

Combien de temps faut-il à un coureur pour être seul ?

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur

Séminaire Français d'Optimisation
16 décembre 2021

Conjecture du coureur solitaire

Si x est un réel, on note $\{x\}$ sa partie fractionnaire, c'est à dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Conjecture du coureur solitaire (Bienia *et al.*, 1998)

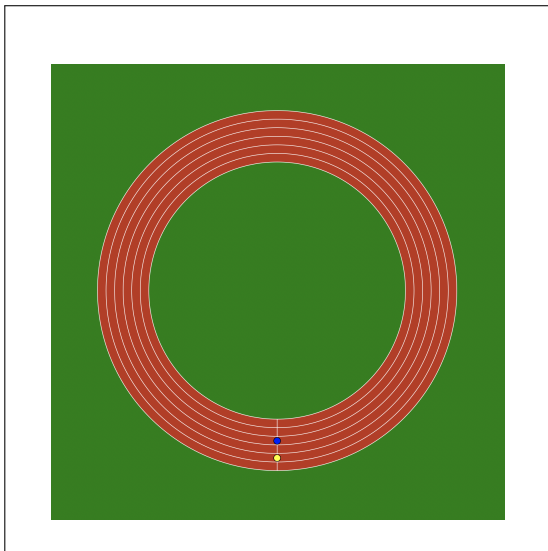
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, si

$$x_1, \dots, x_n : [0, \infty[\longrightarrow [0, 1[$$

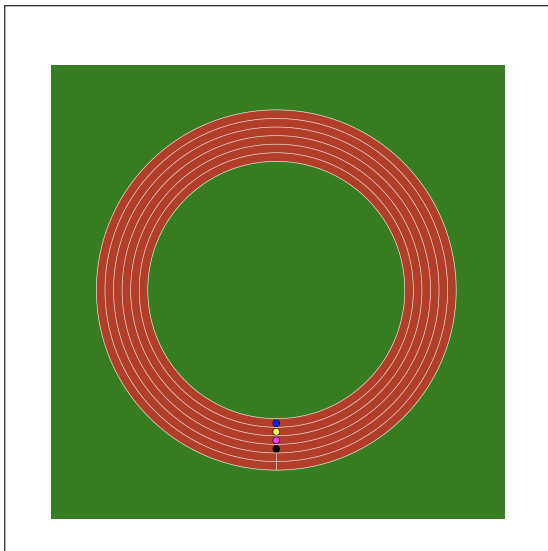
sont n coureurs partant de 0 au temps $t = 0$ avec des vitesses constantes distinctes $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, c'est à dire tel que $x_i(t) = \{tv_i\}$ pour tous $t \geq 0$, alors pour tout i dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, il existe un réel $t > 0$ tel que

$$|x_j(t) - x_i(t)| \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \quad \forall j \neq i.$$

Animation pour 2 coureurs



Animation pour 4 coureurs



Pourquoi $1/n$?

Théorème (Dirichlet, 1842)

Soient α et Q deux nombres réels avec $Q > 1$. Alors il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < Q \quad \text{et} \quad |\alpha q - p| \leq \frac{1}{Q}.$$

Démonstration

En se ramenant au cas où Q est entier, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en Q intervalles de longueur $1/Q$. Par le principe des tiroirs (de Dirichlet), l'un de ces intervalles contient au moins deux des $Q + 1$ points

$$0, 1, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(Q - 1)\alpha\},$$

propriété qui conduit facilement au résultat.

Pourquoi $1/n$?

Si x_1, \dots, x_n sont n coureurs ayant pour vitesses

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 1, \dots, \quad v_n = n - 1,$$

alors pour tout $t > 0$, il existe des entiers p et q tels que

$$1 \leq q < n \quad \text{et} \quad |tq - p| \leq \frac{1}{n}.$$

Ainsi, en prenant $i = q + 1 \geq 2$, on a

$$|tv_i - p| \leq \frac{1}{n}$$

ce qui signifie que

$$|x_i(t) - x_1(t)| = |\{tv_i\}| \notin \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right).$$

De plus, on a $|x_i(1/n) - x_1(1/n)| \in [1/n, 1 - 1/n]$ pour tout $i = 2, \dots, n$.

