N° d'ordre : 76-2000 Année 2000

THESE

présentée

devant l'**UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLOME DE DOCTORAT**

(arrêté du 30 mars 1992)

présentée et soutenue publiquement le 11 Mai 2000 par

Ludovic RIFFORD

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

PROBLEMES DE STABILISATION EN THEORIE DU CONTROLE

Après avis de : M. Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY, rapporteur
M. Eduardo D. SONTAG, rapporteur
M. Richard B. VINTER, rapporteur

Jury : M. Hedy ATTOUCH
M. Jean-Bernard BAILLON
M. Jacques BLUM
M. Francis CLARKE, directeur de thèse
M. Jean-Michel CORON

Remerciements

C'est avec beaucoup de plaisir que je peux aujourd'hui rédiger ces remerciements. Je tiens en tout premier lieu à témoigner ma plus profonde gratitude à Francis Clarke sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Ce fut un grand honneur et un immense bonheur de pouvoir accomplir ce travail sous sa direction ; j'ai pu bénéficié de ses précieux conseils et de son soutien constant pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Eduardo Sontag et Richard Vinter qui ont consenti à être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Hedy Attouch, Jean-Bernard Baillon, Jacques Blum et Jean-Michel Coron qui ont accepté de participer à mon jury de thèse. Je suis extrèmement flatté de voir toutes ces personnes rassemblées autour de mon travail.

Je tiens à adresser toute ma sympathie et mes plus sincères remerciements aux membres de l'Institut Girard Desargues au sein duquel j'ai réalisé ce travail. J'ai également à l'esprit tous les bons moments passés avec mes camarades thésards sans lesquels je n'aurais pas pris autant de plaisir à poursuivre mon travail.

Pour finir, je remercie toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont aidé dans la réalisation de ce travail ; je pense en particulier à mes parents, à ma famille, et à tous ceux et à toutes celles qui m'ont supporté.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de stabilisation occupent une place importante en théorie du contrôle. Cette théorie, au carrefour de l'analyse, de la géométrie et des mathématiques appliquées s'efforce d'apporter des résultats et des méthodes permettant de comprendre et de traiter correctement des problèmes associés à des systèmes commandés. Diriger un satellite, piloter automatiquement un avion, maintenir un robot dans une position d'équilibre instable sont des problèmes de contrôle ; dans tous ces cas, il s'agit de contrôler la trajectoire d'un système répondant à certaines propriétés dynamiques. L'une des motivations essentielles de la théorie du contrôle est la construction de retours d'état convenables, ou en d'autres termes la mise au point d'une stratégie qui pilote convenablement le système vers l'équilibre. Lorsque la dynamique du système étudié est linéaire sans aucune contrainte sur la commande, la théorie des systèmes a fourni des outils efficaces pour la construction de retours d'état. Dans le cas non linéaire, cependant, ou quand des contraintes de contrôle ou d'état sont à respecter, la théorie actuelle est beaucoup moins avancée. Bien que les techniques de linéarisation soient souvent satisfaisantes pour des résultats purement locaux, il n'en reste pas moins que le cas totalement non linéaire reste aujourd'hui un défi majeur. L'objet principal de cette thèse est l'application de nouvelles méthodes inspirées de l'analyse non-lisse pour la résolution du problème de construction de retour d'état non-linéaire; nous procédons dans ce qui suit à une description détaillée de nos résultats.

Avant de commencer l'étude proprement dite des systèmes commandés, il est intéressant de se pencher sur le cas des systèmes sans commande ou autrement dit, sur le cas classique des équations différentielles. Etant donné un système

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

où f est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ possédant un équilibre à l'origine (c'est à dire $f(0) = 0$), il s'agit d'étudier et même de caractériser l'existence éventuelle de propriétés asymptotiques. Nous dirons que le système (1) est globalement asymptotiquement stable à l'origine (abrégé GAS) s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, toutes les trajectoires $x(\cdot)$ solutions de (1) commençant en x_0 sont définies sur $[0, \infty[$ et convergent vers l'équilibre quand t tend vers l'infini.
2. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute donnée initiale x_0 vérifiant $\|x_0\| \leq \delta$, les trajectoires de (1) commençant en x_0 sont définies sur $[0, \infty[$ et vérifient $\|x(t)\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.

Attention, il convient de bien distinguer la stabilité asymptotique globale de la notion d'attractivité seule, qui suppose seulement la convergence de $x(t)$ vers l'équilibre ; l'ajout de la deuxième condition traduit une propriété de stabilité uniforme locale. Un objet fort intéressant permet d'assurer la stabilité asymptotique d'un système à l'équilibre, il s'agit du concept de fonction de Lyapunov.

Définition 1. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la fonction V est dite fonction de Lyapunov associée au système (1) si elle est C^∞, définie positive (i.e. $V(0) = 0$ et $V > 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), propre (i.e. $V(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$) et si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \neq 0, \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0. \tag{2}$$

En d'autres termes, une fonction de Lyapunov est strictement décroissante le long des trajectoires du système auquel elle est associée (hors de l'origine) ; elle se comporte physiquement comme l'énergie totale d'un système dissipatif, qui déclinerait pour tendre asymptotiquement vers sa valeur minimale à l'équilibre. En effet, le long d'une trajectoire $x(\cdot)$ de (1), on a, lorsque $x(t)$ se situe hors de l'origine :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle < 0.$$

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'une fonction de Lyapunov garantisse la stabilité asymptotique globale d'un système. Il existe en fait une caractérisation exacte des systèmes GAS, Kurzweil [**49**] a démontré le résultat suivant.

Théorème 1. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors le système (1) possède une fonction de Lyapunov si et seulement si il est globalement asymptotiquement stable.

En résumé, regarder les propriétés de stabilité asymptotique à l'origine d'une équation différentielle revient à étudier l'existence éventuelle d'une fonction de Lyapunov. Nous allons faire appel au même type d'objet pour étudier la stabilisation des systèmes commandés. Entrons dans le vif du sujet ; donnons-nous un système commandé de la forme générale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{3}$$

où l'état x vit dans $\mathbb{R}^n$, la commande u dans un espace métrique compact U et où l'application f de $\mathbb{R}^n \times U$ dans $\mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en (x, u). Nous supposerons de plus que le point origine se distingue de tous les autres ; il est point d'équilibre pour le système, c'est à dire $f(0,0) = 0$ pour une certaine commande "0" appartenant à U. D'autre part, nous appellerons trajectoire de ce système tout arc absolument continu $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ associé à une commande $u(\cdot) : [a,b] \to U$ pour laquelle $x(\cdot)$ est solution de (3) presque partout. Nous nous intéressons précisément aux systèmes pour lesquels chaque état de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit asymptotiquement à l'origine, et ce de manière plutôt uniforme. Donnons une définition précise de cette propriété.

Définition 2. Le système (3) est dit globalement asymptotiquement commandable à l'origine (abrégé GAC) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Attractivité : Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $u : [0,\infty[\to U$ qui mène asymptotiquement la trajectoire solution de (3) commençant en ξ à l'origine.
- Stabilité au sens de Lyapunov : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\xi \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\|\xi\| \leq \delta$, alors il existe une commande $u : [0,\infty[\to U$ qui mène la trajectoire $x(\cdot)$ solution de (3) commençant en ξ à l'origine et telle que $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \epsilon$.

Par ailleurs, nous dirons que le système est stabilisable s'il existe un retour d'état $u(x)$ (i.e. une fonction $\mathbb{R}^n \to U$), appelé aussi feedback, pour lequel l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{4}$$

est globalement asymptotiquement stabilisable.

Une question naturelle et de taille (dès lors que seuls les retours d'état permettent des implémentations pratiques) est de savoir dans quel cas un système GAC est stabilisable (la réciproque est évidente). Une étude détaillée de ce problème fait apparaître un point important, quelle classe de feedbacks doit être considérée?

Il est naturel dans un premier temps de se limiter aux feedbacks continus. Imaginons que notre système commandé (3) possède un retour d'état continu $u : \mathbb{R}^n \to U$ qui le stabilise à l'origine. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Kurzweil (Théorème 2) à l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, u(x))$ alors GAS ; on en déduit l'existence d'une fonction de Lyapunov qui correspond en fait à une fonction Lyapunov de commande lisse associée au système (3).

Définition 3. Soit $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction V est appelée fonction Lyapunov de commande lisse pour le système (3) si elle est lisse (C^1 ou C^∞), définie positive, propre, et si de plus elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \min_{u \in U} \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle < 0. \tag{5}$$

Nous venons donc de démontrer que la présence d'un retour d'état continu implique l'existence d'une fonction Lyapunov de commande lisse associée au système commandé initial. Il est naturel de se pencher sur la réciproque : Peut-on trouver des systèmes commandés qui possèdent une fonction Lyapunov de commande lisse sans pour autant admettre de retour d'état stabilisant continu? Nous pouvons, pour répondre à cette question, faire appel à un théorème de nature topologique dont la démonstration sera donnée en appendice ; il s'agit du théorème de Brockett [**13**].

Théorème 2. Soit F une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$; si le système $\dot{x} = F(x)$ est GAS à l'origine, alors :
Pour tout $\gamma > 0$, il existe $\Delta > 0$ tel que

$$\Delta B \subset F(\gamma B); \tag{6}$$

où B désigne la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Ce résultat fournit une condition nécessaire à l'existence d'un retour d'état stabilisant continu. En effet, si une telle boucle fermée existe alors l'application $F(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot))$ vérifie l'hypothèse du théorème de Brockett, et par conséquent :

$$\forall \gamma > 0, \exists \Delta > 0 \text{ tel que } \Delta B \subset f(\gamma B, U). \tag{7}$$

Confrontons le théorème 2 au système commandé cité par Sontag dans [**75**] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_2 u_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1 u_3 \\ \dot{x}_3 &= u_1 u_2, \end{aligned} \tag{8}$$

où $(u_1, u_2, u_3) \in \overline{B}$, boule unité de $\mathbb{R}^3$.
Ce système ne vérifie pas la condition de Brockett (7) ; en effet, aucun point du type $(0, 0, \epsilon)$ n'appartient à l'ensemble $f(x, u)$ pour x dans un voisinage de l'origine et u dans la boule $\overline{B}$. Nous avons donc l'exemple d'un système qui admet une fonction Lyapunov lisse évidente (la fonction $x \mapsto \|x\|^2$) mais qui ne possède pas de retour d'état stabilisant continu.

On ne peut donc pas espérer déduire l'existence d'un retour d'état stabilisant continu de la présence d'une fonction Lyapunov de commande lisse. Par conséquent, nous sommes amenés à considérer des retours d'état discontinus et donc, à définir le sens de (4) dans le cas de $u(\cdot)$ discontinus. Plusieurs concepts de définitions distincts peuvent être appliqués, les plus connus étant ceux de Filippov et Krasovskii ; donnons pour celà quelques définitions concernant les applications à valeurs ensemblistes.

Etant donnée une application multivoque F de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans les parties de $\mathbb{R}^n$; nous dirons quelle vérifie l'hypothèse (H) si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $F(x)$ est compact convexe non vide.
- L'application F est semi-continue supérieurement, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow F(y) \subset F(x) + \epsilon B.$$

L'hypothèse (H) constitue le cadre habituel dans lequel on étudie l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in F(x(t)) \quad \text{p.p.} \tag{9}$$

associée à F. De la même manière que dans le cas classique des équations différentielles, on a un théorème d'existence de solutions locales et on peut également définir la notion de stabilité asymptotique globale.

Définition 4. L'inclusion différentielle (9) est dite globalement asymptotiquement stable (abrégé GAS) si toutes ses solutions sont définies sur $[0, +\infty[$ et si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(a) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, les trajectoires de (9) commençant en ξ convergent vers l'origine quand t tend vers l'infini.

(b) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute donnée initiale ξ vérifiant $\|\xi\| \leq \delta$, les trajectoires de (9) commençant en ξ vérifient $\|\xi\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$.

Passons à la définition des concepts de Krasovskii et Filippov. Etant donnée une application non nécessairement continue,

$$u : \mathbb{R}^n \to U,$$

on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$K_u(x) := \overline{\text{co}}\{\bigcap_{\delta>0} f(x, u(x + \delta B))\}, \tag{10}$$

$$\text{et} \quad F_u(x) := \overline{\text{co}}\{\bigcap_{\lambda(N)=0} \bigcap_{\delta>0} f(x, u(x + \delta B \setminus N))\}, \tag{11}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{co}(\cdot)$ la fermeture de l'enveloppe convexe de l'ensemble considéré. Ces multi-applications possèdent de bonnes propriétés de régularité ; l'application multivoque K_u vérifie l'hypothèse (H) et en outre, si u est mesurable, F_u la vérifie également. Sous ces conditions, nous dirons que l'arc absolument continu $x(\cdot)$ est une solution Krasovskii (respectivement Filippov) de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$ s'il est solution de l'inclusion différentielle associée à l'application multivoque (10) (respectivement de (11)). Ceci nous permet de donner la définition suivante.

Définition 5. Le système commandé (3) admet un retour d'état stabilisant de type Krasovskii (respectivement de type Filippov) s'il existe une fonction $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ telle que l'inclusion différentielle associée à (10) (respectivement à (11)) est globalement asymptotiquement stable.

Il est maintenant possible de répondre à notre problème. La présence d'une fonction Lyapunov de commande lisse permet la construction de retours d'état stabilisants de type Filippov ou Krasovskii; ce résultat s'apparente facilement à un théorème démontré par Artstein [**4**]. Cependant, il n'est pas nécessaire de travailler avec des fonctions lisses, nous pouvons sans trop de difficulté étendre le résultat d'Artstein au cas d'une fonction de Lyapunov non lisse; il est nécessaire pour celà d'introduire quelques éléments d'analyse non lisse.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application localement lipschitzienne sur Ω, on note $\partial_P f(\bar{x})$ son sous-différentiel proximal en $\bar{x}$, i.e. l'ensemble des $\zeta \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $\delta, \sigma > 0$ tels que

$$(12)\ f(y) - f(\bar{x}) + \sigma\|y - \bar{x}\|^2 \geq \langle \zeta, y - \bar{x} \rangle \quad \forall y \in \bar{x} + \delta B \subset \Omega.$$

En tout point de Ω, le sous-différentiel proximal est un ensemble convexe et éventuellement vide. Par exemple, dans le cas de la fonction $g : x \mapsto -|x|$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-différentiel proximal en 0 est vide, et il correspond à $\{g'(x)\}$ pour x différent de 0 c'est-à-dire là où g est dérivable. De manière générale, le sous-différentiel proximal ne coïncide avec $\nabla f(\cdot)$ que lorsque la fonction f est au moins C^2. Nous pouvons maintenant définir le gradient généralisé de Clarke de f en $\bar{x}$:

$$\partial f(\bar{x}) := \operatorname{co}\{\lim \zeta_k : x_k \to \bar{x}, \zeta_k \in \partial_P f(x_k)\}.$$

Cet objet introduit par Clarke en 1973 s'adapte très bien aux règles du calcul différentiel habituel ; il vérifie l'inégalité des accroissements finis et bien d'autres résultats fondamentaux. Il généralise en fait la notion de gradient au cas des fonctions localement lipschitziennes en en conservant toutes les propriétés. C'est pourquoi, il va être possible d'assimiler une fonction Lyapunov de commande au sens des gradients généralisés à une simple fonction Lyapunov de commande lisse.

Définition 6. Soit $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; on dit que V est une fonction Lyapunov de commande au sens des gradients généralisés pour le système (3) si V est localement lipschitzienne, définie positive, propre et si de plus, elle vérifie la condition suivante :

$$(13) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle < 0.$$

Nous avons maintenant tous les outils pour citer le théorème d'équivalence démontré dans le chapitre 2.

Théorème 3. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Le système (3) possède une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés.

(ii) Le système (3) possède une fonction Lyapunov C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.
(iii) Le système (3) admet un retour d'état stabilisant de type Krasovskii (ou de type Filippov).

Dans le chapitre 2, nous invoquons ce théorème pour résoudre le problème intégrateur lorsque le système commandé initial n'est pas lisse. Dans ce cas, nous pouvons contourner le manque de régularité de la dynamique en considérant une fonction Lyapunov seulement localement lipschitzienne, mais en outre fonction Lyapunov de commande au sens des gradients généralisés. Ce type de considérations permet de résoudre certains problèmes en s'intéressant uniquement à la fonction Lyapunov qui s'offre naturellement, même si celle-ci n'est pas lisse; le théorème 3 permet ensuite de tirer les mêmes conclusions que dans le cas totalement lisse.

Pour le moment, nous savons qu'une fonction Lyapunov de commande lisse permet d'obtenir des retours d'état stabilisants de type Krasovskii ou Filippov ; et de surcroît, la présence d'une telle fonction garantit la commandabilité asymptotique globale de notre système ! Que dire de la réciproque ? Peut-on associer une fonction Lyapunov de commande lisse (ou au sens des gradients généralisés) à tous les systèmes commandés GAC ? Ou de manière équivalente, tous les systèmes commandés possèdent-ils des retours d'état de type Krasovskii ou Filippov ? Encore une fois, nous avons recours à un résultat de nature topologique ; Ryan [**69**] a étendu en 1994 la condition de Brockett au cas des inclusions différentielles.

Théorème 4. Soit F une application multivoque de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'hypothèse (H) ; si le système $\dot{x} \in F(x)$ est GAS à l'origine, alors la condition de Brockett est vérifiée :
Pour tout $\gamma > 0$, il existe $\Delta > 0$ tel que

$$\Delta B \subset F(\gamma B).$$

Nous pouvons confronter ce théorème, dont nous donnons la preuve en appendice, au système suivant généralement appelé "non-holonomic integrator" :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1, \end{aligned} \tag{14}$$

où $(u_1, u_2) \in \overline{B}$, boule unité de $\mathbb{R}^2$.
Un calcul à la main ou des considérations algébriques (par crochets de Lie) permettent de démontrer que ce système est GAC. Il est également facile de vérifier qu'il ne vérifie pas la condition de Brockett (7). Par ailleurs, comme le système est affine en la commande, l'ensemble $f(x, U)$ est convexe pour tout x, et donc, si le système admettait un

retour d'état stabilisant de type Krasovskii ou Filippov, celui-ci correspondrait à une application multivoque K_u ou F_u à valeurs dans $f(x, U)$ pour tout x. Par conséquent, l'existence d'un retour d'état de type Krasovskii ou Filippov impliquerait la propriété (7) pour l'application $x \mapsto f(x, U)$. Nous démontrons ainsi que le "non holonomic integrator" ne possède pas de retour d'état stabilisant de type Krasovskii ou Filippov, et de manière équivalente qu'il n'admet pas de fonction Lyapunov de commande lisse (ou au sens des gradients généralisés).

Cet exemple, choisi parmi tant d'autres, nous révèle que les concepts de solutions dûs à Filippov et Krasovskii ne permettent pas de stabiliser les systèmes globalement asymptotiquement commandables. Cependant, récemment, en utilisant un concept de solution différent ("Solution Euler") et en employant les techniques d'analyse proximale, Clarke, Ledyaev, Sontag et Subbotin [**21**] ont construit un nouveau type de feedback stabilisant; cette construction est basée sur l'existence d'une fonction Lyapunov de commande continue et non lisse, apportée par un résultat dû à Sontag [**72**].

L'idée centrale de cette thèse est d'améliorer le théorème de Sontag afin de construire plus facilement et de manière plus performante, des retours d'état stabilisants au sens des solutions Euler. Cette approche nous permettra également d'exhiber des propriétés de robustesse d'un nouveau type vérifiées par les solutions stabilisantes considérées. Tout notre travail repose donc sur l'existence de bonnes fonctions de Lyapunov associées à notre système GAC ; introduisons donc maintenant une définition fondamentale, dûe a Sontag (proposée sous une forme équivalente dans [**72**]), concernant cette classe de fonctions non lisses.

Définition 7. Une fonction Lyapunov de commande (FLC) associée au système (3) est une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue, définie positive et propre pour laquelle il existe une fonction $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continue définie positive qui vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_P V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x, u) \rangle \leq -W(x). \tag{15}$$

Bien-entendu, il se peut que le sous-différentiel proximal de V soit vide, dans ce cas la condition (2.3) est automatiquement vérifiée. Par ailleurs, il nous faut noter immédiatement que l'existence d'une telle fonction assure la commandabilité asymptotique globale du système (3) ; le recours à une fonction Lyapunov non lisse constitue en fait une des principales méthodes pour montrer qu'un système est GAC. La réciproque quant à elle est beaucoup plus délicate, nous proposons principalement deux théorèmes dont les démonstrations sont données dans les chapitres 4 et 5.

Théorème 5. Supposons le système (3) GAC, alors il existe une fonction Lyapunov de commande localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

Ce premier théorème apporte une réponse affirmative à la conjecture de Sontag-Sussmann; la preuve en est donnée dans le chapitre 4. En outre, des techniques de régularisation par inf-convolution et de recollement permettent d'obtenir une fonction Lyapunov beaucoup plus séduisante.

Théorème 6. Supposons le système (3) GAC, alors il existe une fonction Lyapunov de commande semi-concave sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_L V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -V(x). \tag{16}$$

La semi-concavité nous rapproche d'une régularité lisse ; en effet, une fonction semiconcave peut être vue localement comme la somme d'une fonction lisse et d'une fonction concave. Donnons-en une caractérisation dans le lemme suivant (on note $\partial^P V(x) := -\partial_P(-V)(x)$ le surdifférentiel proximal de V en x).

