

# Sur quelques problèmes de géométrie sous-riemannienne

Ludovic Rifford

Université de Nice Sophia Antipolis  
&

Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA)

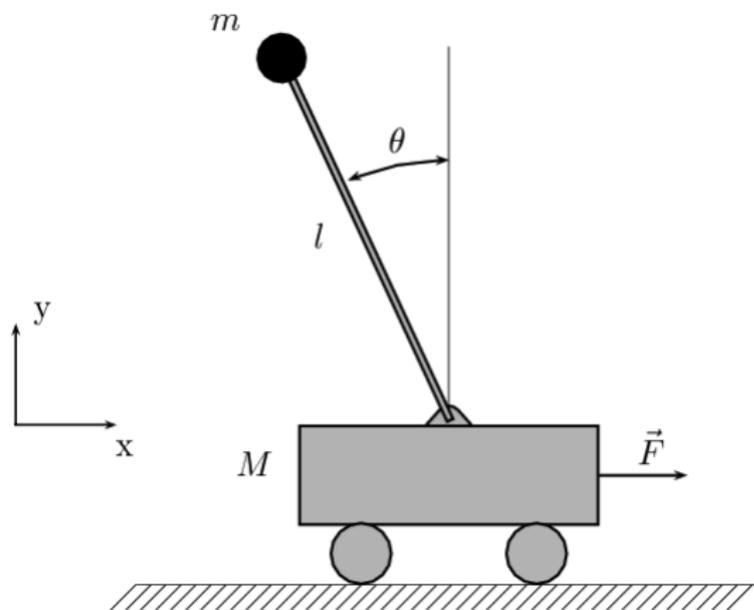
11ème Rencontre d'Analyse Mathématique et Applications  
Sidi Bel Abbès, Algérie, Novembre 2019

## Plan de l'exposé

- I. Introduction à la géométrie sous-riemannienne
- II. Quelques problèmes ouverts
- III. Quelques résultats partiels

## I. Introduction à la géométrie sous-riemannienne

# Contrôle du pendule inversé



# Théorie géométrique du contrôle

Un système de contrôle, ou système commandé, général a la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{où}$$

- $x$  est l'état du système dans un certain espace  $M$
- $u$  est le contrôle dans un certain ensemble  $U$

# Théorie géométrique du contrôle

Un système de contrôle, ou système commandé, général a la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{où}$$

- $x$  est l'état du système dans un certain espace  $M$
- $u$  est le contrôle dans un certain ensemble  $U$

## Proposition

*Sous des hypothèses classiques, pour tout  $x \in M$  et tout contrôle mesurable  $u : [0, T] \rightarrow U$  le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & p.p. \ t \in [0, T], \\ x(0) = x \end{cases}$$

*admet une solution unique  $x(\cdot) = x(\cdot; x, u) : [0, T] \rightarrow M$ .*

# Problèmes de controlabilité et d'optimalité

**Problème de controlabilité :** Étant donnés deux points  $x_1, x_2$  dans  $M$  et  $T > 0$ , peut-on trouver un contrôle  $u$  tel que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{a.e. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_1 \end{cases}$$

vérifie

$$x(T) = x_2 \quad ?$$

# Problèmes de controlabilité et d'optimalité

**Problème de controlabilité :** Étant donnés deux points  $x_1, x_2$  dans  $M$  et  $T > 0$ , peut-on trouver un contrôle  $u$  tel que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{a.e. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_1 \end{cases}$$

vérifie

$$x(T) = x_2 \quad ?$$



**Problème d'optimalité :** Parmi toutes les trajectoires joignant  $x_1$  à  $x_2$  laquelle est optimale ?

Soit  $M$  une variété connexe lisse de dimension  $n$ .

## Définition

Une structure sous-riemannienne de rang  $m$  sur  $M$  est donnée par une paire  $(\Delta, g)$  où :

- $\Delta$  est une **distribution totalement non-holonôme** de rang  $m \leq n$  sur  $M$  engendrée localement par une famille de  $m$  champs de vecteurs lisses linéairement indépendants vérifiant la **condition de Hörmander**.
- $g_x$  est une **métrique** sur  $\Delta(x)$ .

# La condition de Hörmander

On dit qu'une famille de champs de vecteurs lisses  $X^1, \dots, X^m$  vérifie la **condition de Hörmander** si

$$\text{Lie}\{X^1, \dots, X^m\}(x) = T_x M \quad \forall x,$$

où  $\text{Lie}\{X^1, \dots, X^m\}$  désigne l'algèbre de Lie engendrée par  $X^1, \dots, X^m$ , c'est à dire le plus petit sous-espace de champs de vecteurs contenant tous les  $X^1, \dots, X^m$  et stable par **crochet de Lie**.