Vers la conjecture sous forme obstruction

Lemme

Pour tous $\delta \in]0, 1/2]$, $t > 0$, $v, v' \in \mathbb{R}$, on a

$$|\{tv\} - \{tv'\}| \in [\delta, 1 - \delta] \iff \{t|v' - v|\} \in [\delta, 1 - \delta].$$

Par conséquent, la conjecture est vérifiée pour $n \geq 2$ ssi pour tous $w_1, \dots, w_{n-1} > 0$, il existe $t > 0$ tel que

$$\{tw_i\} \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

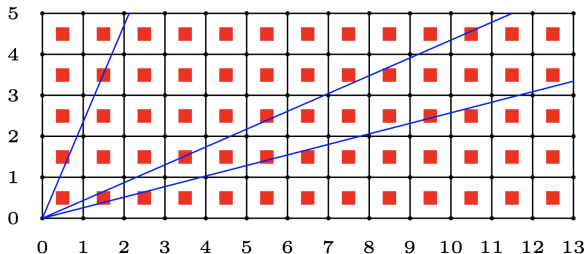
ou en d'autres termes

$$t \cdot (w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathcal{K}^{n-1}(1/n),$$

avec pour tous $m \in \mathbb{N}^*$ et tous $\delta \in]0, 1/2]$

$$\mathcal{K}^m(\delta) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^m} (k + [\delta, 1 - \delta]^m).$$

Conjecture sous forme obstruction



Conjecture du coureur solitaire - Forme obstruction

Pour tout entier $m \geq 1$, pour tous nombres réels $w_1, \dots, w_m > 0$, il existe $t > 0$ tel que

$$t \cdot (w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{K}^m \left(\frac{1}{m+1} \right).$$

Remarques

- 1 Le résultat est vrai si les vitesses w_1, \dots, w_m sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} .
- 2 On peut montrer que la conjecture est vraie si et seulement si elle est vérifiée pour les vitesses rationnelles.
- 3 Par conséquent, cela autorise en fait à étudier uniquement le cas de vitesses entières.

- **3 coureurs** : Wills (1967)
- **4 coureurs** : Betke et Wills (1972), Cusick (1974)
- **5 coureurs** : Cusick et Pomerance (1984) par une preuve assistée par ordinateur, puis Bienia, Goddyn, Gvozdjak, Sebö et Tarsi (1998)
- **6 coureurs** : Bohmann, Holzmann et Kleitman (2001)
- **3-6 coureurs** : Renault (2004)
- **7 coureurs** : Barajas et Serra (2008)

La conjecture pour strictement plus de 7 coureurs est ouverte.

Autres types de résultats

- **Hypothèses sur les vitesses** : Ruzsa, Tusa et Voigt (2002), Pandey (2009), Barajas et Serra (2009), Dubickas (2011), Tao (2018)

- **Fossé de solitude** : Étant donné $m + 1$ ($m \geq 2$) coureurs donc un statique, on définit la quantité $\tilde{\delta}_m$ comme le supremum des $\delta \in]0, 1/(m + 1)]$ tels que

$$\forall w_1, \dots, w_m > 0, \exists t > 0 \text{ t.q. } t \cdot (w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{K}^m(\delta).$$

Faisant suite à des résultats de Chen (1994, 1999) et Perarnau et Serra (2016), Tao (2018) obtient la borne inférieure suivante pour des grandes valeurs de m ,

$$\tilde{\delta}_m \geq \frac{1}{2m} + \frac{c \log m}{m^2 (\log(\log m))^2},$$

pour un certain $c > 0$.

Peut-on dire quelque chose sur le temps nécessaire à un coureur pour être seul ?