Lemme 1. Soit V une application semi-concave sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in \Omega$,

$$\partial^P V(x) = \partial_C V(x);$$

de plus, le σ de l'inégalité (12) peut être pris uniforme sur les compacts de Ω.

Par ailleurs, le fait de pouvoir remplacer dans (16), W par la fonction V, va nous permettre d'obtenir une décroissance satisfaisante (du type $V(x_0)e^{-t}$) le long de nos trajectoires stabilisantes. Dans la mesure où des retours d'états stabilisants suffisamment réguliers (continus ou de type Krasovskii ou Filippov) n'existent généralement pas, il nous faut donner un autre sens aux solutions de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, u(x))$ lorsque la fonction $x \longmapsto f(x, u(x))$ n'est pas continue ; nous introduisons pour cela une variante de la notion de solution Euler, bien connue en jeux différentiel, voir les travaux de Krasovskii et Subbotin [**47**]. Notre approche diffère de celle de Sussmann [**82**] qui avait le premier remarqué que les retours d'état réguliers ne suffisent pas à stabiliser tous les systèmes GAC, et donc avait proposé une alternative discontinue dans le cas des systèmes analytiques. Signalons aussi qu'une autre approche (voir Coron [**28**] ou Pomet [**63**]) complètement différente existe ; elle permet de construire des retours d'états stabilisant lisses, mais ils sont en contre-partie dépendants du temps.

Soit donc une boucle fermée $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ non nécessairement continue et un état $x_0 \in \mathbb{R}^n$; considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))), \quad x(0) = x_0, \tag{17}$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donnons-nous une partition

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\}$$

de $[0,+\infty[$; on note son diamètre $\mathrm{diam}(\pi) := \max |t_{i+1} - t_i|$. Nous considérons dans un premier temps le problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x, u(x_0)), \quad x(0) = x_0$$

sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Celui-ci possède une solution unique $x(t)$ sur $[t_0, t_1]$ (nous supposons ici que l'existence d'une solution sur tout l'intervalle est vérifiée, ce qui sera le cas par la suite) ; nous notons par ailleurs $x_1 := x(t_1)$. Puis on réitère cette opération en considérant le problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x, u(x_1)), \quad x(t_1) = x_1$$

sur l'intervalle $[t_1, t_2]$. On définit ainsi par itérations successives un arc appelé π-trajectoire de (17) sur $[0, \infty[$.

Définition 8. Nous appellerons solution Euler de (17) tout arc x limite uniforme de π_i-trajectoires de (17) associées à des partitions π_i pour lesquelles $\mathrm{diam}(\pi_i)$ tend vers zéto quand i tend vers l'infini.

Par ailleurs, nous dirons que le système $\dot{x} = f(x, u(x))$ est globalement asymptotiquement stabilisable (GAS) au sens des solutions Euler si celles-ci sont toutes définies sur $[0, \infty[$ et si elles vérifient les deux conditions d'attractivité et de stabilité Lyapunov. Nous proposons le théorème très général suivant, il fut initialement démontré dans [**21**]).

Théorème 7. Supposons le système (3) GAC, alors, il existe un retour d'état $u : \mathbb{R}^n \to U$ qui rend le systeme $\dot{x} = f(x, u(x))$ GAS au sens des solutions Euler.

Ce théorème est démontré de deux manières différentes dans les chapitres 3 et 5. Dans le dernier cas, l'utilisation d'une fonction Lyapunov semi-concave simplifie considérablement la preuve.

Esquisse de la preuve.– D'après le théorème 6, il existe une fonction Lyapunov de commande V semi-concave sur $R^n \setminus \{0\}$ (elle est par définition continue sur $\mathbb{R}^n$) telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_L V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x, u) \rangle \leq -V(x) < 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, choisissons arbitrairement $\zeta \in \partial_L V(x)$ puis posons $u(x) := u$ où u réalise le minimum dans l'inégalité ci-dessus (le choix de u n'est pas forcément unique non plus). Nous définissons de cette manière une application $u : \mathbb{R}^n \to U$ (on pose bien-sûr $u(0) = 0$) qui n'a aucune raison d'être continue, ni même mesurable.

Maintenant, soit π une partition de $[0, \infty[$ et $x(\cdot)$ une π-trajectoire de (17) sur $[0, b]$ (où $x_0 \in \mathbb{R}^n$). Par le lemme 1, il existe σ tel que pour tout x dans un voisinage de la trajectoire $x(\cdot)$, $\forall \zeta \in \partial_L V(x)$,

$$V(y) - V(x) \leq \langle \zeta, f(x, u(x)) \rangle + \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{V}(x).$$

Ainsi, en appliquant cette inégalité aux x_i de la π-trajectoire, on trouve

$$V(x_n) - V(x_0) \leq -\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) V(x_i) + O(\mathrm{diam}(\pi)).$$

Ainsi pour toute solution Euler $x(\cdot)$ sur $[0,b]$, on obtient par passage à la limite:

$$V(x(t)) - V(x_0) \leq -\int_0^t V(x(s))ds, \quad \forall t \in [0,b].$$

Cette dernière inégalité démontre que les solutions Euler de (17) restent dans le compact $\{x : V(x) \leq V(x_0)\}$; elles seront donc par conséquent définies sur $[0,\infty[$. Les deux propriétés d'attractivité et de Lyapunov stabilité proviennent quant à elles du fait que pour toute solution Euler $x(\cdot)$ de (17), on a $\int_0^{+\infty} V(x(s))ds < \infty$. Par ailleurs, l'utilisation d'un lemme de Gronwall permet d'obtenir une décroissance exponentielle :

$$V(x(t)) \leq V(x_0)e^{-t}, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Lorsque le système considéré est affine en la commande, c'est-à-dire lorsqu'il s'écrit

$$\dot{x} = f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_i(x)$$

(où la commande $u = (u_1, \cdots, u_p)$ évolue dans un compact de $\mathbb{R}^p$), nous avons la possibilité, en s'inspirant d'une formule universelle établie par Sontag [**71**] dans le cas d'une fonction Lyapunov de commande lisse, de donner une formule explicite d'un feedback stabilisant au sens des solutions Euler.

Théorème 8. Soit V une fonction Lyapunov de commande associée à f où f est affine en la commande, c'est-à-dire

$$f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

où $f_0, \cdots, f_m$ sont des applications localement lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$; alors si on considère une sélection $\zeta_V(\cdot)$ de $\partial_L V(\cdot)$, le retour d'état défini par

$$u_i(x) := -\phi\left(\langle f_0(x), \zeta_V(x)\rangle, \sum_{i=1}^{m} \langle f_i(x), \zeta_V(x)\rangle^2\right) \langle f_i(x), \zeta_V(x)\rangle,$$

avec

$$\phi(a,b) = \begin{cases} \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

stabilise le système $\dot{x} = f(x,u(x))$ au sens des solutions Euler.

Il reste à noter que les retours d'état stabilisants au sens des solutions Euler possèdent certaines propriétés de robustesse. Comme l'ont démontré Ledyaev et Sontag [**55**], il y a équivalence entre l'existence d'une fonction de Lyapunov lisse et celle d'un retour d'état $u(\cdot)$ fortement robuste, c'est-à-dire qui stabilise le système

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t) + p(t)))$$

vers un voisinage de l'origine, pour tout $p : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ dont la norme infinie est suffisamment bornée. Le théorème de Ledyaev-Sontag constitue donc une obstruction importante à l'obtention de retours d'état fortement robustes dans le cas général. Une façon de contourner celle-ci est d'autoriser un peu moins de liberté à la perturbation p et en particulier de relier les restrictions prises sur p à la construction de la solution Euler.

Donnons-nous pour toute partition $\pi = \{t_i\}_{i\geq 0}$ un ensemble d'erreurs de mesure $\{p_i\}_{i\geq 0}$, c'est-à-dire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et une perturbation q, ou en d'autre terme une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. En reprenant notre schéma Euler, nous allons faire intervenir nos deux types d'erreurs dans la construction de notre π-trajectoire $x(\cdot)$ partant d'un état $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nous allons en fait considérer que $x(\cdot)$ est une π-trajectoire du système

$$\dot{x} = f(x, u(x + p)) + q, \tag{18}$$

ou pour être plus précis qu'elle est solution de

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t_i) + p_i)) + q(t)$$

sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.
Ces nouvelles solutions Euler perturbées vont rester stabilisantes sous certaines conditions ; nous pouvons citer le théorème suivant.

Théorème 9. Les retour d'état construits dans les théorèmes 7, 8 et 9 sont robustes dans le sens suivant :
Pour tout $\gamma > 0$, il existe des constantes strictement positives δ_0 et E_q telles que pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$ il existe $E_p(\delta) > 0$ possédant la propriété suivante : Pour toute partition $\pi = \{t_i\}_{i\geq 0}$ vérifiant

$$\frac{\delta}{2} \leq t_{i+1} - t_i \leq \delta, \quad \forall i \geq 0,$$

pour tout ensemble d'erreurs de mesure $\{p_i\}_{i\geq 0}$ vérifiant

$$\|p_i\| \leq E_p(\delta), \quad \forall i \geq 0,$$

pour toute perturbation $q(\cdot)$ telle que $\|q\|_\infty \leq E_q$, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la π-trajectoire résultant de (18) vérifie

$$x(t) \in \gamma B, \quad \forall t \geq T.$$

Ayant achevé la présentation et l'explication détaillées de la majeure partie de notre travail de recherche, nous procédons maintenant à un inventaire, section par section, des résultats présents dans cette thèse. Avant de poursuivre, nous aimerions prévenir le lecteur qu'une partie de cette thèse, parce qu'elle correspond à des publications à paraître, a été rédigée en anglais; nous sollicitons donc la plus grande indulgence à l'égard de cette présentation un peu hybride de nos travaux.

Nous présentons dans le premier chapitre les outils d'analyse non lisses indispensables à la bonne compréhension de cette thèse. Le chapitre 2 porte sur l'existence de fonctions Lyapunov de commandes lisses, nous y définissons le nouveau concept de fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés et nous y présentons le théoréme 3. Comme nous l'avons déjà dit, nous appliquons ce résultat à la résolution du problème intégrateur ; nous évoquons en outre quelques extensions possibles de ces résultats dans le cadre de la stabilisation vers un compact.

Le troisième chapitre est ensuite consacré à un article écrit en collaboration avec Francis Clarke, Yuri Ledyaev et Ron Stern [**19**]. Nous y donnons une première démonstration géométrique du théorème 7 ; celle-ci est basée sur l'existence de fonctions Lyapunov de commande non lisses partielles, c'est-à-dire définies seulement sur des parties de $\mathbb{R}^n$. Le lecteur pourra aussi y trouver la preuve du théorème de robustesse cité plus haut (Théorème 10).

Le chapitre 4 est consacré intégralement à la démonstration des théorèmes 5 et 6; cette section fait l'objet d'un article à paraître [**65**]. Le chapitre 5 peaufine les démonstrations des théorèmes 5 et 6 en fournissant la décroissance exponentielle (la fonction W peut être prise égale à V), il contient en outre les démonstrations des théorèmes 7, 8.

Ensuite, nous présentons dans le chapitre 6 un travail effectué en collaboration avec Yuri Ledyaev [**52**] ; nous y traitons le cas particulier du "non-holonomic integrator" en lui associant explicitement une fonction Lyapunov de commande non lisse et un retour d'état discontinu stabilisant au sens des π-trajectoires.

Le chapitre 7 est consacré à un sujet un peu différent, nous y démontrons un lemme de "tracking" généralisé qui sera utilisé dans un article à venir [**27**] pour définir des retours d'état stabilisants associés à des dynamiques respectant certaines contraintes d'état.

Pour finir, nous procédons à quelques commentaires concernant tous ces travaux et nous tentons d'esquisser quelques perspectives de recherche susceptibles d'aboutir à des résultats intéressants.

CHAPITRE I

Préliminaires d'analyse non lisse

1. Concepts géométriques

1.1. Géométrie proximale

Considérons un ensemble fermé S de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le tout premier objet que l'on peut associer à cet ensemble est la fonction distance $d_S(\cdot)$ (notée aussi $d(\cdot, S)$); elle est définie de la manière suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, d_S(x) := \inf_{s\in S} \|x - s\|.$$

Il est important de remarquer que l'infimum de la définition ci-dessus est toujours réalisé lorsque l'ensemble S est fermé et non vide; en d'autre termes, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe un point s de S tel que $d_S(x) = \|x - s\|$, le vecteur $x - s$ est alors appelé normale proximale. Nous noterons $\mathrm{proj}_S(x)$ l'ensemble de tous les points qui réalisent la distance de x à S. Par ailleurs le lemme suivant apporte une première information sur la fonction distance; la preuve est laissée au lecteur.

Lemme 1.1. *La fonction $d_S(\cdot)$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.*

Soit maintenant s appartenant à S, nous définissons le cône normal proximal (ou cône proximal) de S en s de la manière suivante:

$$N_S^P(s) := \{\zeta \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \exists t > 0, d_S(s + t\zeta) = t\|\zeta\|\}.$$

Le cône proximal réunit toutes les directions ζ pour lesquelles il existe des normales proximales du type $x - s$ où x est dans $\mathbb{R}^n$, s est dans S et où $x - s$ est positivement colinéaire à ζ. Nous pouvons en donner la caractérisation suivante.

Proposition 1.2. *Soit S un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$, $s \in S$ et $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\zeta \in N_S^P(s)$.
(ii) $\exists t > 0$ *tel que* $\mathrm{proj}_S(s + t\zeta) = s$.
(iii) $\exists t > 0$ *tel que* $\forall s' \in S, t\|\zeta\| \leq \|s + t\zeta - s'\|$.
(iv) $\exists \sigma \geq 0$ *tel que* $\forall s' \in S, \langle \zeta, s' - s\rangle \leq \sigma\|s' - s\|^2$.

Preuve. On a trivialement (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Nous allons montrer (iii)$\Leftrightarrow$(iv). En élevant (iii) au carré, on obtient pour tout $s' \in S$:

$$\begin{aligned} t^2\|\zeta\|^2 &\leq \|s + t\zeta - s'\|^2 \\ &\leq \|s - s'\|^2 + t^2\|\zeta\|^2 + 2\langle s - s', t\zeta\rangle. \end{aligned}$$

Figure 1.

En posant $\sigma = \frac{1}{2t}$, on reconnait l'inégalité de (iv). $\square$

Remarque 1.3. Il est maintenant facile de voir, par (iv), que le cône proximal est un cône convexe. Attention, il n'a aucune raison d'être fermé. Voici les différents cas qui peuvent apparaître dans la figure ci-dessous.

A la vue de la figure ci-dessus (Figure 1), on se rend bien compte que la structure du cône proximal $N_S^P(s)$ dépend de la forme de l'ensemble S dans un voisinage de s. Ceci peut se résumer par la proposition suivante dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 1.4. *Soit $\delta > 0$ donné, alors un vecteur ζ appartient à $N_S^P(s)$ ssi il existe $\sigma = \sigma(\zeta, s)$ tel que*

$$\langle \zeta, s' - s \rangle \leq \sigma \|s' - s\|^2 \quad \forall s' \in S \cap B(s, \delta). \tag{1.1}$$

Il est d'autre part intéressant de noter que lorsque l'ensemble S est convexe, le cône proximal coïncide avec le cône normal habituel. Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 1.5. *Soit S un fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors S est convexe ssi*

$$\forall \zeta \in N_S^P(s), \langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0 \quad \forall s' \in S.$$

Preuve. Commençons par la condition nécessaire. Soit $s \in S$ et ζ un élément de $N_S^P(s)$; alors, par la proposition 1.2 (ii), il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\mathrm{proj}_S(s + t_0\zeta) = s.$$

En fait, par convexité, cette propriété est vérifiée pour tout $t \geq 0$. En effet, si pour un certain $t > t_0$, on avait $\mathrm{proj}_S(s + t\zeta) = s' \neq s$, alors on aurait $\|s + t_0\zeta - (s + \frac{t_0}{t}(s' - s))\| = \frac{t_0}{t}\|s + t\zeta - s'\|$ et $s + \frac{t_0}{t}(s' - s) \in S$ par convexité!

Ainsi le $\sigma = \frac{1}{2t}$ peut être choisi aussi petit qu'on veut, on obtient l'inégalité cherchée à la limite.

Passons à la condition suffisante. Par hypothèse, pour tout couple (s, ζ) avec $s \in S$ et $\zeta \in N_S^P(s)$, l'ensemble S est inclus dans

$$H(s, \zeta) := \{s' : \langle \zeta, s' - s \rangle \leq 0\}$$

qui est soit l'espace tout entier (dans le cas où $\zeta = 0$), soit un demi-espace, c'est à dire dans tous les cas un ensemble convexe. Ainsi, S est inclus dans l'intersection de tous les $H(s, \zeta)$ où s parcourt S et ζ les différents cônes $N_S^P(s)$. Par ailleurs, si x appartient à cette intersection, alors pour tout $s \in \mathrm{proj}_S(x)$, comme $x - s \in N_S^P(s)$, on a $\langle x - s, x - s \rangle \leq 0$, ce qui implique que $x = s \in S$. Par conséquent, les deux ensembles coïncident et, une intersection de convexes étant convexe, l'ensemble S est lui-aussi convexe. $\square$

Dans, le cas d'un ensemble convexe, le cône normal n'est jamais réduit à $\{0\}$ sur le bord de S (noté ∂S). Ce n'est bien évidemment pas le cas lorsque S est quelconque; nous pouvons en revanche donner le résultat suivant.

Proposition 1.6. *Soit S un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors $N_S^P(s) \neq \{0\}$ pour s appartenant à un ensemble dense de ∂S.*

Preuve. Soit $s \in \partial S$, il faut donc montrer qu'il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de ∂S qui converge vers S et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, N_S^P(s_n) \neq \{0\}.$$

Comme s est sur le bord de S, il existe une première suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points n'appartenant pas à S et qui converge vers s. Ainsi, chacun des x_n possède au moins un projeté sur S, notons-le s_n. Par construction, $N_S^P(s_n)$ contient la normale proximale $x_n - s_n$ et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s. $\square$

1.2. Convexité au bord

Nous introduisons maintenant une notion qui se révèlera très intéressante par la suite. Il s'agit de regarder les ensembles dont l'application projection est bien définie au voisinage de ceux-ci; on pourra aller consulter [**20**] et [**26**].

Définition 1.7. Soit S un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. On dira que S est convexe au bord si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de S tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \text{il existe un unique } s \in S \text{ tel que } d_S(x) = \|x - s\|.$$

Dans le cas d'un ensemble convexe au bord, l'application $x \mapsto \mathrm{proj}_S(x)$ est bien définie, c'est à dire qu'elle associe un unique point à chaque x de $\mathbb{R}^n$. De nombreux ensembles vérifient cette propriété de convexité au bord; parmi ceux-ci, on peut citer les convexes et les ensembles à bord lisse (au moins C^2) tels que la sphère ou encore le tore.
Nous pouvons tout de suite relier cette notion à celle évoquée dans la section précédente.

Théorème 1.8. *Soit S un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble S est convexe au bord si et seulement si le σ de l'inégalité (1.1) peut être choisi uniforme sur les compacts de $S \times \mathbb{R}^n$.*

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs lemmes.

Lemme 1.9. *Si l'application projection est définie dans un voisinage de S, alors elle est continue.*

PREUVE. Soit x dans le voisinage où l'application projection est définie. Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite convergeant vers x. Par définition du projeté, on a pour tout n,

$$\|\mathrm{proj}_S(x_n) - x\| \leq \|x_n - \mathrm{proj}_S(x)\| + \|x_n - x\|.$$

Donc, comme x_n tend vers x, la suite $(y_n = \mathrm{proj}_S(x_n))_{n\in N}$ est bornée à partir d'un certain rang; elle admet donc une valeur d'adhérence $y \in \mathbb{R}^n$.
Donc par continuité de l'application $d_S(.)$:

$$\lim_{n\to+\infty} d_S(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|.$$

Or comme S est fermé, $y \in S$ et donc par unicité du projeté, $y = \mathrm{proj}_S(x)$.
On conclut par unicité de la valeur d'adhérence. □

Lemme 1.10. *Si l'application projection est définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de S, alors l'application $d_S(.)$ est différentiable en tout point de $\mathcal{V}\setminus S$.*

PREUVE. On va montrer que $d_S(.)^2$ est différentiable en tout point de $\mathcal{V} \setminus S$.
En composant ensuite par $t \longmapsto \sqrt{t}$, $d_S(x)$ sera différentiable en tout point là où elle est non nulle.
On a

$$\begin{aligned} d_S(y)^2 - d_S(x)^2 &\leq \|y - \mathrm{proj}_S(x)\|^2 - \|x - \mathrm{proj}_S(x)\|^2 \\ &\leq \|y - x\|^2 + 2\langle y - x, x - \mathrm{proj}_S(x)\rangle \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow d_S(y)^2 - d_S(x)^2 - 2\langle x - \mathrm{proj}_S(x), y - x\rangle \leq \|y - x\|^2 = o(\|y - x\|).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} d_S(x)^2 - d_S(y)^2 &\leq \|x - \mathrm{proj}_S(y)\|^2 - \|y - \mathrm{proj}_S(y)\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + 2\langle y - \mathrm{proj}_S(y), x - y\rangle \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow d_S(y)^2 - dS(x)^2 \geq \|x - y\|^2 + 2\langle \mathrm{proj}_S(x) - \mathrm{proj}_S(y), y - x\rangle,$$

et ceci est un $o(\|x - y\|)$ par Cauchy-Schwarz et le lemme précédent.
On a donc démontré que

$$\lim_{y\to x} \frac{|d_S(y)^2 - d_S(x)^2 - 2\langle x - \mathrm{proj}_S(x), y - x\rangle|}{\|y - x\|} = 0.$$

d_S est donc différentiable en tout $x \in \mathcal{V} \setminus S$. □

Lemme 1.11. *Si l'application $d_S(.)$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ et $s_x \in S$ tel que $d_S(x) = \|x - s_x\|$, alors*

$$\nabla d_S(x) = \frac{x - s_x}{\|x - s_x\|}.$$

Preuve. Posons $x_t = tx + (1-t)s_x$ pour $t \in [0,1]$.
Il est clair que $\|x_t - s_x\| = d_S(x_t)$.
Donc $d_S(x_t) = t\|x - s_x\| \Longrightarrow \langle \nabla d_S(x), x - s_x\rangle = \|x - s_x\|$.
Or $d_S(.)$ est 1-lipschitzienne, donc $\|\nabla d_S(x)\| \leq 1$.
Donc par Cauchy-Schwarz (cas d'égalité dans l'inégalité):

$$\nabla d_S(x) = \frac{x - s_x}{\|x - s_x\|}.$$

□

Passons maintenant à la preuve du Théorème 1.8.

