\delta_d)/\mathfrak{K}^{+}\right) \cap]1, C] \text{ et } \mathfrak{K}' := Clos\left(\mathfrak{K} \cap \mathcal{K}^{>}(\delta_d)/z'\right).$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $[1, \infty)^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{[\![0,N-1]\!]}(\delta_d)$.

(ii) *Pour tout d-enfant* $(z, \mathfrak{K})$ *de* $\mathfrak{T}$ *tel que* $Anc_{\mathbb{R}}(z, \mathfrak{K}) \in \mathfrak{S}_d(P)$, *on a* $\mathfrak{K} \neq \emptyset$.

Étape 2 ($d = 4$)

Un programme en C++ permet de montrer que le compact $P \subset \mathcal{S}^4$ défini comme l'ensemble des points $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5z_1 & \leq & 47 \\ 2z_2 & \leq & 5z_1 \\ z_2 z_3 + z_1 z_3 & \leq & 8 z_1 z_2 \\ z_3 z_4 + z_2 z_4 & \leq & 10 z_2 z_3 \end{array} \right.$$

vérifie

$$[1, \infty[^4 \setminus \left(P \setminus]1, 31/5[^4 \right) \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_0(\delta_4)$$

$$\text{et} \quad [1, 31/5]^4 \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_{[\![0,1]\!]}(\delta_4).$$

Le temps requis pour ce calcul sur un MacBook Pro (2,6GHz) est d'à peu près 9 heures.

Merci pour votre attention !!