Cas connus : 2 et 3 coureurs

Remarque

La conjecture sous forme obstruction est vraie ssi pour tous $w_1, \dots, w_m > 0$ tels que

$$1 = w_1 \leq w_2, \dots, w_m,$$

il existe $\lambda > 0$ qui vérifie

$$\lambda = \lambda w_1 \in \mathcal{K} \left(\frac{1}{m+1} \right) \text{ et } \lambda \cdot (w_2, \dots, w_m) \in \mathcal{K}^{m-1} \left(\frac{1}{m+1} \right).$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ et $B \subset]0, \infty[$, on définit

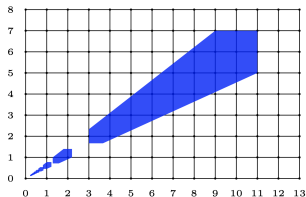
$$A/B = \left\{ \frac{a}{b} = \left(\frac{a_1}{b}, \dots, \frac{a_d}{b} \right) \mid a = (a_1, \dots, a_d) \in A, b \in B \right\}.$$

Conjecture du coureur solitaire - Recouvrement

Conjecture du coureur solitaire - Forme recouvrement

Pour tout entier $d \geq 1$, on a

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \delta_d = \frac{1}{d+2}.$$



$$\mathcal{K}_{(2,1)}(\delta_2) / \mathcal{K}(\delta_2)$$

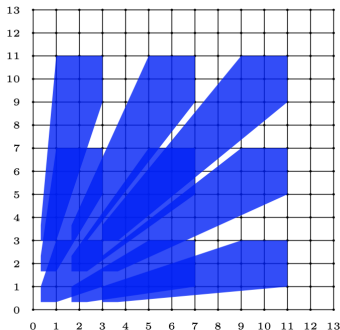
$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_{(2,1)}(\delta_2) / \mathcal{K}_k(\delta_2)$$

Rappel : $\mathcal{K}^d(\delta) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^d} (k + [\delta, 1 - \delta]^d)$ et $\mathcal{K}(\delta) = \mathcal{K}^1(\delta)$

Recouvrement en petite dimension

On peut vérifier informatiquement pour $d = 2$ et $d = 3$ que les cubes de la forme $[1, 100]^d$ sont en fait recouverts par les ensembles

$$\mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_0(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}_0(\delta_d) = [\delta_d, 1 - \delta_d].$$



Spéculation

L'observation faite en petite dimension suggère peut-être qu'il existe pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ un entier $N \geq 1$ tel que

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d)$$

$$\text{avec } \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d) = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{K}_k(\delta_d).$$

De plus, une telle propriété dirait que pour tous $w_1, \dots, w_m > 0$ ($m = d + 1$) avec $w_1 \leq w_2, \dots, w_m$, on aurait

$$\left(\frac{w_2}{w_1}, \dots, \frac{w_m}{w_1} \right) \in [1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d)$$

et il y aurait donc $t = \lambda w_1 \in [0, N/w_1]$ tel que $t \cdot (w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{K}^m(\delta_m)$.

Conjecture du coureur solitaire forte

Conjecture du coureur solitaire forte

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que:

- (Recouvrement) $[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[0, N-1]}(\delta_d)$.
- (Obstruction) Pour tous $w_1, \dots, w_{d+1} > 0$, $\exists t > 0$ tel que

$$t \leq \frac{N}{\min\{w_1, \dots, w_{d+1}\}} \text{ et } t \cdot (w_1, \dots, w_{d+1}) \in \mathcal{K}^{d+1}(\delta_d).$$

- (Coureurs) Si $x_1, \dots, x_n : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont $n = d + 2$ coureurs avec des vitesses distinctes $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$, à 0 en $t = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists t > 0$ tel que

$$t \leq \frac{N}{\min\{|v_i - v_j| \mid j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\}}$$

$$\text{et } |x_j(t) - x_i(t)| \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}.$$

Conjecture du coureur solitaire forte

Rappel : $\delta_d := 1/(d + 2)$.