## Rappel

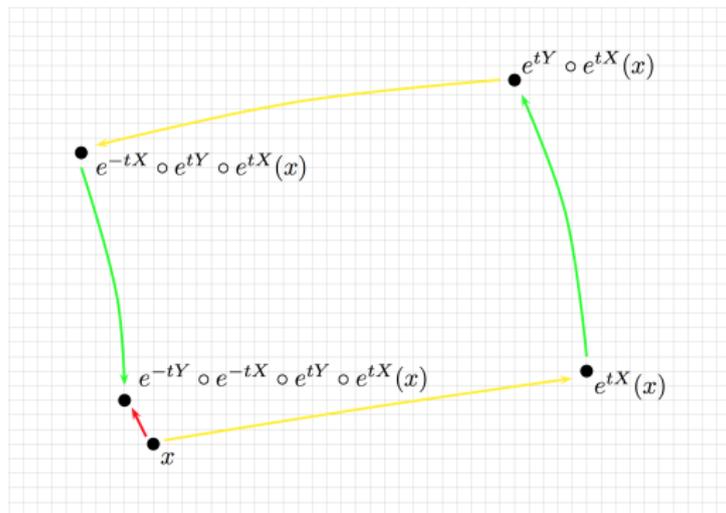
Étant donnés deux champs de vecteurs lisses  $X, Y$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le crochet de Lie  $[X, Y]$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  est défini par :

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

# Crochet de Lie : Point de vue dynamique

## Exercice

$$[X, Y](x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(e^{-tY} \circ e^{-tX} \circ e^{tY} \circ e^{tX})(x) - x}{t^2}.$$



# Le théorème de Chow-Rashevsky

## Définition

On appelle **chemin horizontal** tout  $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$  tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

# Le théorème de Chow-Rashevsky

## Définition

On appelle **chemin horizontal** tout  $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$  tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Le résultat suivant constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne. (Ne pas oublier que  $M$  est supposée connexe.)

## Théorème (Chow-Rashevsky, 1938)

Soit  $\Delta$  une distribution totalement non-holonôme sur  $M$ , alors toute paire de points peut être reliée par un chemin horizontal.

# Le théorème de Chow-Rashevsky

## Définition

On appelle **chemin horizontal** tout  $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$  tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Le résultat suivant constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne. (Ne pas oublier que  $M$  est supposée connexe.)

## Théorème (Chow-Rashevsky, 1938)

*Soit  $\Delta$  une distribution totalement non-holonôme sur  $M$ , alors toute paire de points peut être reliée par un chemin horizontal.*

Si la distribution est équipée d'une métrique, on peut mesurer les longueurs des chemins horizontaux et par conséquent définir une distance géodésique.

# Exemples de structures sous-riemanniennes

## Exemple (Cas riemannien)

*Toute variété riemannienne  $(M, g)$  est une structure sous-riemannienne pour laquelle  $\Delta = TM$ .*

# Exemples de structures sous-riemanniennes

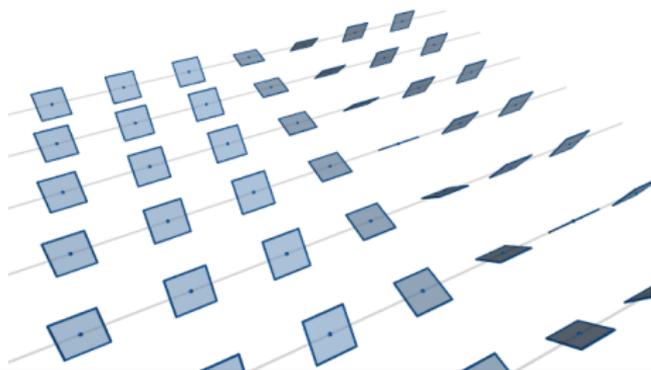
## Exemple (Cas riemannien)

*Toute variété riemannienne  $(M, g)$  est une structure sous-riemannienne pour laquelle  $\Delta = TM$ .*

## Exemple (Heisenberg)

*Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et*

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x^k \partial_z \quad \text{et} \quad g = dx^2 + dy^2.$$



# Distance SR et géodésiques minimisantes

La **longueur** d'un chemin horizontal  $\gamma$  est définie par

$$\text{long}^g(\gamma) := \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^g dt.$$

## Définition

Étant donnés  $x, y \in M$ , la **distance sous-riemannienne** entre  $x$  et  $y$  est définie par

$$d_{SR}(x, y) := \inf \left\{ \text{long}^g(\gamma) \mid \gamma \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

# Distance SR et géodésiques minimisantes

La **longueur** d'un chemin horizontal  $\gamma$  est définie par

$$\text{long}^g(\gamma) := \int_0^T |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)}^g dt.$$

## Définition

Étant donnés  $x, y \in M$ , la **distance sous-riemannienne** entre  $x$  et  $y$  est définie par

$$d_{SR}(x, y) := \inf \left\{ \text{long}^g(\gamma) \mid \gamma \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

## Définition

On appelle **géodésique minimisante** entre  $x$  et  $y$  tout chemin horizontal  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  joignant  $x$  et  $y$  de vitesse constante (en norme) tel que

$$d_{SR}(x, y) = \text{long}^g(\gamma).$$

# Propriétés des géodésiques minimisantes

Étant données une structure sous-riemannienne  $(\Delta, g)$  sur  $M$  et une géodésique minimisante  $\gamma$  de  $x$  à  $y$ , on a deux cas de figures (non-exclusifs) :

- La géodésique  $\gamma$  est la projection d'une extrémale normale et en particulier elle est lisse.
- La géodésique  $\gamma$  est une courbe singulière et a priori pourrait ne pas être lisse.