Preuve. Comme S est convexe au bord, il existe par définition un voisinage $\mathcal{V}$ de S sur lequel la projection $P = \mathrm{proj}_S(.)$ est définie. Ainsi, d'après les trois lemmes précédents l'application $d_S(.)$ est différentiable sur $\mathcal{V} \setminus S$. Or par le dernier lemme, son gradient vaut $\frac{x-s_x}{\|x-s_x\|}$ (de norme 1); la projection étant continue par le premier lemme, $d_S(.)$ est même C^1 sur $\mathcal{V} \setminus S$.
Fixons un point x_0 dans $\mathcal{V} \setminus S$.
Comme le gradient de d_S est continu, le problème de Cauchy

$$\dot\gamma(t) = \nabla d_S(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x_0$$

admet une solution locale (ceci est le théorème de Cauchy-Peano).
Il existe donc $\epsilon > 0$ tel qu'on ait une solution γ de notre problème de Cauchy sur $]-\epsilon, \epsilon[$.
Soient t_1 et t_2 dans l'intervalle ouvert $]-\epsilon, \epsilon[$.

$$\begin{aligned} d_S(\gamma(t_2)) - d_S(\gamma(t_1)) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(d_S(\gamma(s)))ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla d_S(\gamma(s))\|^2 ds \\ &= t_2 - t_1. \end{aligned}$$

D'autre part, la longueur de l'arc défini par γ sur $[t_1, t_2]$ vaut

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma(s)}\| ds = t_2 - t_1.$$

Or il est clair que la longueur de cet arc est supérieure à $\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|$.
On a donc, comme d_S est 1-lipschitzienne:

$$\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| \leq t_2 - t_1 = d_S(\gamma(t_1)) - d_S(\gamma(t_2)) \leq \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|.$$

Ainsi pour tout couple (t_1, t_2) : $\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| = t_2 - t_1$. Ceci démontre que localement γ s'écrit : $\gamma(t) = x_0 + t\nabla d_S(x_0)$.
En définissant une solution maximale de notre problème de Cauchy, la solution persistera tant que $x_0 + t\nabla d_S(x_0)$ sera dans $\mathcal{V} \setminus S$ pour t proche de 0.
Revenons à notre problème, considérons s un point de ∂S et ζ un élément de son cône proximal $N_S^P(s)$. Par la proposition 1.2 (ii), il

existe $\delta > 0$ tel que $\text{proj}(s + t\delta) = s$. D'après l'étude précédente, il existe un arc γ défini autour de 0 solution du problème de Cauchy pour $s + \delta\zeta$, c'est à dire:

$$\dot{\gamma}(t) = \nabla d_S(\gamma(t)), \gamma(0) = s + \delta\zeta.$$

Comme on l'a vu précédemment, γ s'écrit:

$$\gamma(t) = s + \delta\zeta + t\frac{s + \delta\zeta - \text{proj}(s + \delta\zeta)}{\|s + \delta\zeta - \text{proj}(s + \delta\zeta)\|}$$

et $d_S(\gamma(t)) = d_S(s+\delta\zeta)+t$. Par conséquent, notre solution sera définie sur $[0, d(s + \delta\zeta, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V})[$. Ceci démontre que pour tout point s de ∂S, pour tout ζ, on a

$$\text{proj}_S\left(s + \frac{1}{2}d(s, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{V})\zeta\right) = s.$$

A la vue de la démonstration de la proposition 1.2, cela signifie que le σ ($\sigma = \frac{1}{2t}$) de (1.1) peut être choisi uniforme sur les compacts de $S \times \mathbb{R}^n$.

Il nous reste à démontrer la réciproque.

Soit $z \in R^n$ tel que $x \neq y \in \text{proj}_S(z)$. Il est clair que pour tout $t > 1, x \notin \text{proj}_S(x + t(z - x))$. Ceci signifie que pour $\zeta = \frac{z-x}{\|z-x\|} \in N_S^P(x)$, le σ de l'inégalité (1.1) est obligatoirement supérieur à $\frac{1}{2\|z-x\|}$. Ceci démontre qu'on ne pourra pas trouver de points arbitrairement proches de S qui auront au moins deux projetés; l'ensemble S est par conséquent convexe au bord. □

Remarque 1.12. La démonstration de la condition nécessaire permet aussi de montrer le théorème de Motzkin (également appelé Théorème de Bunt).

Théorème 1.13. *Soit S un fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors S est convexe ssi chaque point de $\mathbb{R}^n$ a un unique projeté sur S.*

Preuve. D'après la démonstration précédente, les σ de (1.1) peuvent être pris arbitrairement petits, ce qui signifie par la proposition 1.5 que l'ensemble S est convexe. La réciproque est évidente. □

On pourra aussi consulter [**43**] pour une preuve à la main et [**41**] pour un survol sur le théorème de Motzkin.

1.3. Cônes tangents et cônes normaux

Il est possible d'associer d'autres types de cônes à un ensemble S de $\mathbb{R}^n$. Une première approche est donnée par le cône tangent de Bouligand (aussi appelé cône contingent) noté $T_S^B(x)$ pour $x \in S$; il est défini de la manière suivante:

$$T_S^B(x) := \left\{\lim_{i\to\infty} \frac{x_i - x}{t_i} : x_i \xrightarrow{S} x, t_i \downarrow 0\right\},$$

où $x_i \xrightarrow{S} x$ signifie que les x_i tendent vers x tout en restant dans S.
Nous pouvons d'ores et déjà relier le cône de Bouligand au cône de proximal ou plutôt à son cône polaire $N_S^P(x)^\circ := \{\xi : \langle \xi, \zeta \rangle \leq 0, \forall \zeta \in N_S^P(x)\}$.

Proposition 1.14. $\forall x \in S, T_S^B(x) \subset N_S^P(x)^\circ$.

PREUVE. La preuve est laissée au lecteur. □

Un autre cône défini par Clarke est d'une grande utilité; il s'agit du cône normal de Clarke $N_S^C(x)$ défini de la manière suivante pour $x \in S$:

$$N_S^C(x) := \mathrm{co}\left\{N_S^L(x)\right\},$$

$$\text{avec} \quad N_S^L(x) := \left\{\zeta : \zeta = \lim_{i \to \infty} \zeta_i \text{où } \zeta_i \in N_S^P(x_i) \text{ et } x_i \xrightarrow{S} x\right\}.$$

(Le cône $N_S^L(x)$ est lui, appelé cône limite en x.)
Il est rare que les trois cônes $N_S^P(x)$, $N_S^L(x)$ et $N_S^C(x)$ coïncident. Celà peut arriver dans le cas d'un ensemble à bord lisse (au moins C^2) ou plus généralement dans le cas d'un ensemble convexe au bord. On a la proposition suivante.

Proposition 1.15. *Si S est un ensemble convexe au bord, alors*

$$N_S^L(s) = N_S^C(s) = N_S^P(s), \quad \forall s \in S.$$

PREUVE. C'est une conséquence facile du théorème 1.8. □

2. Calcul différentiel non lisse

2.1. Sous-gradients proximaux

Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement (noté sci). Rappelons qu'on appelle épigraphe de f l'ensemble

$$\mathcal{E}pi(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; f(x) \leq y\}.$$

Cet ensemble est fermé dans le cas d'une fonction semi-continue inférieurement (c'est même une condition nécessaire et suffisante).

Définition 2.1. $\xi \in \mathbb{R}^n$ est appelé sous-gradient proximal de f en x ssi

$$(\xi, -1) \in N_{\mathcal{E}pi(f)}^P(x, f(x)).$$

L'ensemble de tous ces ξ est noté $\partial_P f(x)$, sous-différentiel proximal de f en x.

Remarque 2.2. La remarque 1.3 nous permet immédiatement d'affirmer que $\partial_P f(x)$ est un ensemble convexe.

Donnons maintenant une caractérisation analytique du sous-différentiel proximal. Celle-ci est fondamentale, elle constitue presque une nouvelle définition des sous-gradients proximaux.

Théorème 2.3. *$\xi \in \partial_P f(x)$ ssi $\exists \sigma \geq 0$ tel que*

$$f(y) - f(x) + \sigma \|y - x\|^2 \geq \langle \xi, y - x \rangle \tag{2.1}$$

pour tout y dans un voisinage de x.

Preuve. Commençons par la condition suffisante. L'inégalité (2.1) implique que pour tout $\alpha \geq f(y)$ avec y assez proche de x, on a

$$\alpha - f(x) + \sigma[\|y - x\|^2 + |\alpha - f(x)|^2] \geq \langle \zeta, y - x \rangle.$$

Ce qui peut s'écrire en passant dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\langle (\zeta, -1), [(y, \alpha) - (x, f(x))] \rangle \leq \sigma \|(y, \alpha) - (x, f(x)\|^2.$$

On reconnait (1.1), ce qui signifie que $(\zeta, -1) \in N^P_{\mathcal{E}pi(f)}(x, f(x))$.
Il reste la condition nécessaire. Supposons que $(\zeta, -1) \in N^P_{\mathcal{E}pi(f)}(x, f(x))$. Par la proposition 1.2, il existe $t > 0$ tel que

$$(x, f(x)) \in \mathrm{proj}_{\mathcal{E}pi(f)}((x, f(x)) + t(\zeta, -1)).$$

Ce qui implique pour tout (y, α) dans $\mathcal{E}pi(f)$:

$$\begin{aligned} t^2 \|(\zeta, -1)\|^2 &\leq \|[(x, f(x)) + t(\zeta, -1)] - (y, \alpha)\|^2 \\ \Rightarrow t^2 \|\zeta\|^2 + t^2 &\leq x + t\zeta - y\|^2 + (f(x) - f(y) - t)^2 \\ \Rightarrow (f(x) - f(y) - t)^2 &\geq t^2 + 2t\langle \zeta, y - x \rangle - \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Maintenant, t étant constant, il est clair que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est positif pour y suffisamment proche de x. Par ailleurs, on peut supposer que pour $y \in B(x, \eta)$, $f(y) - f(x) + t > 0$ (ceci car f est sci). Ainsi, en prenant la racine carré de l'inégalité démontrée plus haut, on obtient

$$f(y) \geq g(y) := f(x) - t + \{t^2 + 2t\langle \zeta, y - x \rangle - \|x - y\|^2\}^{1/2} \tag{2.2}$$

pour tout y dans $B(x, \eta)$. Un petit calcul premet de voir que $g'(x) = \zeta$ et que g'' existe et est bornée (disons par $2\sigma > 0$); ainsi, quitte à modifier η, on a

$$g(y) \geq g(x) + \langle \zeta, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2 \quad \forall y \in B(x, \eta).$$

On peut alors conclure par (2.2). $\square$

Remarque 2.4. La preuve est considérablement simplifiée lorsque la fonction f est supposée localement lipschitzienne. En effet, la condition suffisante reste identique (le σ de (1.1) peut être pris égal à celui de (2.1). En revanche, si $(\zeta, -1) \in N^P_{\mathcal{E}pi(f)}(x, f(x))$, la proposition 1.2 (iii) permet d'affirmer qu'il existe $\sigma \geq 0$ tel que

$$\langle \zeta, y - x \rangle - (f(y) - f(x)) \leq \sigma \|y - x\|^2 + (f(y) - f(x))^2,$$

pour tout y proche de x. Maintenant, $|f(y) - f(x)|$ est borné localement par $K|y - x|$; ceci nous permet de conclure avec $\sigma' := \sigma + K$.

Le théorème 2.3 nous permet de raccrocher le sous-différentiel proximal aux différentes notions de gradients dans la cas d'une fonction plus régulière. nous résumons cela dans la proposition suivante dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 2.5.
(a) *Si f est Gâteaux différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\partial_P f(x) \subseteq \{f'_G(x)\}$.*
(b) *Si f est C^2, $\partial_P f(x) = \{\nabla f(x)\}$.*
(c) *Si f est convexe, alors $\zeta \in \partial_P f(x)$ ssi*

$$f(y) \geq f(x) + \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

En outre, il est important de donner une propriété fondamentale vérifiée par le sous-différentiel proximal et découlant elle-aussi du théorème 2.3.

Proposition 2.6. *Si f atteint son minimum local en $\bar{x}$, alors $0 \in \partial_P f(\bar{x})$.*

Preuve. L'inégalité du Théorème 2.3 est trivialement vérifiée avec σ égal à 0. □

La dernière proposition représente l'équivalent de la règle de Fermat dans le cas non-lisse. En fait, un calcul différentiel très performant a été développé pour le sous-différentiel proximal; nous invitons le lecteur à consulter le livre de Clarke, Ledyaev, Stern et Wolenski [**24**] ainsi que deux articles de Clarke et Ledyaev [**17, 18**]. Ces derniers ont généralisé le théorème des accroissements finis au cas du sous-différentiel proximal; ce résultat implique des règles de composition et de sommation que nous n'exposerons pas ici; il implique en outre, la proposition suivante.

Proposition 2.7. *Soit f une fonction semi-continue inférieurement de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est K-Lipschitzienne si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \zeta \in \partial_P f(x), \|\zeta\| \leq K.$$

Citons également deux propriétés simples vérifiées par le sous-différentiel proximal.

Proposition 2.8. *Soient f et g des fonctions sci sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.*
(i) *Si $\zeta \in \partial_P \min\{f, g\}(x)$, alors $\zeta \in \partial_P f(x)$ si le minimum est atteint pour $f(x)$ et $\zeta \in \partial_P g(x)$ dans l'autre cas.*
(ii) *Si g est de plus C^2, $\partial_P(f + g)(x) = \partial_P f(x) + \nabla g(x)$.*

Preuve. (i) Si le minimum est atteint pour $f(x)$, on peut écrire pour un certain $\sigma \geq 0$,

$$\begin{aligned} \min\{f(y), g(y)\} - f(x) + \sigma\|y - x\|^2 &\geq \langle \zeta, y - x \rangle \\ f(y) - f(x) + \sigma\|y - x\|^2 &\geq \langle \zeta, y - x \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $\zeta \in \partial_P f(x)$. L'autre cas est identique.

(ii) Comme g est deux fois différentiable dans un voisinage de x, on peut trouver une constante σ' telle que

$$g(x) - g(y) + \sigma' \|y - x\|^2 \geq \langle -\nabla g(x), y - x \rangle,$$

pour tout y dans un voisinage de x. D'autre part, comme ζ est élément de $\partial(f + g)(x)$, par le théorème 2.3 il existe une autre constante σ telle que

$$f(y) + g(y) - f(x) - g(x) + \sigma \|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle,$$

là aussi dans un certain voisinage de x. En sommant ces deux inégalités, on obtient:

$$f(y) - f(x) + (\sigma' + \sigma)\|y - x\|^2 \geq \langle \zeta - \nabla g(x), y - x \rangle$$

quand y est dans l'intersection de nos deux voisinages. Ceci implique, toujours par le théorème 2.3 que $\zeta - \nabla g(x) \in \partial_P f(x)$.

□

Nous pouvons de manière équivalente, lorsque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement, définir son sur-différentiel proximal. En effet $-f$ est une fonction sci, on peut alors définir le sur-différentiel proximal $\partial^P f(x)$.

Définition 2.9. $\partial^P f(x) := -\partial_P(-f)(x)$.

Toutes les propriétés vérifiées par le sous-différentiel proximal demeurent.

2.2. Gradients généralisés

L'objet que nous allons introduire maintenant peut être défini d'une toute autre manière dans le cas très général d'une fonction semi-continue inférieurement sur un espace de Banach et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (voir [**16, 24**]). Nous donnons ici une construction équivalente dans le cas de la dimension finie et dans le cas localement Lipschitz.

Définition 2.10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne, on note $\partial f(x)$ le gradient généralisé de f en $x \in \mathbb{R}^n$; il est défini de la manière suivante:

$$\partial f(x) := \text{co}\{\lim \zeta_k : x_k \to x, \zeta_k \in \partial_P f(x_k)\}.$$

Il apparaît alors par les propositions 1.6 et 2.7 que les $\partial f(x)$ sont des ensembles convexes compacts non-vides ; de plus, l'application multivoque $x \mapsto \partial f(x)$ est semi-continue supérieurement (voir chapitre suivant).

Le gradient généralisé, introduit par Clarke en 1973, s'adapte très bien aux règles du calcul différentiel habituel; nous avons en particulier les deux propositions ci-dessous. Nous invitons encore une fois le lecteur à aller consulter les références habituelles ([**16, 24**]) pour les démonstrations de ces résultats.

Proposition 2.11. *Soient f et g deux fonctions localement Lipschitziennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$; on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x).$$

Proposition 2.12. *Soient $f_1, f_2, \cdots, f_p$ des fonctions localement Lipschitziennes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$g(x) := \max\{f_i(x) : i = 1, 2, \cdots, p\}.$$

Alors la fonction g est localement Lipschitzienne et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\partial g(x) \subset \operatorname{co}\{\partial f_i(x) : i = 1, 2, \cdots, p\}.$$

Pour finir, nous nous devons de signaler que le gradient généralisé ci-dessus coïncide avec une définition basée sur le théorème de Rademacher. Comme la fonction f est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, elle est différentiable en fait presque partout ; on a en outre le résultat suivant:

$$\partial f(x) := \operatorname{co}\{\lim \nabla f(x_k) : x_k \to x, x_k \in D_f \setminus N\},$$

où D_f désigne l'ensemble des points où f est différentiable, et où la mesure de Lebesgue de l'ensemble N est nulle.
On déduit en particulier de cette dernière remarque que le gradient généralisé et le gradient habituel coïncident dans le cas d'une fonction C^1.
Il nous reste à conclure la section concernant le calcul différentiel non lisse en donnant un lemme qui apporte une condition suffisante pour que les différents différentiels que nous avons définis, coïncident.

Lemme 2.13. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne et $x \in \mathbb{R}^n$; si le sous-différentiel proximal $\partial_P f(x)$ et le super-différentiel proximal $\partial^P f(x)$ sont non vides, alors*

$$\partial_P f(x) = \partial^P f(x) = \partial f(x) = \{f(x)\}.$$

La preuve, très facile est laissée au lecteur.

3. Fonctions semi-convexes

3.1. Premières définitions

Définition 3.1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Elle est dite semi-convexe si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe deux constantes $\delta, C > 0$ telles que

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \leq C\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in B(x_0, \delta).$$

Il n'est pas difficile de voir que lorsque la fonction f est semi-convexe sur Ω, alors pour tout $x_0 \in \Omega$, la fonction

$$x \mapsto f(x) + \frac{C}{2}\|x\|^2$$

est convexe sur $B(x_0, \delta)$. Cette remarque, combinée au (c) de la proposition 2.5 implique la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction semi-convexe sur Ω, alors le σ de l'inégalité (2.1) peut être pris uniforme sur les compacts de Ω. En particulier, f est localement Lipschitzienne et pour tout $x \in \Omega, \partial_P f(x) = \partial f(x)$.*

Il est possible de relier la semi-convexité d'une fonction à la convexité au bord de son épigraphe; nous avons le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *La fonction f est semi-convexe sur $\mathbb{R}^n$.*
(ii) *Le σ de l'inégalité (2.1) peut être pris uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}^n$.*
(iii) *$\mathcal{E}pi(f)$ est convexe au bord.*

PREUVE. La partie (i) $\Longrightarrow$ (ii) correspond au résultat de la proposition précédente, le (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est une conséquence du début de la démonstration du théorème 2.3 et pour finir, si l'épigraphe de f est convexe au bord, la remarque 2.4 nous permet de conclure; on obtient (iii) $\Longrightarrow$ (i). $\square$

Terminons en signalant que l'on peut définir aussi la semi-concavité d'une fonction. La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite semi-concave si la fonction $-f$ est semi-convexe. On peut résumer ceci par la définition suivante.