Définition

Pour tout entier $d \geq 1$, on note par N_d le plus petit entier $N \geq 1$ tel que

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d),$$

avec pour convention $N = \infty$ si l'ensemble des $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant l'inclusion ci-dessus est vide et

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}(\delta_d).$$

Statut de la conjecture en terme de N_d :

$N_d = \infty$ pour $d = 1, 2, 3, 4, 5$ et $N_1 = 1$.

Résultats sur la conjecture forte

Théorème (Rifford, 2021)

On a $N_1 = N_2 = N_3 = 1$, c'est à dire

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_0(\delta_d) \quad \text{pour } d = 1, 2, 3.$$

Théorème (Rifford, 2021)

On a $N_4 = 2$, c'est à dire

$$[1, \infty[^4 \subsetneq \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_0(\delta_4)$$

et

$$[1, \infty[^4 \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_{[0,1]}(\delta_4).$$

La preuve de ce dernier résultat est assistée par ordinateur.

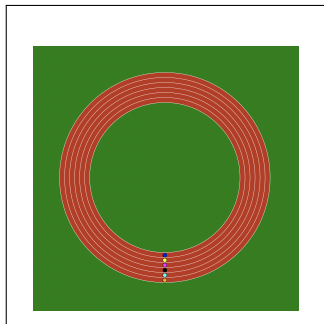
Animation pour 6 coureurs

Si on considère les six coureurs x_1, \dots, x_6 ayant pour vitesses

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 10285, \quad v_3 = 26740,$$

$$v_4 = 35319, \quad v_5 = 46187, \quad v_6 = 61005,$$

alors le coureur x_1 n'est jamais solitaire pendant le premier tour de x_2 mais il le devient pendant le second tour.



Plan de la démonstration

La démonstration pour les cas $d = 3, 4$ se fait en deux étapes :

- **Étape 1** : On montre que l'inclusion ($d = 3, 4$)

$$[1, \infty[^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_0(\delta_d)$$

est vérifiée à l'infini, c'est à dire hors d'un certain compact P .

- **Étape 2** : On vérifie l'inclusion

$$P \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d),$$

avec $N = 1$ pour $d = 3$ et $N = 2$ pour $d = 4$.

Étape 1

Proposition

Pour tout $(z_1, \dots, z_d) \in [1, \infty[^d$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $(z_1, \dots, z_d) \in \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_0(\delta_d)$.
- (ii) $\mathcal{K}_0(\delta_d) \cap (\cap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i) \neq \emptyset$.
- (iii) $\mathcal{P}^d(z_1, \dots, z_d) \cap \mathbb{N}^d \neq \emptyset$, où $\mathcal{P}^d(z_1, \dots, z_d) \subset \mathbb{R}^d$ est le polytope convexe correspondant à l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\delta_d z_i + \delta_d - 1 \leq \lambda_i \leq (1 - \delta_d) z_i - \delta \quad \forall i = 1, \dots, d$$

$$\text{et } \lambda_j z_i - \lambda_i z_j \geq (\delta_d - 1) z_i + \delta_d z_j \quad \forall i, j = 1, \dots, d \text{ t.q. } i \neq j.$$

On reconnaît dans (iii) un énoncé à la Minkowski.

Étape 1

Si l'inclusion désirée n'est pas vrai à l'infini, alors il existe $(z_1, \dots, z_d) \in [1, \infty[^d$ tel que

$$1 < z_1 < z_2 < \dots < z_d$$

$$\text{et } \mathcal{K}_0(\delta_d) \cap \left(\bigcap_{i=1}^d \mathcal{K}(\delta_d)/z_i \right) = \emptyset.$$

Si on définit $\mathcal{B}(\delta_d)$ comme le complémentaire de $\mathcal{K}(\delta_d)$ c'est à dire par