# Propriétés des géodésiques minimisantes

Étant données une structure sous-riemannienne  $(\Delta, g)$  sur  $M$  et une géodésique minimisante  $\gamma$  de  $x$  à  $y$ , on a deux cas de figures (non-exclusifs) :

- La géodésique  $\gamma$  est la projection d'une extrémale normale et en particulier elle est lisse.
- La géodésique  $\gamma$  est une courbe singulière et a priori pourrait ne pas être lisse.

Questions à propos des courbes horizontales singulières :

Quand ? Combien ? Comment ?

## II. Quelques problèmes ouverts

# Quelques problèmes ouverts

Soient  $(\Delta, g)$  une structure SR sur  $M$  et  $x \in M$  fixé.

Combien ?

$$\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor.}, \text{sing.}, \text{min.}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\Delta}^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor.}, \text{sing.}\}.$$

Conjecture (Conjectures de Sard)

*Les ensembles  $\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x$  et  $\mathcal{S}_{\Delta}^x$  sont de mesure de Lebesgue nulle.*

Comment ?

Conjecture (Conjecture de régularité)

*Les géodésiques minimisantes sont au moins de classe  $C^1$ .*

## III. Quelques résultats partiels

# La conjecture de Sard forte sur les surfaces de Martinet

Soient  $M$  de dimension 3,  $\Delta$  de rang 2 et  $g$  fixées, on pose

$$\mathcal{S}_{\Delta, g}^{x, L} = \{\gamma(1) \mid \gamma \in \mathcal{S}_{\Delta}^x \text{ et } \text{long}^g(\gamma) \leq L\}.$$

Conjecture (Conjecture de Sard forte)

*L'ensemble  $\mathcal{S}_{\Delta}^{x, L}$  est de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie.*

Théorème (Belotto-Figalli-Parusinski-R, 2018)

*Supposons  $M$  et  $\Delta$  analytiques (réelles) et  $g$  lisse et complète. Alors tout chemin horizontal singulier est une courbe semi-analytique dans  $M$ . De plus, pour tout  $x \in M$  et tout  $L \geq 0$ , l'ensemble  $\mathcal{S}_{\Delta, g}^{x, L}$  est une union finie de courbes horizontales singulières en particulier c'est une courbe semi-analytique.*

## Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.

## Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.
- Le champ de vecteur qui engendre la trace de  $\tilde{\Delta}$  sur  $\tilde{\Sigma}$  (après résolution) a des singularités de type hyperbolique.

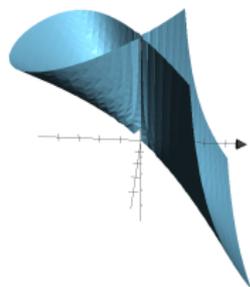
## Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.
- Le champ de vecteur qui engendre la trace de  $\tilde{\Delta}$  sur  $\tilde{\Sigma}$  (après résolution) a des singularités de type hyperbolique.
- Un résultat de Speissegger (d'après Ilyashenko) sur la régularité des applications de transition de Poincaré.

# Un exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$$X = \partial_y \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \left[ \frac{y^3}{3} - x^2 y(x+z) \right] \partial_z.$$



Surface de Martinet :  $\Sigma_\Delta = \left\{ y^2 - x^2(x+z) = 0 \right\}$ .

# Régularité en rang 2 et dimension 3

Un résultat important de Hakavuori et Le Donne nous permet d'en déduire le résultat suivant :

**Théorème (Belotto-Figalli-Parusinski-R, 2018)**

*Supposons  $M$  et  $\Delta$  analytiques (réelles),  $g$  lisse et complète, et considérons une géodésique singulière minimisante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ . Alors  $\gamma$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$ . En outre,  $\gamma([0, 1])$  est semi-analytique et donc union d'un nombre fini de points et d'un nombre fini d'arc analytiques ouverts.*

Merci pour votre attention !!

# Merci pour votre attention !!



CENTRE INTERNATIONAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

[About us](#) [CIMPA Schools](#) [CIMPA Courses](#) [CIMPA Fellowships](#) [Schools in Partnership](#) [Further Links](#)



## Video



## SHORTCUTS



[www.cimpa.info](http://www.cimpa.info)