Définition 3.4. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Elle est dite semi-concave sur Ω si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe deux constantes $\delta, C > 0$ telles que

$$f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq C\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in B(x_0, \delta).$$

Evidemment, on peut adapter la proposition 3.2 et le théorème 3.3 au cas semi-concave.

3.2. Ensemble des singularités

Nous donnons maintenant des résultats en partie issus de l'article de Alberti, Ambrosio et Cannarsa [**1**]. Considérons donc une fonction

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{semi-convexe sur } \Omega,$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On pose pour tout entier naturel $k \in [0, n]$

$$\Sigma^k(f) := \{x \in \Omega : \dim(\partial f(x)) = k\};$$

et pour tout $\alpha > 0$, on note $\Sigma^k_\alpha(f)$ l'ensemble des x de $\Sigma^k(f)$ pour lesquels $\partial f(x)$ contient une boule B^k_α de dimension k et de diamètre

2α, soit

$$\Sigma_\alpha^k(f) := \left\{x \in \Omega : \exists B_\alpha^k \subset \partial f(x) \text{ avec } \operatorname{diam}(B_\alpha^k) = 2\alpha\right\}.$$

Par ailleurs, pour tout ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$, on désignera par $S^\perp$ l'ensemble défini par

$$S^\perp := \{p \in \mathbb{R}^n : q \mapsto \langle q, p\rangle \text{ is constant on } S\}.$$

Proposition 3.5. *Les ensembles $\Sigma_\alpha^k(f)$ sont des fermés de Ω, et*

$$T^B_{\Sigma_\alpha^k(f)}(x) \subset [\partial f(x)]^\perp, \quad \forall x \in \Sigma_\alpha^k(f) \setminus \Sigma_\alpha^{k+1}(f). \tag{3.1}$$

Preuve. Commençons par montrer que l'ensemble $\Sigma_\alpha^k(f)$ est fermé dans Ω. Soit $\{x_i\}_i$ une suite de points de $\Sigma_\alpha^k(f)$ convergeant vers $x \in \Omega$, et soit $B_\alpha^k(p_i) \subset \partial f(x_i)$ une suite de boules de dimension k centrées en p_i. Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $p_i \to p$. Ainsi, comme le gradient généralisé est semi-continu supérieurement, à la limite $B_\alpha^k(p) \subset \partial f(x)$, c'est à dire $x \in \Sigma_\alpha^k(f)$.
Maintenant, considérons x dans $\Sigma_\alpha^k(f) \setminus \Sigma_\alpha^{k+1}(f)$. Pour montrer (3.1), il nous suffit de démontrer que l'application $p \mapsto \langle \eta, p\rangle$ est constante sur $\partial f(x)$ pour tout $\eta \in T^B_{\Sigma_\alpha^k(f)}(x)$ avec $\|\eta\| = 1$. Soit donc $\eta \in T^B_{\Sigma_\alpha^k(f)}(x)$ associée à une suite $\{x_i\}_i$ (convergeant vers x) de points de $\Sigma_\alpha^k(f) \setminus \{x\}$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_i - x}{\|x_i - x\|} = \eta.$$

Chaque $\partial f(x_i)$ contient une boule de dimension k et de rayon α; ainsi, comme précédemment, en considérant les centres de ces différentes boules et en prenant une valeur d'adhérence de cette suite, on démontre qu'une certaine boule B_α^k est contenue dans $\partial f(x)$. Et en outre, chaque point de B_α^k peut être approximé par des points de $\partial f(x_i)$. Par hypothèse, x est tel que $\partial f(x)$ est de dimension k, on peut donc se contenter de démontrer que l'application $p \mapsto \langle \eta, p\rangle$ est constante sur la boule B_α^k.
Pour cela, prenons p et p' dans $B_\alpha^k \subset \partial f(x)$. Par le travail ci-dessus, il existe une suite $\{p_i\}_i$ de points de $\partial f(x_i)$ qui converge vers p'. Par ailleurs, d'après la proposition 3.2, on peut trouver un $\sigma \geq 0$ et un voisinage de $\mathcal{V}$ de x tel que:

$$f(z) - f(y) + \sigma\|z - y\|^2 \geq \langle \zeta, z - y\rangle, \forall y, z \in \mathcal{V}, \forall \zeta \in \partial f(y). \tag{3.2}$$

En appliquant simultanément l'inégalité (3.2) à $y = x, z = x_i$, et $\zeta = p$ (pour i assez grand) puis à $y = x_i, z = x$, et $\zeta = p_i$ (pour i assez grand), on obtient en sommant:

$$\langle p, \eta\rangle \leq \langle p', \eta\rangle.$$

on conclut en inversant les rôles de p et p'. $\square$

CHAPITRE II

Fonctions Lyapunov non lisses, application au problème intégrateur

1. Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier les systèmes commandés de la forme

$$\dot{x} = f(x, u)$$

qui possèdent de bonnes propriétés de stabilisation à l'origine. Dans un premier temps, se basant sur les travaux de Kurzweil [**49**] (et Massera [**59**] dans le cas local), on peut démontrer que si le système commandé admet un retour d'état continu $u : \mathbb{R}^n \to U$ rendant le système en boucle fermé

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

globalement asymptotiquement stable à l'origine, alors on peut lui associer une fonction dite de Lyapunov, lisse et strictement décroissante le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x, u(x))$. La réciproque est fausse; de nombreux systèmes possédant des fonctions Lyapunov lisses n'admettent pas de retour d'état stabilisant continu. Cependant, comme l'a démontré Artstein [**4**], de tels systèmes possèdent des retours d'états relaxés continus, et si de plus le système est affine en la commande, ceux-ci correspondent à des boucles fermées continues classiques. Cependant les retours d'état relaxés ne constituent pas l'unique recours pour pallier le manque de retour d'état continu stabilisant. En effet, d'autres types de retours d'état basées sur des applications multivoques introduites par Filippov [**36**] ou par Krasovskii [**45**] permettent eux aussi de stabiliser correctement les systèmes qui admettent des fonctions Lyapunov lisses. Ces derniers associent à une boucle fermée bien choisie $x \mapsto f(x, u(x))$ (non nécessairement continue), des inclusions différentielles qui font preuve de très bonnes propriétés de stabilisation à l'origine. En fait, leurs trajectoires sont à rapprocher des trajectoires perturbées associées à l'équation discontinue $\dot{x} = f(x, u(x))$ (voir [**55**]); c'est pourquoi on reliera à la fin de cet chapitre l'existence de tels retours d'états à certaines propriétés de robustesse. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de travailler avec des fonctions lisses; l'utilisation des gradients généralisés de Clarke permet d'adapter la définition de fonction Lyapunov classique au cas des fonctions seulement localement Lipschitziennes, alors appelées fonctions Lyapunov au sens des gradients généralisés. Pour résumé, nous démontrons dans cet chapitre

que l'existence d'une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés est équivalente à celle d'une fonction Lyapunov lisse classique et à celle de retour d'état stabilisant de type Krasovskii ou Filippov. Ceci nous permet en outre, comme Artstein [**4**], de retrouver des retours d'état continus dans le cas de systèmes affines en la commande. Par ailleurs, comme nous le verrons dans le cas du système avec intégrateur, il est parfois possible d'associer simplement à un système, une fonction localement Lipschitzienne qui se révèle être une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés. C'est de cette manière que l'on pourra résoudre le problème intégrateur (déjà étudié dans [**14, 30, 31, 32, 75, 83**]) lorsque la dynamique n'est pas lisse. Pour finir, nous étendons dans la dernière section le théorème d'équivalences cité plus haut, au cas de la stabilisation vers un compact, retrouvant ainsi certains des résultats présentés dans [**57**].
Tout au long de ce chapitre, nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée et B la boule unité ouverte, $\overline{B}$ son adhérence. Nous noterons également $d_S(x)$ la distance de x à l'ensemble S.

2. Définitions et présentation des résultats

Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes commandés de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

où l'état $x(t)$ est dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et la commande $u(t)$ dans un ensemble de commande donné U. Nous supposerons de plus que la fonction f est continue de $\mathbb{R}^n \times U$ dans $\mathbb{R}^n$ et qu'elle admet un point d'équilibre en 0, c'est à dire $f(0,0) = 0$ (où "0" est une commande particulière dans U). En outre, les trajectoires de (2.1) seront des arcs absolument continus $x(\cdot)$ associés à des boucles ouvertes $u : [0, \infty[\to U$ et solutions de (2.1) presque partout en t.
Notre objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence de fonction Lyapunov lisse. Commençons par donner la définition correspondant à cette notion. Pour celà, nous dirons qu'une fonction $V : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ est définie positive si elle est à valeurs positives et s'annule seulement à l'origine et elle sera dite propre si $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$, ou de manière équivalente si l'image réciproque d'un compact est un compact.

Définition 2.1. Soit $V : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application C^1. Elle est dite fonction Lyapunov pour le système (2.1) si elle est définie positive, propre et si elle vérifie de plus la condition suivante: Pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe un sous-ensemble compact de commandes $U_0 \subset U$ tel que

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \min_{u \in U_0} \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle < 0. \tag{2.2}$$

Comme l'ont démontré Kurzweil [**49**] et Massera [**59**], si le système (2.1) admet un retour d'état continu, c'est à dire une fonction

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow U \text{ continue}$$

rendant le système $\dot{x} = f(x, u(x))$ asymptotiquement stable, alors il possède une fonction Lyapunov lisse (C^∞). Malheureusement, la réciproque est fausse; la présence d'une fonction Lyapunov lisse ne conduit généralement pas à l'existence de retours d'état stabilisants continus. Donnons pour nous en convaincre, l'exemple cité par Sontag dans [**75**]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_2 u_3 \\ \dot{x}_2 &= u_1 u_3 \\ \dot{x}_3 &= u_1 u_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

, où $(u_1, u_2, u_3) \in \overline{B}$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$.
La fonction $x \mapsto \|x\|^2$ est une fonction Lyapunov lisse pour ce système et pourtant il n'admet pas de retour d'état continu. En effet, aucun point du type $(0, 0, \epsilon)$ n'appartient à l'ensemble $f(x, u)$ pour x dans un voisinage de l'origine et u dans la boule $\overline{B}$; en d'autre terme, le système (2.3) ne vérifie pas la condition de Brockett [**13**], nécessaire à l'existence d'un retour d'état continu. Cette lacune nous conduit à considérer des retours d'état d'un autre type. Nous allons avoir recours aux inclusions différentielles; introduisons pour celà une nouvelle définition.
Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une fonction multivaluée ou multifonction, nous dirons qu'elle vérifie l'hypothèse (H) si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(H1) Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $F(x)$ est un ensemble compact convexe non vide.

(H2) La multifonction F est semi-continue supérieurement; c'est à dire, $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow F(y) \subset F(x) + \epsilon B.$$

L'hypothèse (H) constitue le cadre habituel dans lequel on étudie l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{p.p.} \tag{2.4}$$

associée à F. Nous confondrons parfois par abus de notation la multifonction F et son inclusion différentielle associée (2.4). Nous invitons le lecteur à aller consulter [**35**], [**8**] et [**7**] pour une étude détaillée des fonctions multivaluées et des inclusions différentielles. Il est maintenant possible d'étendre les définitions de stabilité asymptotique du cas des systèmes dynamiques continus à celui, plus général des inclusions différentielles.

Définition 2.2. L'inclusion différentielle (2.4) est dite Globalement Asymptotiquement Stable (abrégé GAS) si toutes ses solutions sont définies sur $[0, \infty[$ et si les propriétés suivantes sont vérifiées:

(a) Attraction uniforme: Pour tout $0 < r < R$, il existe $T = T(r,R) > 0$ tel que pour toute solution de (2.4) vérifiant $\|x(0)\| \leq R$, on a
$$\|x(t)\| \leq r \quad \forall t \geq T.$$
(b) Stabilité uniforme: Il existe une fonction croissante continue
$$M :]0,\infty[\to]0,\infty[$$
telle que pour toute solution de (2.4) vérifiant $\|x(0)\| \leq R$, on a
$$\|x(t\| \leq M(R) \quad \forall t \geq 0.$$
(c) Stabilité Lyapunov:
$$\lim_{R\downarrow 0} M(R) = 0.$$

Remarque 2.3. Cette définition est tout à fait en accord avec celle utilisée habituellement (voir [**22**] et [**57**]).

Le concept d'inclusion différentielle va maintenant nous permettre de donner un sens à "être solution de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$" lorsque la fonction $x \mapsto f(x, u(x))$ ne possède aucune propriété de continuité. Pour celà, donnons-nous
$$u : \mathbb{R}^n \to U,$$
une application non nécessairement continue. Nous dirons que u est localement à valeurs relativement compactes si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ il existe $\delta_K > 0$ tel que
$$\forall \delta \leq \delta_K, \overline{u(x+\delta B)} \text{ est compact dans } U.$$
On peut associer à la fonction u deux fonctions multivaluées sur $\mathbb{R}^n$; on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$K_u(x) := \overline{\text{co}}\{\cap_{\delta>0} f(x, u(x+\delta B))\}, \tag{2.5}$$
$$\text{et} \quad F_u(x) := \overline{\text{co}}\{\bigcap_{\lambda(N)=0} \bigcap_{\delta>0} f(x, u(x+\delta B \setminus N))\}, \tag{2.6}$$
où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.
Ces multifonctions possèdent de bonnes propriétés de régularité. Si u est localement à valeurs relativement compactes, alors la multifonction K_u vérifie l'hypothèse (H) et en outre, si u est aussi mesurable, alors F_u la vérifie aussi. Sous ces conditions, nous dirons que l'arc absolument continu $x(\cdot)$ est une solution de type Krasovskii (respectivement de type Filippov) de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$ si il est solution de l'inclusion différentielle (2.5) (respectivement de (2.6)). Ceci nous permet de donner la définition suivante.

Définition 2.4. Le système commandé (2.1) admet un retour d'état stabilisant de type Krasovskii (respectivement de type Filippov) si il existe une fonction $u : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ localement à valeurs relativement compactes telle que l'inclusion différentielle associée à (2.5) (respectivement (2.6)) est Globalement Asymptotiquement Stable.

Nous allons maintenant relier l'existence de retour d'état stabilisant de type Krasovskii ou Filippov à celle d'une fonction Lyapunov. Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, il n'est pas nécessaire de travailler avec des fonctions Lyapunov lisses. Introduisons pour celà quelques notions d'analyse non-lisse.
Soit $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne, on note $\partial_P f(\bar{x})$ son sous-différentiel proximal en $\bar{x}$, i.e. l'ensemble des $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\delta, \sigma > 0$ pour lesquels

$$f(y) - f(\bar{x}) + \sigma\|y - \bar{x}\|^2 \geq \langle \zeta, y - \bar{x} \rangle \quad \forall y \in \bar{x} + \delta B.$$

Ceci permet de définir le gradient généralisé de Clarke de f en $\bar{x}$:

$$\partial f(\bar{x}) := \mathrm{co}\{\lim \zeta_k : x_k \to \bar{x}, \zeta_k \in \partial_P f(x_k)\}.$$

Cet objet introduit par Clarke en 1973 s'adapte très bien aux règles du calcul différentiel habituel; en particulier, le gradient généralisé d'une somme de fonctions est contenu dans la somme de leurs gradients généralisés.

Remarque 2.5. La définition du gradient généralisé proposée ci-dessus coïncide tout à fait avec une autre forme souvent proposée, soit:

$$\partial f(\bar{x}) := \mathrm{co}\{\lim \nabla f(x_k) : x_k \to \bar{x}, x_k \in D_f\},$$

où D_f désigne l'ensemble des points où f est différentiable.

Adaptons maintenant la définition classique de fonction Lyapunov dans le cas d'une fonction seulement localement Lipscitzienne.

Définition 2.6. Soit $V : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$; on dit que V est une fonction Lyapunov de commande au sens des gradients généralisés pour le système (2.1) si V est localement Lipschitzienne, définie positive, propre et si elle vérifie la condition suivante: Pour tout ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe un sous-ensemble de commandes $U_0 \subset U$ tel que

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial V(x), \min_{u \in U_0} \langle \zeta, f(x, u) \rangle < 0. \tag{2.7}$$

A l'instar des solutions de viscosité et des sous-gradients proximaux dans le cas faible des systèmes globalement asymptotiquement commandables (voir [**19**], [**65**]), le gradient généralisé constitue un formidable outil dans l'étude des systèmes dotés de propriétés plus fortes. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le système (2.1) possède une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés.*
(ii) *Le système (2.1) possède une fonction Lyapunov C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.*
(iii) *Le système (2.1) admet un retour d'état stabilisant de type Krasovskii (ou de type Filippov).*

En outre, on retrouve le résultat d'Artstein lorsque f est affine en la commande, c'est à dire lorsqu'elle s'écrit

$$f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),$$

où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.8. *Si f est affine en la commande et si la propriété (i) du théorème 2.7 est vérifiée (ou (ii) de manière équivalente) alors il existe un retour d'état stabilisant continu sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si de plus pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\| < \delta$ alors le compact W_x de la définition 2.1 peut être pris inclus dans ϵB, alors on peut rendre ce retour d'état continu en 0.*

Nous donnons dans la section qui suit une application immédiate du théorème 2.7, puis nous poursuivons avec les démonstrations des théorèmes 2.7 et 2.8. Il est important de signaler que la preuve de (iii) $\Longrightarrow$ (i) du théorème 2.7 est complètement inédite; elle repose sur le recollement de différentes fonctions valeur associées à des systèmes assez proches du système d'origine. Cette méthode basée aussi sur le calcul différentiel non-lisse, permet de retrouver rapidement les résultats donnés dans [**22**]. Pour finir, dans la dernière section, nous étendons tous ces résultats au cas de la stabilisation vers un compact.

3. Application au problème intégrateur

Nous donnons dans cette section un résultat concernant le système avec intégrateur lié au système d'origine (2.1). Notre démonstration s'inspire de celle donnée initialement et indépendamment par Byrnes et Isidori [**14**] et Tsinias [**84**] dans le cas lisse; on peut également trouver cette preuve dans le livre de Sontag [**73**]. Signalons aussi que dans sa thèse [**68**], Rosier fournit une démonstration complètement différente du théorème 3.1 dans le cas lisse; elle se passe totalement de fonction Lyapunov. Par ailleurs, nous invitons le lecteur à aller consulter [**30**] et [**31**] pour d'autres questions concernant le problème intégrateur.