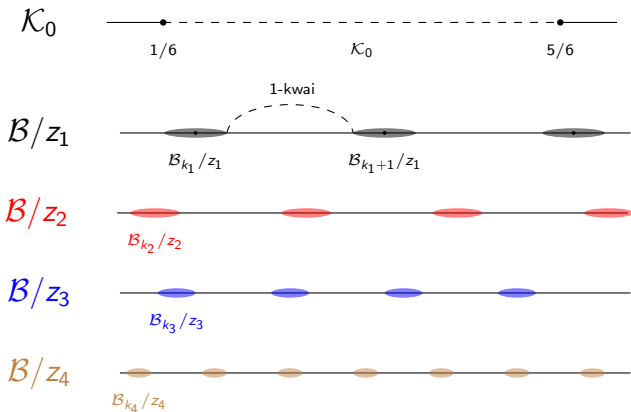
$$\mathcal{B}(\delta_d) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k(\delta_d) \quad \text{avec} \quad \mathcal{B}_k(\delta_d) = (k - \delta_d, k + \delta_d),$$

alors la deuxième propriété s'écrit

$$\mathcal{K}_0(\delta_d) \subset \bigcup_{i=1}^d \mathcal{B}(\delta_d)/z_i.$$

Étape 1

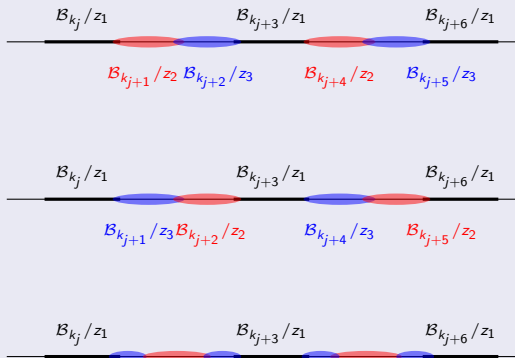
Illustration de $\mathcal{K}_0 \subset \bigcup_{i=1}^4 \mathcal{B}/z_i$



Étape 1 ($d = 3$)

Lemme ($d = 3$)

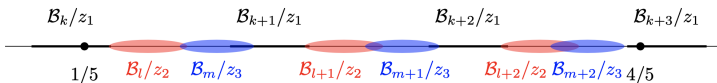
Les seules manières de recouvrir deux 1-kvais consécutifs par des 2 et 3-bridges sont les suivantes :



Étape 1 ($d = 3$)

Lemme ($d = 3$)

Si $z_1 \geq 7/2$ alors le nombre de 1-kvais consécutifs inclus dans \mathcal{K}_0 permet d'obtenir une contradiction.



On en déduit facilement que la propriété de recouvrement désirée est vérifiée hors d'un compact.

Étape 1 ($d = 4$)

Notons \mathcal{S}^4 l'ensemble des $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$1 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4.$$

Proposition

On a

$$\mathcal{S}^4 \setminus P \subset \mathcal{K}^4 / \mathcal{K}_0,$$

où $P \subset \mathcal{S}^4$ est le compact des points $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} 5z_1 \leq 47 \\ 2z_2 \leq 5z_1 \\ z_2z_3 + z_1z_3 \leq 8z_1z_2 \\ z_3z_4 + z_2z_4 \leq 10z_2z_3. \end{array} \right.$$

Étape 1 ($d = 4$)

L'ensemble des chaînes possibles pouvant recouvrir un 1-kwai est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \{ & [12341], [12431], [124341], [13241], [132341], [132431] \\ & , [1324341], [14231], [142341], [142431], [1424341], [13421], \\ & [134231], [1342341], [134241], [1342431], [13424341], \\ & [14321], [143231], [1432341], [143241], [1432431], \\ & [14324341], [143421], [1434231], \\ & [14342341], [1434241], [14342431], [143424341] \}. \end{aligned}$$

Attention, il faut tenir compte des paramètres !!

Étape 1 ($d = 4$)

Lemme

L'ensemble des 1-chaines faibles admissibles de longueur 1 est donné par :

1	(234 000)	
2	(243 000)	
3	(324 000)	
4	(342 000)	
5	(423 000)	
6	(432 000)	
7	(2434 0001)	
8	(3234 0010)	
9	(3243 0001)	
10-12	(4234 000a)	$a \in \{1, 2, 3\}$
13-14	(4243 00a0)	$a \in \{1, 2\}$
15	(4323 0001)	
16	(3423 0001)	
17-19	(4324 000a)	$a \in \{1, 2, 3\}$
20-21	(3424 000a)	$a \in \{1, 2\}$
22	(4342 0010)	
23	(32434 00011)	
24	(42434 00102)	
25-27	(34234 0001a)	$a \in \{1, 2, 3\}$
28-29	(34243 000a1)	$a \in \{1, 2\}$
30-32	(43234 0001a)	$a \in \{2, 3, 4\}$
33-35	(43243 000a1)	$a \in \{1, 2, 3\}$
36	(43423 00101)	
37	(43424 00102)	
38	(342434 000213)	
39-40	(432434 000a1ā)	$a \in \{2, 3\}$
41-42	(434234 00101a)	$a \in \{3, 4\}$
43	(434243 001031)	
44	(4342434 0010314)	

Étape 1 ($d = 4$)

Exemple : Pour trouver les 1-chaines faibles de la forme $\langle 2434|000a \rangle$ avec $a \in \mathbb{N}^*$, il faut trouver les valeurs de a pour lesquelles le système suivant

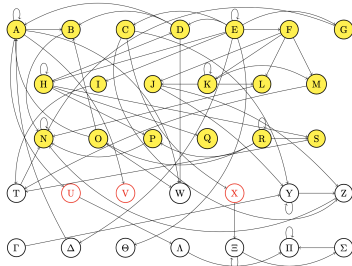
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < 1 - 3h_2 \\ 0 < -1 + 3h_4 \\ 0 < \rho_2 + 3h_2 - 3h_4 \\ 0 < -\rho_2 - 3h_2 + 3h_3 \\ 0 < \rho_4 - 3h_3 + 3h_4 \\ 0 < \rho_3 - 3a\rho_4 + 3h_3 - 3h_4 \\ 0 < 3 - \rho_3 - 3h_3 \\ 0 < -3 + (3a + 1)\rho_4 + 3h_4 \end{array} \right.$$

admet des solutions dans \mathbb{R}^6 . On peut vérifier cela facilement avec **Sage**.

Étape 1 ($d = 4$)

Il s'agit ensuite d'étudier la dynamique des 1-chaines faibles.

A	(342:342 000:1a1)	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
B	(342:3424 000:1314)	
C	(432:324 000:11a)	$a = 2, 3, 5, 7, 8$
D	(432:342 000:1a1)	$a = 3, 4, 5$
E	(432:432 000:a11)	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
F	(432:4324 000:a11b)	$(a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 8)$
G	(432:3424 000:1415)	
H	(432:43424 000:a1a1)	$a = 2, 3, 4$
I	(432:43424 000:31415)	
J	(4324:324 000a:11b)	$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (3, 8)$
K	(4324:4324 0002:3115)	
L	(4324:3424 0002:1415)	
M	(4324:43424 0002:31415)	
N	(3424:3424 0001:1314)	
O	(4342:342 0010:1a1)	$a = 3, 4, 5$
P	(4342:3424 0010:1415)	
Q	(4342:3424 0010:1a1a)	$a = 3, 5$
R	(4342:4342 0010:3141)	
S	(4342:43424 0010:31415)	
T	(43424:3424 00102:1415)	
U	(342:423 000:112)	
V	(342:3423 000:1112)	
W	(342:3424 0001:1a1b)	$(a, b) = (2, 3), (4, 5), (5, 7)$
X	(324:243 000:112)	
Y	(324:324 000:11a)	$a = 1, 2, 3, 4, 5$
Z	(324:3424 000:1213)	
Γ	(432:324 000:11a)	$a = 4, 6$
Δ	(432:342 000:1a1)	$a = 2, 6$
Θ	(432:3424 000:1a1a)	$a = 2, 3, 5$
Α	(423:234 000:112)	
Ξ	(243:243 000:111)	
Η	(234:234 000:11a)	$a = 1, 2$
Σ	(243:234 000:112)	