Théorème 3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitz en u uniformément en x pour (x,u) dans un voisinage de $(0,0)$. Si le système commandé (2.1) admet un retour d'état stabilisant localement Lipschitz, alors le système commandé avec intégrateur*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = f(x,u) \\ \dot{u} & = v \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \tag{3.1}$$

possède un retour d'état stabilisant continu sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Notons k le retour d'état localement Lipschitz qui stabilise notre système. D'après le théorème 2.7, la présence de ce retour d'état stabilisant implique l'existence d'une fonction Lyapunov V lisse sur tout $\mathbb{R}^n$ (nous pourrions aussi invoquer le théorème d'Artstein [**4**]). Il s'agit d'une fonction V de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, C^∞, définie positive, propre et qui vérifie la condition suivante :

$$\forall x \neq 0, \langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle < 0. \tag{3.2}$$

On définit alors la fonction W de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, W(x,z) = V(x) + \frac{1}{2}\|z - k(x)\|^2.$$

Nous allons montrer que W est une fonction Lyapunov de commande au sens des gradients généralisés. On pourra alors conclure par le théorème 2.8.
Tout d'abord il est facile de voir que W est localement Lipschitzienne, définie positive et propre. Regardons les gradients généralisés de W.
Soit $(\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial W(\bar{x}, \bar{z})$ où $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\zeta_2 \in \mathbb{R}^m$.
On voit immédiatement que $\zeta_2 = \bar{z} - k(\bar{x})$.
D'autre part, par une propriété de composition sur les jacobiens généralisés (voir [**16**] ou [**42**]), on peut démontrer que

$$\zeta_1 = \nabla V(\bar{x}) + \zeta_1',$$

avec $\|\zeta_1'\| \leq L_k \|\bar{z} - k(\bar{x})\|$, où L_k est la constant de Lipschitz de k dans un voisinage de $\bar{x}$. On en déduit que

$$\partial W(\bar{x}, \bar{z}) \subset (\nabla V(\bar{x}) + L_k \|\bar{z} - k(\bar{x})\| \overline{B}, \bar{z} - k(\bar{x})).$$

Considérons maintenant $(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ différent de $(0,0)$ et $(\zeta_1, \zeta_2) \in \partial W(x,z)$. On peut donc écrire $(\zeta_1, \zeta_2) = (\nabla V(x) + \Psi, 2(z - k(x)))$ avec $\|\psi\| \leq L_k \|z - k(x)\|$.
Premier cas : si $z = k(x)$, alors $(\zeta_1, \zeta_2) = (\nabla V(x), 0)$ et la condition de décroissance (5.1) est bien vérifiée par (3.2).
Deuxième cas : Si $\|z - k(x)\| > 0$
Il est clair qu'il existe une matrice M de $M_{n,m}(R)$ telle que

$$f(x,z) - f(x, k(x)) = M(z - k(x)).$$

Toujours par un résultat sur les jacobiens généralisés (voir [**16**]) on peut démontrer que $\|M\| \leq L_f$ où L_f est la constante de Lipschitz de f à x fixé dans un voisinage de z. Ceci nous permet de poser:

$$v := k(x) - z - M^t \nabla V(x) + \mu \text{ où } \mu := \frac{k(x) - z}{\|z - k(x)\|^2} \langle \Psi, f(x,z) \rangle,$$

et M^t désigne la transposée de M.
Nous pouvons ainsi calculer:

$$\begin{aligned} & \langle (\zeta_1, \zeta_2), (f(x,z), v) \rangle \\ = \quad & -\|z - k(x)\|^2 + \langle \nabla V(x), f(x,z) - M(z - k(x)) \rangle \\ = \quad & -\|z - k(x)\|^2 + \langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle < 0 \end{aligned}$$

par (3.2). De plus si le couple (x, z) est dans un voisinage $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ assez petit de l'origine, alors par hypothèse, f est localement Lipschitzienne en u uniformément en x. C'est à dire qu'il existe L_f^0 telle que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall (u_1, u_2) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}, \|f(x, u_1) - f(x, u_2)\| \le L_f^0 \|u_1 - u_2\|.$$

On en déduit que localement on peut choisir les différentes matrices M de manière à avoir $\|M\| \le L_f^0$. Si on note L_k^0 la constante de Lipschitz de k sur $\mathcal{W}$, on obtient:

$$\|v\| \le \|z - k(x)\| + L_f^0 \|\nabla V(x)\| + L_k^0 \|f(x, z)\|,$$

où (x, z) est dans $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et où v correspond au v $(= v(x, z))$ construit plus haut.
On en déduit que v $(= v(x, z))$ tend vers 0 quand le couple (x, z) se rapproche de l'origine. Tout ceci nous permet d'appliquer le théorème 2.8 et d'obtenir un retour d'état $v(\cdot, \cdot)$ stabilisant continu sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

Tentons de comprendre pourquoi on ne peut pas affaiblir l'hypothèse du théorème 3.1 et supposer le retour d'état stabilisant k seulement continu. Tout d'abord, on connait un contre-exemple dans ce type de situation; Coron et Rosier fournissent dans [**32**] le système suivant:

$$\dot{x} = f(x, u) = x^{\frac{1}{3}} - u.$$

(la fonction f est continue et Lipschitzienne en u uniformément en x.) Le retour d'état $u(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$ rend ce système globalement asymptotiquement stabilisant et en outre il n'existe pas d'autre retour d'état stabilisant localement Lipschitz à l'origine. Par ailleurs, si l'on regarde le système avec intégrateur:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^{\frac{1}{3}} - u \\ \dot{u} &= v, \end{cases}$$

il ne possède pas de retour d'état stabilisant continu. Pour démontrer ceci, Coron et Rosier proposent la fonction suivante:

$$V(x, u) = x - u^2.$$

Le long d'une trajectoire $(x(t), u(t))$ du système intégré, elle vérifie

$$\dot{V} = x^{\frac{1}{3}} - u - 2uv \ge 0$$

lorsque V est positif, $v \le 1$ et $|(x, u)|$ suffisamment petits.
Or, si il existait un retour d'état stabilisant continu à l'origine, il vérifierait en particulier la propriété de stabilité lyapunov (voir definition 2.2); ceci est exclu par le fait ci-dessus car pour qu'un point de l'ensemble $A := \{(x, u) : x - u^2 \ge 0\}$ soit stabilisé en zéro, sa trajectoire doit, sortir de la partie de A sur laquelle on a montré que $\dot{V}$ est forcément positif, c'est à dire s'éloigner assez fortement de l'origine.
Comme nous venons de le voir, le système avec intégrateur ne possède pas de retour d'état stabilisant parce que la condition de stabilité Lyapunov ne peut pas être vérifiée. En fait, pour un (x_0, u_0) fixé assez

proche de l'origine, il n'existe pas de trajectoire du système intégré qui converge à l'origine en gardant des commandes assez petites! Le système n'est même pas commandable à l'origine avec des commandes suffisamment petites, comment pourrait-il être stabilisable par un retour d'état continu ou même par un "time-varying feedback" continu (voir [**32**])? De manière générale, si l'on suppose que le système initial (2.1) admet un retour d'état stabilisant k seulement continu à l'origine (supposons le C^1 ailleurs), il n'est pas possible de montrer que le système avec intégrateur (3.1) est commandable à l'origine par des commandes suffisamment petites. En effet, pour démontrer ceci, étant donné un état initial (x_0, u_0), nous devrions considérer une trajectoire $x(\cdot)$ sur $[0, \infty[$ du système GAS $\dot{x} = f(x, k(x))$. Celle-ci converge vers l'origine et on peut calculer $\dot{u}(t)$:

$$\dot{u}(t) = dk(x(t)).f(x(t), k(x(t))).$$

On peut bien entendu considérer la commande $v := \dot{u}(t)$, elle commande bien le système intégré (3.1) à l'origine; en revanche, rien ne nous permet d'affirmer que la commande reste petite (le $dk(x(t)$ peut devenir très grand près de l'origine) lorsque (x_0, u_0) est très près de l'origine.

4. Preuve des Théorèmes 2.7 et 2.8

Commençons par la partie la plus difficile: (iii) $\Longrightarrow$ (i).
Nous allons en fait montrer le théorème suivant duquel on pourra déduire très facilement le résultat désiré.

Théorème 4.1. *Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une fonction multivaluée vérifiant l'hypothèse (H) et rendant l'inclusion différentielle (2.4) GAS. Alors, sous ces hypothèses, il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive, propre et qui vérifie la propriété suivante:*

$$\forall x \neq 0, \forall \zeta \in \partial V(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v \rangle < 0. \tag{4.1}$$

Remarque 4.2. Dans ce cas, l'application V est appelée fonction Lyapunov forte associée à F. Par la même démonstration que celle de (i) $\Rightarrow$ (ii), on peut déduire du théorème 4.1 l'existence d'une fonction Lyapunov forte lisse sur $\mathbb{R}^n$ associée à F; on retrouve alors le principal résultat donné dans [**22**].

Soit donc F une multifonction conduisant à une inclusion différentielle (2.4) Globalement Asymptotiquement Stable, nous allons lui construire une fonction Lyapunov forte. Commençons pour celà par modifier la dynamique afin de la rendre bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 4.3. *Soit F une multifonction vérifiant (H), soit $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ une fonction continue à valeurs strictement positives pour $x \neq 0$. Alors la multifonction définie par*

$$F_\alpha(x) := \alpha(x)F(x)$$

vérifie (H) et est GAS.

Nous invitons le lecteur à aller consulter [**22**] pour une démonstration de ce résultat. Quitte à poser $F(x) := F_\alpha(x)$ avec $\alpha(x) := [\max\{1 + \|v\| : v \in F(x)\}]^{-1}$, on peut supposer F bornée par 1 sur tout $\mathbb{R}^n$. D'autre part, il est bien évident qu'une fonction Lyapunov pour F reste une fonction Lyapunov pour F_α car α ne s'annule pas hors de l'origine.
Nous rappelons maintenant le lemme de compacité des trajectoires car il sera d'une importance capitale par la suite. Nous invitons le lecteur à aller consulter [**7**], [**16**], [**24**] ou [**35**] pour la démonstration de celui-ci.

Lemme 4.4. *Soit F une multifonction vérifiant (H). Alors pour toute suite $\delta_k \to 0$ et toute suite $x_k(\cdot)$ d'arcs absolument continus, uniformément bornés sur l'intervalle $[a, b]$ et solutions de*

$$\dot{x_k}(t) \in \overline{\text{co}} \quad F(x_k(t) + \delta_k\overline{B}) + \delta_k\overline{B} \text{ p.p.},$$

il existe une sous-suite $x_{k_i}(\cdot)$ convergeant uniformément vers une solution $x(\cdot)$ de $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ p.p. sur l'intervalle $[a, b]$.

Voici maintenant une proposition sur laquelle est basée toute la construction de la fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises avec différentes multifonctions G.

Proposition 4.5. *Soit G une multifonction de $\mathbb{R}^n$ dans les parties de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (H1) et de plus localement Lipschitzienne et bornée (par une constante m), soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne et $[0, b]$ un intervalle de la droite réelle. Alors la fonction valeur définie par*

$$V(x) := \max\left\{\int_0^b L(x(t))dt\right\},$$

où le maximum est pris sur toutes les trajectoires de

$$\dot{x}(t) \in G(x(t)) \text{ p.p.} \tag{4.2}$$

telles que $x(0) = x$, est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$; de plus, elle vérifie la propriété suivante:

$$\forall\zeta \in \partial V(x), \forall v \in G(x), \langle\zeta, v\rangle \le -L(x) + L_{x,b}, \tag{4.3}$$

où $L_{x,b}$ désigne le maximum des $L(x(b))$ pour toutes les trajectoires de (4.2) commençant en x et définies sur $[0, b]$.

Preuve. Commençons par montrer que la fonction valeur V est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$; fixons pour celà $r > 0$. Considérons x et y dans $r\overline{B}$. Comme la multifonction G est bornée par m, pour toute trajectoire $z(\cdot)$ de (4.2) vérifiant $z(0) = z$, on a $\|z(t)\| \le \|z\| + tm, \forall t \in [0, b]$. Si l'on considère une suite de trajectoires qui réalisent le maximum dans la définition de $V(x)$, elles restent toutes dans la boule $(r + bm)\overline{B}$, ce qui signifie qu'elles sont uniformément bornées. On peut donc appliquer le lemme de compacité des trajectoires à celles-ci (avec l'intervalle $[0, b]$) et affirmer que le maximum dans la définition de $V(x)$ est atteint pour une certaine trajectoire $\tilde{x}(\cdot)$ de (4.2) vérifiant $\tilde{x}(0) = x$. En outre, d'après le corollaire 1 p121 du livre de Aubin et Cellina [**7**], il existe une trajectoire $y(\cdot)$ de (4.2) telle que $y(0) = y$ et vérifiant

$$\forall t \in [0, b], \|y(t) - \tilde{x}(t)\| \leq e^{\lambda_G b}\|y - x\|,$$

où λ_G est la constante de Lipschitz de G sur $(r + mb)\overline{B}$. En notant λ_L la constante de Lipschitz de la fonction L sur $(r + mb)\overline{B}$, ceci nous mène à

$$\begin{aligned} V(x) = \int_0^b L(\tilde{x}(s))ds &\leq \int_0^b L(y(s))ds + \int_0^b \lambda_L \|y(s) - \tilde{x}(s)\|ds \\ &\leq V(y) + b\lambda_L e^{\lambda_G b}\|y - x\|. \end{aligned}$$

On peut faire la même chose symétriquement en x et y; la fonction V est par conséquent Lipschitzienne sur $r\overline{B}$, et donc localement Lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}^n$ (en faisant varier r). Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité (4.3) pour un x_0 fixé dans $\mathbb{R}^n$. Commençons par la montrer pour les éléments du sous-différentiel proximal. Soit donc $\zeta \in \partial_P V(x_0)$ et $v \in G(x_0)$. Par le célèbre théorème de sélection de Michael [**60**], il existe une application continue (on peut même la prendre localement Lipschitzienne, voir [**8**]) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) \in G(x)$ et $g(x_0) = v$. Soit donc $x(\cdot)$ une solution de $\dot{x} = g(x(t))$ sur $[0, b]$ telle que $x(0) = x_0$; il s'agit bien entendu d'une trajectoire de (4.2). On a alors par définition de V:

$$V(x(t)) + \int_0^t L(x(s))ds - \int_b^{b+t} L(\tilde{x}^t(s - t))ds \leq V(x_0).$$

où $\tilde{x}^t(\cdot)$ désigne une trajectoire qui réalise le maximum dans la définition de $V(x(t))$, c'est à dire telle que

$$V(x(t)) = \int_0^b L(\tilde{x}^t(s))ds = \int_t^{b+t} L(\tilde{x}^t(s - t))ds.$$

D'autre part, il existe σ et η strictement positifs tels que

$$V(y) - V(x_0) + \sigma\|y - x_0\|^2 \geq \langle\zeta, y - x_0\rangle \quad \forall y \in x_0 + \eta B.$$

Ainsi, en posant $y = x(t)$, on obtient pour t assez petit,

$$\langle\zeta, x(t) - x_0\rangle \leq \sigma\|x(t) - x_0\|^2 + \int_b^{b+t} L(\tilde{x}^t(s - t))ds - \int_0^t L(x(s))ds.$$

En divisant par t, puis en passant à la limite, on obtient facilement,

$$\langle\zeta, v\rangle \leq L_{x,b} - L(x_0).$$

Ceci correspond à l'inégalité cherchée dans le cas des éléments du sous-différentiel proximal. Pour conclure, l'inégalité (4.3) va subsister par passage à la limite, c'est à dire pour les éléments de $\partial_L V(x_0)$; il en sera de même pour le passage à l'enveloppe convexe. La proposition est alors démontrée. □

Remarque 4.6. On peut en fait obtenir le même résultat en supposant G localement Lipschitzienne et à croissance linéaire. Ceci provient du fait que lorsqu'une multifonction est à croissance linéaire, on sait majorer uniformément la norme des trajectoires en fonction de l'état initial et de t; ce fait est une conséquence du lemme de Gronwall (voir [**24**]).

Revenons à notre démonstration; définissons de nouveaux objets à partir de notre application multivaluée F. Etant donné un réel positif δ, nous noterons F_δ la multifonction (et son inclusion différentielle associée) définie de la manière suivante: Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\dot{x}(t) \in F_\delta(x(t)) := \overline{\text{co}} \quad F(x(t) + \delta\overline{B}) + \delta\overline{B}. \tag{4.4}$$

Lemme 4.7. *Soient R, T et ϵ des réels positifs. Alors il existe un réel strictement positif $\Delta = \Delta(R, T, \epsilon)$ tel que pour tout $\delta \in [0, \Delta]$, chaque solution $x(\cdot)$ de (4.4) avec $\|x(0)\| \leq R$ peut être prolongée sur $[0, T]$ et vérifie*

(a) $\|x(t)\| \leq 2M(R) \quad \forall t \in [0, T]$.
(b) *Il existe une solution $\tilde{x}(\cdot)$ de (2.4) sur $[0, T]$ telle que*

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \in [0, T].$$

Preuve. Supposons qu'il existe une suite $\delta_i \downarrow 0$ associée à des suites T_i et x_i où $x_i(\cdot)$ sont des trajectoires de (4.4) sur $[0, T_i]$ avec $\delta = \delta_i$ et $\|x_i(0)\| \leq R$, telles que

$$\|x_i(T_i)\| = 2M(R), \|x_i(T_i)\| < 2M(R) \quad \forall t \in [0, T_i[. \tag{4.5}$$

Etant donné que la multifonction F est bornée sur la boule $2M(R)B$, alors tous les F_{δ_i} le sont également, et même uniformément. Ceci combiné au fait que $\|x_i(T_i)\| = 2M(R)$, prouve que la suite T_i n'a pas 0 comme valeur d'adhérence. On peut par conséquent supposer que $T_i \uparrow T' \leq T$. On peut donc appliquer le lemme 4.4 et en déduire l'existence de $x(\cdot)$ solution de (2.4), limite uniforme des x_i sur $[0, T']$. Elle vérifie par conséquent $\|x(T')\| = 2M(R)$. Ce qui apporte une contradiction à la définition même de $M(R)$! L'existence d'un $\Delta > 0$ vérifiant la première partie du lemme est donc démontrée. Par ailleurs, on a bien montré que toute trajectoire commençant dans la boule $R\overline{B}$ restait dans $2M(R)\overline{B}$ (tant que $t \leq T$); on pourra par conséquent toujours la prolonger sur $[0, T]$.
Supposons maintenant qu'il existe une suite $\delta_i \downarrow 0$ associée à des trajectoires $x_i(\cdot)$ de (4.4) sur $[0, T]$ avec $\delta = \delta_i$ et $\|x_i(0)\| \leq R$, telle que

$$\max_{t \in [0,T]} \|x_i(t) - \tilde{x}(t)\| \geq \epsilon$$

pour toute trajectoire $\tilde{x}(\cdot)$ de (2.4). La suite étant uniformément bornée (par la première partie de la preuve), le lemme 4.4 s'applique et apporte une contradiction. Le lemme 4.7 est démontré. $\square$

Lemme 4.8. *Soient* $0 < r < R$ *deux réels, alors il existe* $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(r, R) > 0$ *et* $\tilde{T} > 0$ *qui vérifient la propriété suivante:*
Pour tout $\delta \in [0, \Delta]$*, toute solution* $x(\cdot)$ *de (4.4) avec* $\|x(0)\| \leq R$ *peut être prolongée à* $[0, \infty[$ *et de plus*

$$\|x(t)\| \leq 2M(R) \quad \forall t \geq 0, \tag{4.6}$$

$$et \quad \|x(t)\| \leq r \quad \forall t \geq \tilde{T}. \tag{4.7}$$

Preuve. Sachant par stabilité Lyapunov que $M(\epsilon) \downarrow 0$ quand $\epsilon \downarrow 0$, il existe un $0 < \epsilon < r$ tel que $2M(\epsilon) < r$. En appliquant le lemme 4.7 à $T = T(\frac{\epsilon}{2}, R)$, $\frac{\epsilon}{2}$ et R, on obtient l'existence de Δ tel que pour tout $\delta \in [0, \Delta]$, pour chaque solution $x(\cdot)$ de (4.4) sur $[0, T]$, on a

$$\|x(t)\| \leq 2M(R) \quad \forall t \in [0, T],$$

et il existe $\tilde{x}(\cdot)$ solution de (2.4) telle que

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \in [0, T].$$

En réappliquant le lemme 4.7 à $T = T(\frac{\epsilon}{2}, R)$ et $R = \epsilon$, on obtient un Δ' tel que pour tout $\delta \in [0, \Delta']$, toute solution de (4.4) se prolonge sur $[0, T]$ et vérifie

$$\|x(t\| \leq 2M(\epsilon) < r \quad \forall t \in [0, T].$$

Posons $\tilde{\Delta} := \min\{\Delta, \Delta'\}$. Montrons qu'alors les propriétés (4.6) et (4.7) sont vérifiées pour tout $\delta \in [0, \tilde{\Delta}]$. Considérons donc un tel δ et $x(\cdot)$ une solution de (4.4). Elle reste de toute façon dans la boule $2M(R)$ tant que $t \leq T$, on pourra donc toujours la prolonger jusqu'à T. Par ailleurs, par construction de Δ, il existe une trajectoire $\tilde{x}(\cdot)$ de (2.4) tel que

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \in [0, T].$$

Or le T étant bien choisi, on a que $\|\tilde{x}(T)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, $\|x(T)\| \leq \epsilon \leq R$. Ainsi, on peut prolonger notre trajectoire sur $[T, 2T]$. Etant donné que $\|x(T)\| \leq \epsilon$, elle reste dans $2M(\epsilon)\overline{B}$ donc dans $r\overline{B}$ et par ailleurs, par le même argument que précédemment, $\|x(2T)\| \leq \epsilon$. Cela signifie qu'on peut répéter par récurrence la construction de l'arc sur les différents intervalles $[nT, (n+1)T]$ de manière à toujours rester dans $2M(R)\overline{B}$ pour $t \geq 0$ et dans $r\overline{B}$ pour $t \geq \tilde{T} = T(\frac{\epsilon}{2}, R)$. Le lemme est démontré. $\square$

Passons à la construction de notre fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés. Pour celà, nous commençons par définir une suite de fonctions valeur $\{V_p\}_{p \geq 1}$ du type de celle apparûe dans la proposition 4.5.
Posons pour tout entier naturel $p \geq 1$, $R_p := 2^p$. Par le lemme 4.8,

à chacun des couples $(1, 2M(R_p) + 2)$, on peut associer des constantes $\tilde{\Delta}_p$ et $\tilde{T}_p$ et s'arranger de manière à avoir pour tout p,

$$\tilde{\Delta}_{p+1} \leq \tilde{\Delta}_p \leq \tilde{\Delta}(1, R_p) \text{ et } \tilde{T}_{p+1} \geq \tilde{T}_p \geq T(1, 2M(R_p) + 2).$$

Fixons maintenant un entier $p \geq 1$. Nous définissons une multifonction F_p et donc une nouvelle dynamique de la manière suivante; on pose pour tout x de $\mathbb{R}^n$:

$$W_x^p := \left\{ y : \|y - x\| \leq \frac{1}{2}\tilde{\Delta}_p \right\}.$$

La famille $\{W_x^p\}_x$ est un recouvrement de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, il existe $\{W_{x_i}^n\}_i$ un sous-recouvrement localement fini subordonné à une partition C^∞ de l'unité $\{\Psi_i\}_i$. On pose alors pour tout x de $\mathbb{R}^n$:

$$F_p(x) := \sum_i \Psi_i(x) F\left(x_i + \frac{\tilde{\Delta}_p}{2}\overline{B} \right).$$

Il est clair par construction, que F_p vérifie (H1), est localement Lipschitzienne et est même bornée par 1 sur tout $\mathbb{R}^n$; nous avons par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(x) \subset F_p(x) \subset \overline{\text{co}} F(x + \tilde{\Delta}_p \overline{B}) \subset F_{\tilde{\Delta}_p}(x), \tag{4.8}$$

et

$$F_{p+1}(x) \quad \subset \quad F_p(x). \tag{4.9}$$

Revenons à la construction de nos fonctions valeur. Nous allons utiliser chacune des dynamiques précédemment construites pour invoquer la proposition 4.5 et donc obtenir une bonne fonction valeur. Nous procédons par récurrence; commençons par définir V_1. On pose pour tout x dans $\mathbb{R}^n$:

$$V_1(x) := \max \left\{ \int_0^{\tilde{T}_1} L_1(x(s))ds : \dot{x} \in F_1(x(t))\text{p.p. et } x(0) = x \right\},$$

où $L_1(y) = d_{\overline{B}}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$.
Par la proposition 4.5, la fonction valeur V_1 est localement Lipschitzienne sur tout $\mathbb{R}^n$ et propre (ceci car la dynamique est globalement bornée). En outre, si l'on considère $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq 2M(R_1) + 2$, alors d'après le lemme 4.8, pour toute trajectoire $x(\cdot)$ de (4.4) avec $\delta = \tilde{\Delta}_1$ et vérifiant $x(0) = x$, on a

$$\|x(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq \tilde{T}_1,$$

c'est à dire $d_{\overline{B}}(x(t)) = 0$. La propriété (4.3) nous permet donc d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| \leq 2M(R_1) + 2$:

$$\forall \zeta \in \partial V_1(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v \rangle \leq -d_{\overline{B}}(x). \tag{4.10}$$

Supposons maintenant avoir défini les fonctions $V_1, V_2, \cdots, V_p$, passons à la construction de V_{p+1}. On commence par définir deux fonctions auxiliaires , on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$B_p(x) := \max\{V_p(y) : \|y\| \leq \|x\| + 1\},$$

et

$$L_{p+1} := L_p + \max\{0, \|x\| - 2M(R_p)\}B_p(x).$$

Les fonctions B_p et L_{p+1} sont naturellement localement Lipschitziennes. Nous avons alors tous les éléments pour définir correctement V_{p+1}; on pose pour tout x dans $\mathbb{R}^n$:

$$V_{p+1}(x) := \max\left\{\int_0^{\tilde{T}_{p+1}} L_{p+1}(x(s))ds : \dot{x} \in F_{p+1}(x(t))\text{p.p. et } x(0) = x\right\}.$$

Toujours par la proposition 4.5 et parce que $\tilde{T}_{p+1} \geq T(1, 2M(R_{p+1})+2)$, V_{p+1} est localement Lipschitzienne, propre et vérifie pour tout x tel que $\|x\| \leq 2M(R_{p+1}) + 2$:

$$\forall \zeta \in \partial V_{p+1}(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v\rangle \leq -L_{p+1}(x) \leq -d_{\overline{B}}(x). \tag{4.11}$$

On a en outre le lemme suivant.

Lemme 4.9. *Soit* $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) *Si* $\|x\| \leq R_p$, *alors* $V_{p+1}(x) \leq V_p(x)$.
(b) *si* $\|x\| \geq 2M(R_p) + 2$, *alors* $V_{p+1}(x) \geq V_p(x)$.

PREUVE.

(a) Soit donc $x \in R_p\overline{B}$. Par le lemme 4.8 (a) (parce que $\tilde{\Delta}_{p+1} \leq \tilde{\Delta}_p \leq \tilde{\Delta}(1, R_p)$) et d'après (4.8) au rang $p+1$, toutes les trajectoires de $\dot{x} \in F_{p+1}(x)$ commençant en x restent dans la boule $2M(R_p)\overline{B}$. Ainsi, Tout au long de celles-ci, L_{p+1} reste égal à L_p. Par ailleurs d'après (4.9), celles-ci sont aussi des trajectoires de $\dot{x} \in F_p(x)$, et pour tout $t \geq \tilde{T}_p$, elles évoluent dans la boule unité, là où s'annule L_p. Ceci et le fait que $\tilde{T}_{p+1} \geq \tilde{T}_p$ implique que la $\int_{\tilde{T}_p}^{\tilde{T}_{p+1}} L_{p+1}(x(s))ds$ sera toujours nulle. Nous pouvons conclure de tout ça que
$$V_{p+1}(x) \leq V_p(x).$$
(b) Considérons maintenant x hors de la boule $[2M(R_p)+2]B$. Comme la dynamique F_{p+1} est bornée par 1; toutes les trajectoires $x(\cdot)$ associées à celle-ci et partant de x resteront hors de la boule $[2M(R_p)+1]\overline{B}$ pour $t \in [0, 1]$. Mais d'après la définition de L_{p+1} et B_p, pour tout $t \in [0, 1]$,
$$L_{p+1}(x(t)) \geq B_p(x(t)) \geq V_p(x).$$
Ainsi, on en déduit que $V_{p+1}(x) \geq \int_0^1 L_{p+1}(x(s))ds \geq V_p(x)$.

□

La construction des V_p étant terminée, on définit:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{V}_0(x) := \max\{V_p(x) : p \geq 1\}. \tag{4.12}$$

Les fonctions V_p étant toutes localement Lipschitziennes et propres, cette fonction l'est aussi. D'autre part, d'après le dernier lemme, le maximum dans la définition de $\mathcal{V}_0(x)$ ne peut être atteint qu'en un nombre fini de $V_p(x)$. Ainsi, d'après la proposition 2.3.12 de [**16**], lorsque ζ appartient à $\partial\mathcal{V}_0(x)$, il appartient à l'enveloppe convexe des $\partial V_p(x)$ pour lesquels le maximum de (4.12) est atteint, c'est à dire tels que $V_p(x) = \mathcal{V}_0(x)$. De tout ceci et par (4.10) et (4.11), on déduit que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \zeta \in \partial\mathcal{V}_0(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v\rangle \leq -d_{\overline{B}}(x). \tag{4.13}$$

On pose maintenant une nouvelle suite $r_p := \frac{1}{2^p}$. Comme précédement, on peut lui associer une suite de couple $(\tilde{\Delta}'_p, \tilde{T}'_p)$ de manière à avoir

$$\tilde{T}'_p \geq T(r_p, 2).$$

On pose exactement comme précédemment une suite F'_p de dynamiques. Puis on peut poser pour tout p:

$$V'_p(x) := \max\left\{\int_0^{\tilde{T}'_p} d_{S_p}(x(s))ds : \dot{x} \in F'_p(x(t))\text{p.p. et } x(0) = x\right\},$$

où S_p désigne la boule $r_p\overline{B}$.
Chacune de ces fonctions valeur V'_p est localement Lipschitzienne et vérifie par le bon choix de $\tilde{T}'_p$:

$$\forall x \in 2\overline{B}, \forall \zeta \in \partial V'_p(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v\rangle \leq -d_{S_p}(x). \tag{4.14}$$

On note maintenant M_p le maximum de la fonction V'_p sur la boule $2\overline{B}$. On tronque cette fonction en définissant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{V}_p := \min\{M_p, V'_p(x)\}.$$

Cette dernière fonction est clairement globalement Lipschitzienne (notons sa constante K_p) et bornée par une constante M_p. Par ailleurs, on peut relier ses gradients généralisés à ceux de V'_p :

$$\forall x \in \overline{B}, \partial\mathcal{V}_p(x) = \partial V'_p(x) \text{ et } \forall x \notin \overline{B}, \partial\mathcal{V}_p(x) \subset \text{co}\{0, \partial V'_p(x)\}. \tag{4.15}$$

Pour finir, on pose

$$\mathcal{V}(x) := \mathcal{V}_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \mathcal{V}_p(x),$$

où $\rho_p := \min\{\frac{1}{M_p 2^p}, \frac{1}{K_p 2^p}\}$. Toujours par construction, $\mathcal{V}$ est définie positive, propre et localement Lipschitzienne; d'autre part, par une règle de la somme sur les gradients généralisés (voir [**24**]), si $\zeta \in \partial\mathcal{V}(x)$ alors

$$\zeta \in \partial\mathcal{V}_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p \partial V_p(x).$$

De cette manière, par linéarité du produit scalaire, on aura bien par (4.13), (4.14) et (4.15):

$$\forall x \neq 0, \forall \zeta \in \partial \mathcal{V}(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v \rangle < 0.$$

Le théorème 4.1 est démontré. Passons à (i) $\Longrightarrow$ (ii):
On suppose donc que le système (2.1) possède une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés V; nous allons la régulariser. Notons pour celà $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ une fonction C^∞ dont le support est inclus dans la boule B et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1.$$

Fixonx x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. D'après la définition 2.6, il existe un compact W_x tel que

$$\forall y \in 2\|x\|\overline{B} \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial V(y), \min_{u \in W_x} \langle \zeta, f(y, u) \rangle < 0. \tag{4.16}$$

On peut alors définir la quantité strictement positive suivante:

$$\epsilon_x := -\max_{y \in x + \frac{\|x\|}{2}\overline{B}} \max_{\zeta \in \partial V(y)} \min_{u \in W_x} \langle \zeta, f(y, u) \rangle > 0. \tag{4.17}$$

On pose également pour tout $y \in x + \frac{\|x\|}{2}\overline{B}$,

$$F_x(y) := \mathrm{co}\{f(y, u) : u \in W_x\}.$$

Comme $F_x(y)$ et $\partial V(y)$ sont des ensembles convexes, le théorème du minimax (voir [**6**]) implique d'après (4.16) et (4.17) que pour tout $y \in x + \frac{\|x\|}{2}\overline{B}$, il existe $v \in F_x(y)$ tel que

$$\forall \zeta \in \partial V(y), \langle \zeta, v \rangle \leq -\epsilon_x. \tag{4.18}$$

Par ailleurs, comme l'application $x \mapsto \partial V(x)$ est semi-continue supérieurement et F_x continue, on peut trouver un voisinage U_x (dont l'adhérence ne contient pas l'origine) de x et un réel strictement positif δ_x tels que pour tout $y \in U_x$, il existe $v \in F_x(y)$ vérifiant:

$$\forall z \in U_x + \delta_x B, \forall \zeta \in \partial V(z), \langle \zeta, v \rangle \leq -\frac{\epsilon_x}{2}. \tag{4.19}$$

Cette construction étant faite pour tous les x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on peut extraire de la famille $\{U_x\}_x$ un recouvrement localement fini $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (où les U_i sont des ouverts relativement compacts dont l'adhérence ne contient pas l'origine) associé à des familles $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ et $\{\delta_i\}_{i=1}^\infty$. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\delta(x) := \min\left\{\frac{\|x\|}{2}, \min\left\{\delta_j : \left(x + \frac{\|x\|}{2}\overline{B}\right) \cap U_j \neq \emptyset\right\}\right\} > 0.$$

La famille $\{x + \frac{\delta(x)}{2} B\}_x$ forme un recouvrement d'ouverts de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; on peut en extraire un recouvrement localement fini $\{x^p + \frac{\delta(x^p)}{2} B\}_{p=1}^\infty$ et lui associer une partition C^∞ de l'unité $\{\psi\}_{p=1}^\infty$. Nous noterons $\mathrm{Supp}(\psi_p)$

le support de la fonction ψ_p; rappelons qu'il est inclus dans $x^p + \frac{\delta(x^p)}{2}B$. Toute cette construction nous permet de poser pour tout p

$$\epsilon^p := \min_{(x^p+\frac{\|x^p\|}{2}\overline{B})\cap U_i\neq\emptyset} \{\epsilon_{x_i}\} > 0, \tag{4.20}$$

$$\bar{\epsilon}^p := \min\left\{\min_{(x^p+\frac{\|x^p\|}{2}\overline{B})\cap U_i\neq\emptyset} \min_{x\in\overline{U}_i} V(x), \epsilon_p\right\} > 0, \tag{4.21}$$

$$q_p := \max_{(x^p+\frac{\|x^p\|}{2}\overline{B})\cap U_i\neq\emptyset} \max_{x\in\overline{U}_i} \max_{u\in W_i} \{\|\nabla\psi_i\|\|f(x,u)\|\} > 0. \tag{4.22}$$

On pose maintenant pour tout ν, et pour tout x dans $\mathbb{R}^n$:

$$V_\nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} V(x+\nu y)\omega(y)dy.$$

Cette fonction est clairement C^∞ et en outre les V_ν converge uniformément vers V sur tout compact quand ν tend vers 0. Ainsi, pour chaque p, on peut trouver un $\nu_p < \frac{\delta(x^p)}{2}$ tel que

$$\|V_{\nu_p}(x) - V(x)\| \leq \frac{\bar{\epsilon}^p}{2^{p+1}(1+q_p)} \quad \forall x \in x^p + \delta(x^p)\overline{B}. \tag{4.23}$$

On peut alors définir la fonction $\tilde{V}$ de la manière suivante:

$$\tilde{V}(x) := \begin{cases} \sum_p \psi_p(x)V_{\nu_p}(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Par construction, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|\tilde{V}(x) - V(x)\| \leq \sum_p \psi_p(x)\|V(x) - V_{\nu_p}(x)\| \leq \frac{1}{8}V(x).$$

On en déduit que $\tilde{V}$ est définie positive, propre et continue à l'origine. Montrons que $\tilde{V}$ vérifie la condition de décroissance (5.1).
D'après le théorème de Rademacher (voir [**24**]), comme la fonction V est localement Lipschitzienne, elle est différentiable presque partout sur $\mathbb{R}^n$, et d'après la remarque 2.5, pour tout point x là où elle est différentiable:

$$\nabla V(x) \subset \partial V(x). \tag{4.24}$$

Par ailleurs, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (parce que la fonction est localement Lipschitz) nous permet de démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\nabla V_\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla V(x+\nu y)\omega(y)dy. \tag{4.25}$$

Soit donc x fixé dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Par construction de la famille $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Donc si $x \in \mathrm{Supp}(\psi_p)$ pour un certain p, alors $x \in x^p + \frac{\delta(x^p)}{2}B$ et ainsi $x^p + \frac{\delta(x^p)}{2}B \cap U_{i_0} \neq \emptyset$ qui implique (car $\delta(x^p) \leq \|x^p\|$):

$$x^p + \frac{\|x^p\|}{2}B \cap U_{i_0} \neq \emptyset.$$

On en déduit d'après la définition de $\delta(x^p)$ que $\delta(x^p) \leq \delta_{i_0}$ et donc $x + \frac{\delta(x^p)}{2}B$ reste inclus dans $U_{i_0} + \delta_{i_0}B$. D'autre part, il existe $v_{i_0} \in F_{x_{i_0}}(x)$ qui vérifie (4.19) pour $x = x_{i_0}$. On obtient par (4.24) et (4.25) que pour tout p tel que $x \in \mathrm{Supp}(\psi_p)$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla V_{\nu_p}(x), v_{i_0}\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla V(x+\nu_p y), v_{i_0}\rangle \omega(y)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} -\epsilon_{x_{i_0}}\omega(y)dy \\ &\leq -\epsilon_{x_{i_0}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \tilde{V}(x), v_{i_0}\rangle \\ = \quad & \langle \nabla V(x), v_{i_0}\rangle + \sum_p \psi_p(x)\langle \nabla V_{\nu_p}(x) - \nabla V(x), v_{i_0}\rangle \\ & + \sum_p \langle \nabla\psi_p(x), v_{i_0}\rangle (V_{\nu_p}(x) - V(x)) \\ = \quad & \sum_p \psi_p(x)\langle \nabla V_{\nu_p}(x), v_{i_0}\rangle + \sum_p \langle \nabla\psi_p(x), v_{i_0}\rangle (V_{\nu_p}(x) - V(x)) \\ \leq \quad & \sum_p \psi_p(x)(-\epsilon_{x_{i_0}}) + \sum_p \|\nabla\psi_p(x)\|\|v_{i_0}\|\|V_{\nu_p}(x) - V(x)\| \\ \leq \quad & -\epsilon_{x_{i_0}} + \sum_p \frac{\bar{\epsilon}^p}{2^{p+1}} \\ \leq \quad & -\frac{\epsilon_{x_{i_0}}}{2} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi comme le v est dans l'enveloppe convexe des $f(x,u)$ pour u dans $W_{x_{i_0}}$, il existe forcément un $f(x,u)$ pour lequel l'inégalité (4.27) est vérifiée (sinon il en serait de même pour tous les v de l'enveloppe convexe!). Par ailleurs, le compact $W_{x_{i_0}}$ peut être choisi uniformément sur les ensembles du type $\|x\| \leq r$. Tout ceci nous démontre que $\tilde{V}$ vérifie la condition de décroissance de la définition 2.1. Mais V n'est pas C^∞ à l'origine. D'après le lemme 4.3 de [**57**], on peut trouver ue fonction $\beta : [0,\infty[\to [0,\infty[$ positive, C^∞ sur $]0,\infty[$, strictement croissante et telle que la fonction $\hat{V}(\cdot) = \beta(\tilde{V}(\cdot))$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Pour cette nouvelle fonction, on aura

$$\partial\hat{V}(x) = \beta'(\tilde{V}(x))\partial\tilde{V}(x).$$

Elle vérifiera donc bien la condition (5.1), elle constitue par conséquent une fonction Lyapunov lisse.

Il nous reste à démontrer (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Notons V la fonction Lyapunov C^∞ fournie par l'assertion (ii). Par définition, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe un compact W_x tel que

$$\forall y \in 2\|x\|\overline{B} \setminus \{0\}, \min_{u \in W_x} \langle \nabla V(y), f(y,u) \rangle < 0. \tag{4.27}$$

Quitte à poser $W_x := W_{[x]+1}$ (où $[x]$ désigne la partie entière de $\|x\|$), onpeut supposer que chaque compact W_x est commun à tous les y tels que $[y] \leq [x]$. On pose alors pour tout x dans $\mathbb{R}^n$:

$$W(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{- \min_{u \in W_y} \langle \nabla V(y), f(y,u) \rangle + \|x - y\|\}. \tag{4.28}$$

Cette fonction est 1-Lipschitzienne et définie positive par (4.27), et d'autre part, par construction:

$$W(x) \leq - \min_{u \in W_x} \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle.$$

Ceci nous permet de définir pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'ensemble non-vide suivant:

$$K(x) := \{u \in W_x : \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle \leq -W(x)\}. \tag{4.29}$$

Si on choisit une sélection $u(\cdot)$ de K (prolongée par 0 à l'origine) quelconque, elle sera localement à valeurs relativement compactes (ceci car les compacts W_x ont été bien choisis). D'autre part, on aura pour tout $x \neq 0, \forall v \in K_u(x)$,

$$\langle \nabla V(x), v \rangle \leq -W(x). \tag{4.30}$$

Nous allons montrer que l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in K_u(x(t)) \quad \text{p.p.}$$

est GAS à l'origine.

Soit maintenant $0 < r < R$, x_0 tel que $\|x_0\| \leq R$ et $x(\cdot)$ une trajectoire de $\dot{x} \in K_u(x)$ vérifiant $x(0) = x_0$. D'après (4.30), la fonction

$$t \mapsto V(x(t)) + \int_0^t W(x(s))ds$$

est décroissante. Par conséquent, comme la fonction W est définie positive, on obtient :

$$\int_0^\infty W(x(s))ds \leq V(x_0) < \infty, \text{ et } V(x(t)) \leq V(x_0) \quad \forall t \geq 0.$$

On en déduit de manière plus général que :

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M(R),$$

où $M(R) := \max\{\|y\| : V(y) \leq M_R\}$ (fini car V propre) avec $M_R := \max\{V(y) : \|y\| \leq R\} < \infty$. On obtient de cette manière la propriété de stabilité Lyapunov.

Posons maintenant $m_r := \min\{V(y) : \|y\| \geq r\} > 0$; la fonction W atteint son minimum $m_W > 0$ sur l'ensemble compact $C := M(R)\overline{B} \setminus S_V(m_r)$ où $S_V(m_r) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq m_r\} \subset r\overline{B}$. Ainsi, tant que $x(\cdot)$ reste dans C, on a

$$\int_0^t W(x(s))ds \geq m_W t.$$

Par ailleurs, une fois que la trajectoire est rentrée dans $S_V(m_r)$, elle n'en ressort plus. De tout cela, on déduit que pour $t > \frac{M_R}{m_W}, x(t) \in S_V(m_r) \subset r\overline{B}$. Ceci correspond à la propriété d'attraction uniforme. Pour conclure, il est clair par construction de $M(R)$ que $\lim_{R\downarrow 0} M(R) = 0$, l'inclusion différentielle $\dot{x} \in K_u(x)$ est par conséquent Globalement Asymptotiquement Stable à l'origine.
Si l'on veut plutot construire un retour d'état de type Filippov, on montre que l'application multivaluée définie par (4.29) est mesurable puis on en extrait une sélection mesurable (voir [**8**]) qui permettra de poser l'inclusion différentielle de type Filippov.
En conclusion, la preuve du théorème 2.7 est complète; il nous reste à donner celle du théorème 2.8.
Dans le cas d'une fonction affine $f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x)$, on conserve les mêmes compacts W_x et la même fonction W donnée par (4.28). On définit cette fois pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$K'(x) := \left\{ u \in W_x : \langle \nabla V(x), f(x, u) \rangle \leq -\frac{W(x)}{2} \right\}.$$

Comme la fonction f est affine en la commande, la multifonction K' est à valeurs convexes compact non-vides. D'autre part, comme f et ∇V sont toutes deux continues et parce que les $K(x)$ de 4.29 sont non-vides, la multifonction K' est également semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (nous renvoie le lecteur à [**35**] ou [**8**] pour cette définition). On peut alors lui appliquer le théorème de Michael (voir [**60**]) et en déduire l'existence d'une sélection continue $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to U$. On prolonge évidemment celle-ci par 0 à l'origine; cette sélection va stabiliser globalement asymptotiquement les trajectoires de $\dot{x} = f(x, u(x))$ par la démonstration de (ii) $\Longrightarrow$ (iii) du théroème 2.7.
Maintenant, si la dernière condition du théorème 2.8 est vérifiée, alors la fonction K' peut être prolongée en 0 par $K'(0) = \{0\}$. Elle reste à valeurs compactes convexes non-vides et en outre, elle est maintenant semi-continue inférieurement sur tout $\mathbb{R}^n$. On en déduit l'existence d'une sélection continue sur $\mathbb{R}^n$ telle que $u(0) = 0$. On conclut encore une fois par la démonstration de (ii) $\Longrightarrow$ (iii) du thérorème 2.7. Le théorème 2.8 est démontré.