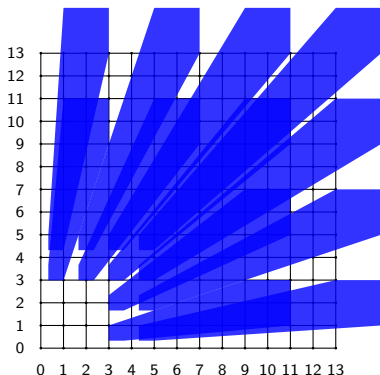
On conclut par un argument de décalage des bridges comme dans le cas $d = 3$.

Étape 2

On vérifie l'inclusion

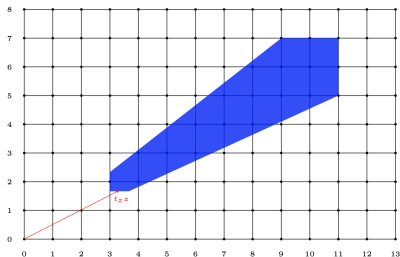
$$P \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d),$$

avec $N = 1$ pour $d = 3$ et $N = 2$ pour $d = 4$, sachant que la propriété de recouvrement est vérifiée hors de P .

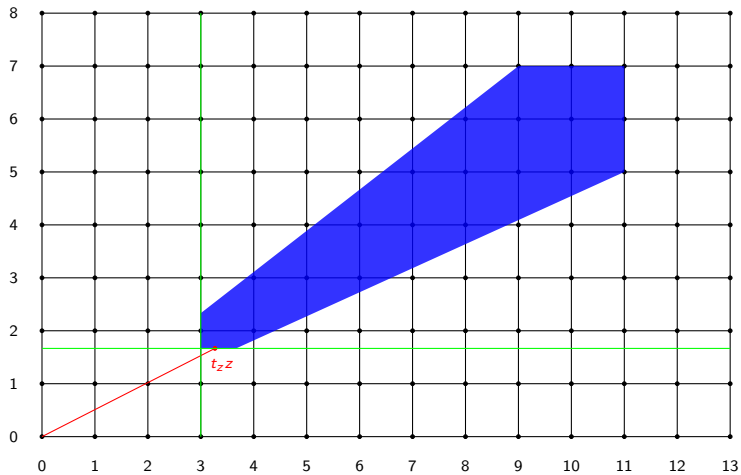


Étape 2

Si la propriété de recouvrement n'est pas vérifiée sur le compact P , alors il existe un bout de rayon qui n'est pas recouvert et qui vient taper une feuille sur l'une de ses faces inférieures.



Étape 2



Étape 2

Notons par \mathfrak{S}_d l'ensemble des permutations sur $\{1, \dots, d\}$ et étant donné un compact $P \subset \mathcal{S}^d$, posons

$$\mathfrak{S}_d(P) := \left\{ (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(d)}) \mid (z_1, \dots, z_d) \in P, \sigma \in \mathfrak{S}_d \right\}.$$

De plus, notons \mathbb{I} l'ensemble des unions disjointes de familles finies d'intervalles compacts de \mathbb{R} et si $A \in \mathbb{I}$ est l'union disjointe des intervalles $[a_l, b_l] \subset \mathbb{R}$ avec $l = 1, \dots, L$, alors on définit les ensembles A^- , A^+ et $A^>$ par

$$A^- := \left\{ a_l \mid l = 1, \dots, L \right\}, \quad A^+ := \left\{ b_l \mid l = 1, \dots, L \right\}$$

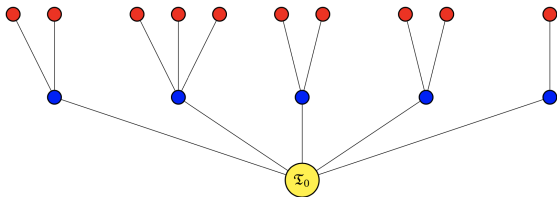
et

$$A^> := \bigcup_{l=1, \dots, L}]a_l, b_l],$$

avec la convention $]a_l, b_l] = \emptyset$ si $a_l = b_l$.

Étape 2

Rappelons qu'on appelle *arbre enraciné* (rooted tree) tout arbre dans lequel un sommet spécial a été spécifié, on appelle ce sommet *racine* ou *0-enfant*. Étant donné un arbre enraciné \mathfrak{T} avec racine \mathfrak{T}_0 , on appelle *l -enfant* ($l \in \mathbb{N}$) tout sommet de l'arbre situé à distance l de \mathfrak{T}_0 .



Étape 2

Nous allons travailler avec des arbres enracinés dont les sommets vivent dans $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$. Étant donné un d -enfant (z, \mathfrak{K}) , on définit sa \mathbb{R} -ascendance par

$$\text{Anc}_{\mathbb{R}}(z, \mathfrak{K}) := (z_1, \dots, z_{d-1}, z),$$

où $z_1, \dots, z_{d-1} \in \mathbb{R}^d$ sont associés à $\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_{d-1} \in \mathbb{I}$ de telle manière que chaque (z_i, \mathfrak{K}_i) est un i -enfant (avec $i = 1, \dots, d-1$) et les arêtes de \mathfrak{T}_0 à (z, \mathfrak{K}) passant par les sommets $(z_1, \mathfrak{K}_1), \dots, (z_{d-1}, \mathfrak{K}_{d-1})$ connectent \mathfrak{T}_0 à (z, \mathfrak{K}) .

Fixons $d, N \in \mathbb{N}^*$, $C > 1$ et $P \subset \mathcal{S}^d$ un ensemble compact tel que

$$P \subset \mathcal{C} := [1, C]^d \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^d \setminus P \subset \mathcal{K}^d(\delta_d) / \mathcal{K}_{[[0, N-1]]}(\delta_d).$$

Étape 2

Proposition

Soit \mathfrak{T} l'arbre enraciné à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{I}$ défini par

$$\mathfrak{T}_0 := (1, \mathfrak{K}_0) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{K}_0 := \mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d)$$

et tel que l'ensemble des enfants d'un i -enfant (z, \mathfrak{K}) (avec $i \in \{0, \dots, d-1\}$) est donné par l'ensemble des $(z', \mathfrak{K}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{I}$ tels que

$$z' \in (\mathcal{K}^-(\delta_d)/\mathfrak{K}^+) \cap]1, C] \text{ et } \mathfrak{K}' := \text{Clos}(\mathfrak{K} \cap \mathcal{K}^>(\delta_d)/z').$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $[1, \infty)^d \subset \mathcal{K}^d(\delta_d)/\mathcal{K}_{\llbracket 0, N-1 \rrbracket}(\delta_d)$.
- (ii) Pour tout d -enfant (z, \mathfrak{K}) de \mathfrak{T} tel que $\text{Anc}_{\mathbb{R}}(z, \mathfrak{K}) \in \mathfrak{S}_d(P)$, on a $\mathfrak{K} \neq \emptyset$.

Étape 2 ($d = 4$)

Un programme en C++ permet de montrer que le compact $P \subset \mathcal{S}^4$ défini comme l'ensemble des points $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathcal{S}^4$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} 5z_1 \leq 47 \\ 2z_2 \leq 5z_1 \\ z_2z_3 + z_1z_3 \leq 8z_1z_2 \\ z_3z_4 + z_2z_4 \leq 10z_2z_3 \end{array} \right.$$

vérifie

$$[1, \infty[^4 \setminus (P \setminus]1, 31/5[^4) \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_0(\delta_4)$$

et $[1, 31/5]^4 \subset \mathcal{K}^4(\delta_4) / \mathcal{K}_{[0,1]}(\delta_4)$.

Le temps requis pour ce calcul sur un MacBook Pro (2,6GHz) est d'à peu près 9 heures.

Merci pour votre attention !!