5. Quelques commentaires

A la vue des démonstrations de la section 3, on peut facilement généraliser le théorème 4.1 au cas de la stabilisation vers un ensemble compact $\mathcal{T}$. En effet, en posant pour tout x et pour tout ensemble S

$$d_S(x) := d_{\mathcal{T}+S}(x)$$

(où $\mathcal{T} + S := \{x_{\mathcal{T}} + x_S : (x_{\mathcal{T}}, x_S) \in \mathcal{T} \times S\}$), et en conservant la même démonstration, on obtient le théorème 5.2. Tout d'abord, nous avons besoin d'adapter la définition 2.2 au cas de la stabilisation vers un ensemble compact $\mathcal{T}$.

Définition 5.1. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et F une multifonction vérifiant l'hypothèse (H). L'inclusion différentielle (2.4) est dite Globalement Asymptotiquement Stable pour $\mathcal{T}$ (abrégé GAS-$\mathcal{T}$) si toutes ses solutions sont définies sur $[0, \infty[$ et si les propriétés suivantes sont vérifiées:

(a) Attraction uniforme: Pour tout $0 < r < R$, il existe $T = T(r, R) > 0$ tel que pour toute trajectoire de (2.4) vérifiant $d_{\mathcal{T}}(x(0)) \leq R$, on a

$$d_{\mathcal{T}}(x(t)) \leq r \quad \forall t \geq T.$$

(b) Stabilité uniforme: Il existe une fonction croissante continue

$$M :]0, \infty[\to]0, \infty[$$

telle que pour toute solution de (2.4) vérifiant $d_{\mathcal{T}}(x(0)) \leq R$, on a

$$d_{\mathcal{T}}(x(t)) \leq M(R) \quad \forall t \geq 0.$$

(c) Stabilité Lyapunov:

$$\lim_{R \downarrow 0} M(R) = 0.$$

On peut maintenant formuler l'équivalent du théorème 4.1 dans le cas de la stabilisation vers un compact.

Théorème 5.2. *Soit $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ une multifonction vérifiant l'hypothèse (H) et $\mathcal{T}$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Sous ces hypothèses, si F est GAS-$\mathcal{T}$, il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive pour $\mathcal{T}$ (i.e. $V \geq 0$ et $V(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{T}$), localement Lipschitzienne et propre vérifiant:*

$$\forall x \notin \mathcal{T}, \forall \zeta \in \partial V(x), \forall v \in F(x), \langle \nabla V(x), v \rangle < 0.$$

Remarque 5.3. Il bien évident que par la technique régularisation donnée dans le (i)$\Longrightarrow$(ii) du théorème 2.7, on peut en déduire l'existence d'une fonction V lisse ayant les mêmes propriétés. Par ailleurs, à la vue du théorème de relaxation de Filippov (voir [**36**], [**7**]), il n'est pas nécessaire de supposer la multifonction F à valeurs convexes. On retrouve de cette manière une partie des résultats présentés dans [**57**].

De la même manière que dans la section 3, ce théorème conduit à une version plus générale des théorèmes 2.7 et 2.8. Nous étendons pour celà la définition 2.6 au cas de la stabilisation vers un ensemble compact $\mathcal{T}$ (nous laissons le lecteur adapter la définition 2.1).

Définition 5.4. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, et V une application de $\mathbb{R}^n$ dans R. On dit que V est une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés pour le système (2.1) et le compact $\mathcal{T}$, si V est localement Lipschitzienne, définie positive, propre et si elle vérifie la condition suivante: Pour tout ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe un sous-ensemble de commandes $U_0 \subset U$ tel que

$$\forall x \in K \setminus \mathcal{T}, \forall \zeta \in \partial V(x), \min_{u \in U_0} \langle \zeta, f(x,u) \rangle < 0. \tag{5.1}$$

Remarque 5.5. Attention, dans le cas de la stabilisation vers un ensemble $\mathcal{T}$ quelconque (donc non nécessairement compact), les définitions habituelles de fonction Lyapunov, comme la définition 5.4, ne sont plus adéquates. En effet, on ne peut pas demander à cette fonction d'être propre dans la mesure où même $V^{-1}(0) = \mathcal{T}$ n'est pas compact. On invite le lecteur à aller consulter [**57**] pour une discussion sur ce sujet.

Nous poursuivons avec les deux théorèmes annonçés plus haut.

Théorème 5.6. *Soit $\mathcal{T}$ un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le système (2.1) possède une fonction Lyapunov au sens des gradients généralisés pour $\mathcal{T}$.*
(ii) *Le système (2.1) possède une fonction Lyapunov C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ pour $\mathcal{T}$.*
(iii) *Le système (2.1) admet un retour d'état de type Krasovskii (ou de type Filippov) qui stabilise globalement asymptotiquement vers l'ensemble $\mathcal{T}$.*

Théorème 5.7. *Si f est affine en la commande et si la propriété (i) du théorème 2.7 est vérifiée (ou (ii) de manière équivalente) alors il existe un retour d'état stabilisant continu sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{T}$. Si de plus pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $d_{\mathcal{T}}(x) < \delta$ alors le compact W_x de la définition 2.1 peut être pris inclus dans ϵB, alors on peut rendre ce retour d'état continu sur tout $\mathbb{R}^n$.*

Il faut aussi préciser que tous ces théorèmes peuvent être reliés à des propriétés de robustesse attribuées à certains retour d'états stablisants. Plus précisément, si un système admet un retour d'état stabilisant robuste (dans un certain sens), alors il possède une fonction Lyapunov lisse et donc un retour d'état stabilisant de type Krasovskii. En fait, par le théorème de relaxation de Filippov ou par des résultats donnés dans [**38**], les trajectoires perturbées de $\dot{x} = f(x, u(x))$ autorisées correspondent aux trajectoires de $\dot{x} \in K_u(x)$. Nous invitons le lecteur à aller consulter [**55**] et [**57**] pour une étude détaillée des propriétés de robustesse.

CHAPITRE III

Feedback Stabilization and Lyapunov Functions

1. Introduction

Consider a standard control system of the form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad a.e., u(t) \in \mathcal{U}, \tag{1.1}$$

and let V be a smooth Lyapunov function for the system; thus we have

$$V(x) \geq 0, V(x) = 0 \text{ iff } x = 0, V(x) \to \infty \text{ as } \|x\| \to \infty,$$

and (for some function W) the *Infinitesimal Decrease Condition*

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \quad \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle \leq -W(x) < 0, x \neq 0. \tag{1.2}$$

It is well-known (but true) that the existence of such a "control-Lyapunov function" (V, W) (a framework introduced by Eduardo Sontag) implies (open-loop) asymptotic controllability to the origin: for every $\alpha \in \mathbb{R}^n$, there is a control $u(t)$ such that the solution $x(\cdot)$ of (1.1) with initial condition $x(0) = \alpha$ satisfies $x(t) \to 0$ as $t \to \infty$. (In addition, convergence to zero takes place in a certain uniform and stable manner that we will not dwell upon here.) A related and important goal in many situations is to produce a state feedback $k(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ which stabilizes the system; i.e., such that the system $\dot{x} = f(x, k(x))$ is globally asymptotically stable. This chapter explores the question of how to define such a feedback law through the use of a given Lyapunov function V.

The *ideal case*, a well-known heuristic useful for motivational purposes, is the one in which we can find a continuous function $k(x)$ that selects a value of $u \in \mathcal{U}$ attaining (or almost) the minimum in (1.2):

$$\langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle \leq -W(x) \quad \forall x \neq 0.$$

Then any solution of $\dot{x} = f(x, k(x))$ is such that

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle \leq -W(x(t)) < 0,$$

a monotonicity conclusion that, together with the growth property of V, assures that $x(t) \to 0$ as $t \to \infty$.

There are two fundamental difficulties with this ideal picture, and both concern regularity issues. The first is that a differentiable Lyapunov function may not exist, and the second is that even when a smooth V exists, the continuous selection $k(\cdot)$ does not generally exist. If we have recourse to a discontinuous feedback $k(\cdot)$, then the issue arises of how to interpret the discontinuous differential equation $\dot{x} = f(x, k(x))$.

The primary goal of this chapter is to give a general answer to the problem of defining a (discontinuous) stabilizing feedback based upon a given (nondifferentiable) Lyapunov function, one for which a nonsmooth version of infinitesimal decrease is known to hold only on a restricted set. The construction is described in Section 1, while Section 2 establishes the converse result that under mild conditions, a Lyapunov function of the type required in the previous section always exists. In the final section, we address the issue of robustness of the feedback with respect to measurement error and small perturbations of the dynamics, a particularly important issue when discontinuity is present. Some works and general references related to this chapter include [**9, 10, 23, 28, 32, 33, 37, 40, 44, 50, 56, 57, 72, 74, 78, 81, 83**]. We proceed now to situate our results with respect to the literature.

The possible nonexistence of continuous stabilizing feedback was brought to light in the seminal work of Sontag and Sussmann [**77**] and of Brockett [**13**]. The latter developed a necessary condition for continuous stabilizability and adduced the following example, the "nonholonomic integrator":

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{cases} \qquad (u_1, u_2) \in \bar{B} =: \mathcal{U}.$$

This system is globally asymptotically controllable yet fails to admit a continuous stabilizing feedback (by Brockett's condition). In considering the use of discontinuous feedback laws $k(\cdot)$, one could have recourse to the Filippov solution concept [**36**]: x is said to be a solution of $\dot{x} = f(x, k(x)) =: g(x)$ provided that we have

$$\dot{x} \in \bigcap_{\substack{\delta > 0 \\ \operatorname{meas}(\Omega) = 0}} \operatorname{cl} \operatorname{co}(g([x + \delta B] \setminus \Omega)).$$

However, as shown by Ryan [**69**] and by Coron and Rosier [**32**], Brockett's condition continues to hold for this solution concept, so that the nonholonomic integrator (for example) cannot be stabilized by a discontinuous feedback in the Filippov sense.

In [**21**] it was shown that any globally asymptotically controllable system is stabilizable by a (possibly discontinuous) feedback if the trajectory $x(\cdot)$ associated to the feedback is defined in a natural way that involves discretizing the control law (closed-loop system sampling) in a manner similar to that used in differential games by Krasovskii and Subbotin [**47**]. We proceed now to describe this concept, which is the one used in this chapter.

Let $\pi = \{t_i\}_{i \geq 0}$ be a partition of $[0, \infty)$, by which we mean a countable, strictly increasing sequence t_i with $t_0 = 0$ such that $t_i \to \infty$ as $i \to \infty$. The *diameter* of π, denoted $\text{diam}(\pi)$, is defined as $sup_{i \geq 0}(t_{i+1} - t_i)$. Given an initial condition x_0, the π-trajectory $x(\cdot)$ corresponding to π and an arbitrary feedback law $k : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ is defined in a step-by-step fashion as follows. Between t_0 and t_1, x is a classical solution of the differential equation

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x_0)), \quad x(0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

(Of course in general we do not have uniqueness of the solution, nor is there necessarily even one solution, although nonexistence will be ruled out by the feedback constructed in Section 1, which will preclude blow-up of the solution in finite time.) We then set $x_1 := x(t_1)$ and restart the system with control value $k(x_1)$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x_1)), \quad x(t_1) = x_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

and so on in this fashion. The resulting trajectory x is a physically meaningful one that corresponds to a natural sampling procedure and piecewise constant controls; the smaller $\text{diam}(\pi)$, the greater the sampling rate. Since our results are couched in term of π-trajectories, the issue of defining a solution concept for discontinuous differential equations is effectively sidestepped. Our approach will lead to precise estimates of how small the step size $\text{diam}(\pi)$ must be for a prescribed stabilization tolerance to ensue, and of the resulting stabilization time, in terms of the given data.

The next major point to address concerns the nonsmoothness of the Lyapunov function V. An early and important result of Artstein [**4**] implies in particular that the nonholonomic integrator fails to admit a smooth V (see [**22**] for related results). It has been shown by Sontag [**72**], however, that globally asymptotically controllable systems always admit a continuous Lyapunov function V satisfying the following nonsmooth version of the Infinitesimal Decrease Condition:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} DV(x; f(x, u)) \leq -W(x) < 0, x \neq 0, \tag{1.3}$$

where the lower Dini derivate DV is defined by

$$DV(x; v) := \liminf_{\substack{t \downarrow 0 \\ v' \to v}} \frac{V(x + tv') - V(x)}{t}. \tag{1.4}$$

Among the several important ways in which the theory of nonsmooth analysis intervenes in this chapter is that of asserting the equivalence to (1.3) of another, and for our purposes more useful, form of the Infinitesimal Decrease Condition:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \langle f(x, u), \zeta \rangle \leq -W(x) < 0 \quad \forall x \neq 0, \forall \zeta \in \partial_P V(x). \tag{1.5}$$

Here $\partial_P V(x)$ refers to the *proximal subdifferential* of V at x (which may very well be empty); ζ belongs to $\partial_P V(x)$ iff there exists σ and

$\eta > 0$ such that

$$V(y) - V(x) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y \in x + \eta B.$$

(B denotes the open unit ball, and the open ball of radius r centered at x is written as either $x + rB$ or $B(x, r)$.) The equivalence of (1.3) and (1.5) is a consequence of Subbotin's Theorem, which links Dini derivates to proximal calculus (see for example [**21**] or [**24**], our principal source for the theory of nonsmooth analysis).

The essential reason for which proximal calculus is well-suited to our approach is because of its relation to metric projection onto sets, upon which is based the "proximal aiming" method that we employ. The crux is this: when $x(t_i) = x$ lies outside a level set $S = S(c) := \{V \leq c\}$ and admits closest point (or projection) s in S, then $x - s$ is a "proximal normal" to S at s, and for some $\lambda > 0$ we have $\lambda(x - s) \in \partial_P V(s)$. Then (1.5) can be invoked at s to find a suitable value of the control u which moves the state toward S, in the sense that the Euclidian distance d_S decreases at a certain positive rate Δ:

$$d_S(x(t)) - d_S(x(t_i)) \leq -\Delta(t - t_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

provided $x(t_i)$ is close enough to S to start with, and provided $\mathrm{diam}(\pi)$ is small enough. A sequence of such feedbacks is amalgamated in the first section to produce the stabilizing feedback $k(\cdot)$ that is sought.

Our approach requires the Lyapunov function V to be Lipschitz (in the zone under consideration). Theorem 1 derives *finite-time* stabilizability, to a close *approximation* of some level set $S(a)$, as a consequence of the supposed existence of a Lipschitz Lyapunov function. When applied to the special case of global asymptotic controllability, this requires only a Lipschitz V defined on the complement of a small ball around the origin, and the stabilization takes place not asymptotically to the origin, but rather in finite time to a small neighborhood of it. (This has been called "practical" stabilization.) In contrast, [**21**] obtains asymptotic stabilizability to the origin (the case $S(a) = \{0\}$); the proof uses Moreau-Yosida inf convolution to make a continuous Lyapunov function Lipschitz as an intermediate step. This methodology was also employed earlier [**25**], in a differential game setting. The direct use of a Lipschitz Lyapunov function, when it is possible, leads to a far more transparent feedback construction with direct stabilization estimates, and has the important consequence of yielding robustness, as we discuss presently. The fact that under mild assumptions, suitable Lipschitz Lyapunov functions do exist leading to practical stabilization to any required tolerance, is proven in Section 2.

Ledyaev and Sontag [**55**] have recently proved that there is a close relationship between the issues of "how regular a Lyapunov function does the system admit" and "how robust a stabilizing feedback does the system admit". Consider for example a perturbed equation $\dot{x} = f(x, k(x+p))$, where p represents a measurement error. *Full robustness* of the feedback k is taken to mean that for any ϵ, there is a $\delta > 0$ such that whenever the perturbation $p(t)$ satisfies $\|p(t)\| \leq \delta$ for all t, then stabilization to the ϵ-ball takes place. Then [**55**] asserts that the system admits a fully robust stabilizing feedback iff it admits a smooth (C^1 or C^∞) Lyapunov function. Thus the nonholonomic integrator, which *can* be stabilized by a discontinuous feedback (in view of [**21**]), does *not* admit a fully robust stabilizing feedback. It is possible to recover robustness, however, through the use of a *dynamic* feedback; see [**54**]. The issue of the robustness of discontinuous feedbacks with respect to measurement error seems to have been raised first by Hermes [**39**].

The above concept of full robustness, unrelated as it is to the system sampling method that we employ, is not the one discussed in this chapter. Instead, we introduce a type of *relative robustness* in which we require the size of the measurement error to be limited as a function of the maximum step size δ of the underlying partition. This step size δ must still be small enough (for stabilization), but at the same time the individual steps must be big enough to preclude a possible chattering phenomenon, even in the presence of small errors. This consideration, which leads us to specify "reasonably uniform" sampling in Section 3, appears to be new in this context. The term "reasonably uniform" is taken here to mean that the following holds:

$$\frac{\delta}{2} \leq t_{i+1} - t_i \leq \delta \quad \forall i \geq 0,$$

although it is possible to replace the factor 1/2 by any constant in $(0, 1)$.

To conclude with the nonholonomic integrator, then, it turns out that the system does admit a relatively robust stabilizing feedback to within any prescribed tolerance r, in the sense that for all initial conditions in a bounded set, we will have $\|x(t)\| \leq r$ for all $t \geq T$, whenever x is a π-trajectory, if π is a reasonably uniform partition whose diameter is sufficiently small, and whenever measurement and external error do not exceed a critical level related to the sampling rate. It is possible to exhibit a Lipschitz Lyapunov function for the system, and to make explicit the resulting feedback, as will be shown in a next chapter (Chapter 6).

2. A feedback construction

For a given function $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow (-\infty, \infty]$, we shall deal frequently with the sublevel sets $S(r)$ defined as follows:

$$S(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(r) \leq r\}.$$

In addition, the following sets are considered:

$$S(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq V(x) \leq b\}.$$

Let a and b be two given numbers with $a < b$. The following hypotheses are made concerning the function V and the system function f:

(H1) V is lower semicontinuous, $S(b) \neq \emptyset$, and for some $\eta > 0$, V is Lipschitz of rank L_V on $S(a,b) + \eta B$:

$$|V(x) - V(y)| \leq L_V \|x - y\| \quad \forall (x,y) \in S(a,b) + \eta B.$$

(H2) $\exists \delta_1 \in (0, b-a)$ and $\delta_2 > 0$ such that

$$S(a + \delta_1) + \delta_2 B \subset S(b).$$

(H3) $f(x,u)$ is continuous on $S(b) + \eta B$ as a function of x for each $u \in \mathcal{U}$, and $\exists m > 0$ such that

$$\|f(x,u)\| \leq m \quad \forall x \in S(b) + \eta B, \forall u \in \mathcal{U}.$$

(H4) f is Lipschitz in x of rank L_f on $S(a,b) + \eta B$:

$$\|f(x,u) - f(y,u)\| \leq L_f \|x - y\| \quad \forall (x,y) \in S(a,b) + \eta B, \forall u \in \mathcal{U}.$$

(H5) There exists $\omega > 0$ such that, for every $x \in S(a,b) + \eta B$, we have

$$\inf_{v \in \operatorname{co} f(x,\mathcal{U})} DV(x;v) \leq -\omega.$$

Remark 2.1. We do not require that f and V be defined except on $S(b) + \eta B$; the Lipschitz conditions on these functions, as well as the Infinitesimal Decrease Condition (H5), are posited only on a neighborhood of $S(a,b)$. No hypotheses are made concerning the abstract set $\mathcal{U}$, nor on the nature of the dependence of f on the control variable. It is shown in §2 that (H2) automatically holds when $S(b)$ is compact and V is continuous on $S(b) + \eta B$; see Lemma 2.9. The set $S(a)$ is not assumed to be nonempty a priori, but that fact is a consequence of the following theorem.

Theorem 2.2. For any $\gamma > 0$ sufficiently small, there exist positive numbers δ, T and a feedback $k : S(b) + \eta B \longrightarrow \mathcal{U}$ such that whenever a partition π satisfies $diam(\pi) < \delta$, then any π-trajectory $x(\cdot)$ having $x(0) \in S(b) + \gamma B$ satisfies

$$x(t) \in S(b) + \gamma B \quad \forall t \geq 0,$$

$$x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \geq T.$$

Remark 2.3. Thus we almost recover the conclusion of the "ideal case" discussed in the Introduction (with $\{0\}$ replaced by the more general $S(a)$), but in approximate terms (to tolerance γ), with a discontinuous feedback, and for a nonsmooth Lyapunov function satisfying only local hypotheses. The proof is constructive and provides explicit estimates of γ, δ and T in terms of the given data.

Remark 2.4. Taking $W(x) = \omega$ for purposes of comparison, note that (H5) is an apparently weaker hypothesis than (1.3); in actual fact, each is equivalent to (1.5). Because V is Lipschitz and f continuous in x near the points in question, this in turn is equivalent to the following:

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\langle\zeta, f(x,u)\rangle \leq -\omega \quad \forall x\in S(a,b)+\eta B, \forall\zeta\in\partial_L V(x),$$

where $\partial_L V$ is the limiting subdifferential of V (see [**24**]).

Proof of Theorem 2.2

The proof of Theorem 2.2 is based upon defining a feedback control via projections. The first two lemmas below guarantee that the projections lie in the set where the hypotheses are active.

Lemma 2.5. Let ϵ lie in $[0,\delta_1]$ and suppose that x is a point in the set

$$[S(a+\epsilon)+\min\{\delta_2,\eta\}B]\setminus S(a+\epsilon).$$

Then $x\in S(a,b)$, and if $s\in \mathrm{proj}(x, S(a+\epsilon))$, then $s\in S(a,b)+\eta B$.

Proof. Since we have $S(a+\delta_1)+\delta_2 B$ contained in $S(b)$ by hypothesis, it follows that x lies in $S(b)$. Since x does not belong to $S(a+\epsilon)$, we deduce $x\in S(a,b)$. Finally, we have

$$\|s-x\| < \min\{\delta_2,\eta\}\leq\eta,$$

whence $s\in S(a,b)+\eta B$. □

Lemma 2.6. Let $0<\gamma<\eta/2$, and suppose that for some r' and r with $a\leq r'<r\leq b$ we have $x\in[S(r)+\gamma B]\setminus[S(r')+\gamma B]$. Then $x\in S(a,b)+\gamma B$, and if $s\in\mathrm{proj}(x,S(r))$, then $s\in S(a,b)+\eta B$.

Proof. There exists $y\in S(r)$ having $\|y-x\|<\gamma$. Since x does not belong to $S(r')+\gamma B$, we have $V(y)>r'$ necessarily. Thus $y\in S(a,b)$ and $x\in S(a,b)+\gamma B$. Finally, we note $\|x-s\|<\gamma$, whence $\|y-s\|<2\gamma$ and s lies in $S(a,b)+\eta B$. □

The next "solvability" result is central to our approach. The notation u_+ stands for $\max\{u,0\}$.

Lemma 2.7. For any $r\in[a,b]$, for any $x\in S(a,b)$, we have

$$d(x,S(r))\leq\frac{m}{\omega}(V(x)-r)_+.$$

Proof. We shall invoke results (and terminology) from [**24**] to give a short proof of this result, whose proof from first principles would be lengthy.

We define a lower semicontinuous function $g:\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,\infty]$ as follows:

$$g(x):=(V(x)-r)_+ + I_{S(b)}(x),$$

where $I_{S(b)}(\cdot)$ is the indicator function of the set $S(b)$. At any point x in the open set $C:=\{y: g(y)>0\}$ at which g is finite, we have $x\in S(a,b)$, and the Infinitesimal Decrease Condition implies that

$$\inf\{Dg(x;v): v\in cof(x,\mathcal{U})\}\leq-\omega.$$

It follows from this that for any $\epsilon > 0$, for any $x \in C$, for any $\zeta \in \partial_P g(x)$, there exists $u \in \mathcal{U}$ such that

$$\langle \zeta, f(x,u) \rangle \le -\omega + \epsilon.$$

Since $\|f(x,u)\| \le m$ and since $\epsilon > 0$ is arbitrary, we derive $\|\zeta\| \ge \omega/m$. This verifies the hypothesis of the Solvability Theorem [**24**, Theorem 3.3.1] (with the sets labeled there as V and Ω both taken to be $\mathbb{R}^n$), whose conclusion is precisely the desired one since $S(r) = \{x : g(x) = 0\}$. We remark that an alternate proof can be based upon weak monotonicity: the Infinitesimal Decrease Condition implies the existence of a trajectory x with $x(0) = x$ and along which $V(x(t)) + t\omega$ is decreasing (see [**24**, Theorem 4.5.7]), which implies the result. ☐

We now proceed to fix $\gamma > 0$ such that

$$\gamma < \min\left\{\delta_1, \frac{\eta}{2}, \frac{\omega}{12 L_f L_V}\right\}, \tag{2.1}$$

and we define

$$\beta := \min\left\{\delta_1, \frac{(b-a)}{2}, \frac{\gamma\omega}{4m}\right\}. \tag{2.2}$$

Let N be the first integer such that

$$b - N\beta > a \ge b - (N+1)\beta.$$

Note that $N \ge 1$ since $\beta < b - a$. We proceed to define certain sets $\Omega_i (i = 0, 1, \cdots, N+1)$ that lie at the heart of our construction.

For $0 \le i \le N-1$, we set

$$\Omega_i := [S(b - i\beta) + \gamma B] \setminus [S(b - (i+1)\beta) + \gamma B];$$

for $i = N$ we set

$$\Omega_N := [S(b - N\beta) + \gamma B] \setminus [S(b - N\beta) + \frac{\gamma}{4} B];$$

and finally, we define

$$\Omega_{N+1} := S(b - N\beta) + \frac{\gamma}{4} B.$$

We now gather some facts about these sets.

Lemma 2.8.

(a) The Ω_i are disjoint, and Ω_i is contained in $S(a,b) + \gamma B$ for $i \le N$.
(b) $\bigcup_{i=0}^{N+1} \Omega_i = S(b) + \gamma B$.
(c) If $x \in \Omega_i$ for some $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$ and $s \in \operatorname{proj}(x, S(b - i\beta))$, then $s \in S(a,b) + \eta B$.
(d) $S(b - i\beta) + \frac{\gamma}{4} B \subset S(b - (i+1)\beta)) + \gamma B \quad (i = 0, 1, \cdots, N-1)$.
(e) For every $i \in \{0, 1, \cdots, N\}, \forall x \in \Omega_i$, we have $\frac{\gamma}{4} \le d(x, S(b - i\beta)) < \gamma$.
(f) $S(b - N\beta) + \frac{\gamma}{2} B \subset S(a) + \gamma B$, so that $\Omega_{N+1} \subset S(a) + \gamma B$.

PROOF. (a): That the Ω_i are disjoint is evident; that they lie in $S(a,b)+\gamma B$ for $i \le N$ follows from Lemma 2.6 for $i<N$ and from Lemma 2.5 for $i=N$ (recall that $b-N\beta-a \le \beta \le \delta_1$ and $\gamma < \delta_2$).

(b): Evident.

(c): Direct from Lemma 2.6 ($i<N$) or Lemma 2.5 ($i=N$).

(d): Let x lie in $S(b-i\beta)+\gamma/4B$, and let $s \in S(b-i\beta)$ satisfy $\|x-s\| < \gamma/4$. Then $V(s) \le b-i\beta$, and if $V(s) \le b-(i+1)\beta$ the conclusion is immediate. Otherwise we have

$$V(s) > b-(i+1)\beta > a,$$

so that $s \in S(a,b)$. By Lemma 2.7 there exists $y \in S(b-(i+1)\beta)$ such that

$$\|s-y\| \le \frac{m}{\omega}[V(s)-b+(i+1)\beta] \le \frac{m\beta}{\omega} \le \frac{\gamma}{2},$$

in view of (2.2). Then

$$\|x-y\| \le \|x-s\|+\|s-y\| < \frac{\gamma}{4}+\frac{\gamma}{2} < \gamma,$$

which establishes the desired conclusion.

(e): For $i=N$, this is immediate from the definition of Ω_N; for $i<N$, it is a consequence of (d).

(f): Let x belong to $S(b-N\beta)+\gamma/2B$, and let $s \in S(b-N\beta)$ satisfy $\|x-s\| < \gamma/2$. If $V(s) \le a$, then $x \in S(a)+\gamma B$. Otherwise, s belongs to $S(a,b)$, and Lemma 2.7 implies the existence of $y \in S(a)$ such that

$$\|y-s\| \le \frac{m}{\omega}[V(s)-a] \le \frac{m}{\omega}[b-N\beta-a] \le \frac{m\beta}{\omega} \le \frac{\gamma}{2}.$$

But then $\|x-y\| < \gamma$, so again $x \in S(a)+\gamma B$.

□

Lemma 2.9. Let $x \in \Omega_i (i=0,1,\cdots,N)$, and let $s \in \operatorname{proj}(x, S(b-i\beta))$. Then there exists $u \in \mathcal{U}$ such that

$$\langle x-s, f(s,u)\rangle \le \frac{-\omega}{2L_V}\|x-s\|.$$

PROOF. By definition, $x-s$ lies in the proximal normal cone $N^P(s, S(b-i\beta))$. Note that s lies in $S(a,b)+\eta B$ (by Lemma 2.6 for $i<N$, Lemma 2.5 for $i=N$), so that V is Lipschitz of rank L_V in a neighborhood of s. A basic calculus result [**24**, 1.11.26] yields the existence of $\lambda > 0$ such that $\lambda(x-s) \in \partial_L V(s)$, and necessarily $\lambda\|x-s\| \le L_V$. In accord with Remark 2.1, there exists $u \in \mathcal{U}$ such that

$$\langle \lambda(x-s), f(s,u)\rangle \le \frac{-\omega}{2}.$$

The result follows. □

Defining the feedback

We now define a feedback $k(\cdot)$ on $S(b)+\gamma B$ as follows. If $x \in \Omega_i$ for some $i \in \{0,1,\cdots,N\}$, then we set $k(x)=u$, where u is one of the points corresponding to x (and a projection s) as in Lemma 2.9. There remain the points x in Ω_{N+1} to consider (see Lemma 2.8(b)). For such x, we define $k(x)$ to be any point in $\mathcal{U}$. (We remark that we have phrased the definition of $k(x)$ in such a way that the choice of u as indicated above is made once and for all, but in fact a different choice could be made if the same state x recurred subsequently, without at all affecting what follows; this fact is relevant for real-time control.)

The remainder of the proof consists in establishing that for suitably small mesh size, any π-trajectory generated by $k(\cdot)$ with initial condition in $S(b)+\gamma B$ remains in $S(b)+\gamma B$, enters $S(a)+\gamma B$ within a certain (uniform) time, and then remains in that set subsequently.

We consider countable partitions $\{t_j\}$ such that $t_0=0, \lim_{j\to\infty} t_j = \infty$, and such that $0 < t_{j+1}-t_j \le \delta \quad \forall j \ge 0$, where δ is any positive number satisfying

$$\delta < \min\left\{\frac{\gamma}{4m}, \frac{\omega}{6mL_fL_V}, \frac{\gamma\omega}{48m^2L_V}, 1\right\}. \tag{2.3}$$

For such a partition, let x_0 be any point in $S(b)+\gamma B$, and let $x(\cdot)$ be a π-trajectory with $x(0)=x_0$. We denote $x(t_j)$ by x_j, and we set

$$\Delta := \frac{\omega}{60L_V}$$

.

Lemma 2.10. For some $t_j \in \pi$, suppose that $x_j \in \Omega_i, i \in \{0,1,\cdots,N\}$. Then

$$x(t) \in S(b)+\gamma B \;\forall t \in [t_j,t_{j+1}], \text{ and}$$
$$d(x(t),S(b-i\beta)) \le d(x_j,S(b-i\beta)) - \Delta(t-t_j) \quad \forall t \in [t_j,t_{j+1}].$$

Proof. We have $x_j \in S(a,b)+\gamma B$ by Lemma 2.8(a), and $\|\dot{x}(t)\| \le m$ while $x(t)$ lies in $S(b)+\eta B$. Since $\delta m < \gamma/4$ by (2.3) and $\gamma < \eta/2$, it follows that $x(t)$ lies in $S(a,b)+\eta B$ for $t \in [t_j,t_{j+1}]$, as does the point s that figures in the definition of $k(x_j)$; this was pointed out in the proof of Lemma 2.9, where we also deduced the inequality

$$\langle x_j - s, f(s,k(x_j))\rangle \le \frac{-\omega}{2L_V}\|x_j - s\|. \tag{2.4}$$

We fix $t \in (t_j,t_{j+1})$ and set

$$\Psi := \frac{x(t)-s}{\|x(t)-s\|}.$$

Note that $x(t) \neq s$, since $\|x_j - s\| \ge \gamma/4$ by Lemma 2.8(e), and since

$$\|x(t)-x_j\| < \delta m < \gamma/4.$$

We now observe two inequalities:

$$d(x(t),S(b-i\beta)) \le \|x(t)-s\| = \langle \Psi, x(t)-s\rangle,$$

$$d(x_j, S(b-i\beta)) = \|x_j - s\| \geq \langle \Psi, x_j - s\rangle.$$

These together imply

$$\begin{aligned} d(x(t), S(b-i\beta)) - d(x_j, S(b-i\beta)) &\leq \langle \Psi, x(t) - x_j\rangle \\ &= \tau\langle \Psi, f_j\rangle, \end{aligned} \tag{2.5}$$

where we introduce the notation $\tau := t - t_j$,

$$x(t) = x_j + \tau f_j, f_j := \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t} f(x(r), k(x_j))dr.$$

We also set

$$\hat{f}_j := f(s, k(x_j)) = \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t} f(s, k(x_j))dr.$$

Note that

$$\begin{aligned} \|f_j - \hat{f}_j\| &\leq \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t} L_f\|x(r) - s\|dr \\ &\quad \text{(the Lipschitz condition holds since we are in } S(a,b) + \eta B) \\ &\leq \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t} L_f(\|x(r) - x_j\| + \|x_j - s\|)dr \\ &\leq L_f(\tau m + d(x_j, S(b-i\beta))). \end{aligned}$$

It follows from this and (2.4) that we have

$$\begin{aligned} \langle x_j - s, f_j\rangle &= \langle x_j - s, \hat{f}_j + f_j - \hat{f}_j\rangle \\ &\leq \frac{-\omega}{2L_V}\|x_j - s\| + L_f d(x_j, S(b-i\beta))\{\tau m + d(x_j, S(b-i\beta))\} \\ &\leq d(x_j, S(b-i\beta))[\frac{-\omega}{2L_V} + L_f\delta m + \gamma L_f] \\ &\quad \text{(since } \tau < \delta \text{ and } d(x_j, S(b-i\beta)) \leq \gamma) \\ &\leq d(x_j, S(b-i\beta))[\frac{-\omega}{2L_V} + \frac{\omega}{6L_V} + \frac{\omega}{6L_V}] \\ &\quad \text{(we have invoked (2.3) and (2.1))} \\ &\leq -\frac{\gamma\omega}{24L_V} \\ &\quad \text{(since } d(x_j, S(b-i\beta)) \geq \gamma/4 \text{ by Lemma 2.8(e)).} \end{aligned}$$

We shall use this bound on $\langle x_j - s, f_j\rangle$ to derive one on $\langle x(t) - s, f_j\rangle$ as follows:

$$\begin{aligned} \langle x(t) - s, f_j\rangle &= \langle x_j + \tau f_j - s, f_j\rangle \leq \langle x_j - s, f_j\rangle + \tau\|f_j\|^2 \\ &\leq \frac{-\gamma\omega}{24L_V} + \delta m^2 \leq \frac{-\gamma\omega}{48L_V} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(in light of (2.3)). We also have

$$\begin{aligned}\|x(t)-s\| = \|x_j+\tau f_j - s\| &\le \|x_j - s\| + \tau\|f_j\| \le \gamma + \delta m \\ &< \frac{5\gamma}{4} \text{ (by (2.3))}.\end{aligned}$$

Combining this with (2.6) we arrive at

$$\langle \Psi, f_j\rangle = \langle \frac{x(t)-s}{\|x(t)-s\|}, f_j\rangle \le \frac{-\gamma\omega}{48L_V}/\frac{5\gamma}{4} = -\Delta.$$

Together with (2.5), this gives the inequality asserted by the Lemma. Since this inequality evidently implies

$$d(x(t), S(b-i\beta)) < \gamma,$$

it also follows that $x(t) \in S(b) + \gamma B$. □

Lemma 2.11. If $x_j \in \Omega_i$ where $0 \le i \le N$, then x_{j+1} lies in $\Omega_{i'}$ for some $i' \ge i$.

Proof. Since $x_j \in \Omega_i$, we have $d(x_j, S(b-i\beta)) < \gamma$, and (by Lemma 2.10) $d(x_{j+1}, S(b-i\beta)) < \gamma$. Now let $1 \le k < i$. Since $S(b-i\beta) \subset S(b-(k+1)\beta)$, we deduce $d(x_{j+1}, S(b-(k+1)\beta)) < \gamma$. But then $x_{j+1} \notin \Omega_k$ by definition of Ω_k. Since $x_{j+1} \in S(b) + \gamma B$ by Lemma 2.10, we must have $x_{j+1} \in \Omega_{i'}$ for some $i' \ge i$, in view of Lemma 2.8(b). □

Lemma 2.12. If $x(\tau) \in \Omega_{N+1}$ for some $\tau \in \pi$, then $x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \ge \tau$.

Proof. We know that $x(\tau)$ lies in the interior of $S(a) + \gamma B$ by Lemma 2.8(f). For $t > \tau$, as long as $d(x(t), S(b-N\beta))$ does not attain or exceed $\gamma/2$, then $x(t)$ remains in $S(a) + \gamma B$. Thus $\|\dot{x}(t)\|$ remains bounded by m and no blow-up occurs (i.e., $x(t)$ is well-defined).

It suffices therefore to prove that the continuous function

$$g(t) := d(x(t), S(b-N\beta))$$

does not become greater than or equal to $\gamma/2$ for some $t_0 > \tau$. We have $g(\tau) < \gamma/4$.

Since we have chosen δ to satisfy $\delta m < \gamma/4$, at the next node τ_1 following τ we have $g(\tau_1) < \gamma/2$, and two cases arise. The first is when $\gamma/4 \le g(\tau_1) < \gamma/2$; in that case, $x(\tau_1)$ belongs to Ω_N, and Lemma 2.10 shows that at the next node $\tau_2, g(\tau_2)$ will have decreased relative to $g(\tau_1)$. The other case is when $g(\tau_1) < \gamma/4$; but then we are in the same situation as we were with τ. The conclusion is that $g(t)$ never exceeds $\gamma/2$, as required. □

One last lemma and the proof is complete. We set

$$T := (1 + \frac{b-a}{\beta})(1 + \frac{45\gamma L_V}{\omega}).$$

Lemma 2.13.

$$x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \geq T.$$

Proof. In view of Lemma 2.12 and Lemma 2.8(f), it suffices to prove that there is a node $\tau \in \pi$ with $\tau \leq T$ for which $x(\tau) \in \Omega_{N+1}$. Note that $x(0)$ belongs to some $\Omega_i (0 \leq i \leq N+1)$ by Lemma 2.8(b); if $i = N+1$ we are done, so assume $i \leq N$. Since $\delta < 1$ by (2.3), there is a node τ_1 lying in the open interval $(\sigma, \sigma + 1)$, where $\sigma := (3\gamma)/(4\Delta)$. By Lemma 2.11, $x(\tau_1)$ belongs either to Ω_i or to $\Omega_{i'}$ for some $i' > i$. In the former case, it follows that $x(t)$ lies in Ω_i for every node $t \in \pi$ lying between 0 and τ_1, and the inequality of Lemma 2.10 applies to give

$$\begin{aligned} d(x(\tau_1), S(b - i\beta)) &\leq d(x(0), S(b - i\beta)) - \Delta\tau_1 \\ &< \gamma - \frac{3\gamma}{4} = \frac{\gamma}{4}. \end{aligned}$$

However, the left side is no less than $\gamma/4$ by Lemma 2.8(e). This contradiction shows that, in fact, $x(\tau_1)$ must belong to some $\Omega_{i'}$ for an index $i' > i$. If $i' = N+1$, we are done; otherwise, the same argument, beginning now at $(\tau_1, x(\tau_1))$, yields the existence of a node $\tau_2 \in \pi$ with $\tau_2 \leq 2\sigma + 2$ such that $x(\tau_2)$ belongs to $\Omega_{i''}$, where $i'' > i'$. Continuing in this manner, we find that (since there are at most $N+1$ steps as above prior to landing in Ω_{N+1}), there is a node $\tau \in \pi$ with $\tau \leq (N+1)(\sigma+1)$ such that $x(\tau) \in \Omega_{N+1}$. But $N < (b-a)/\beta$ implies that T as defined above is greater than $(N+1)(\sigma+1)$. $\square$

Remark 2.14. It is a consequence of the construction that for suitably small $\delta > 0$, the set $A := S(a+\delta)$ is attained in a time that approaches 0 as $x(0)$ approaches A. This is the key property that is needed in the converse Lyapunov theorem that we now proceed to develop.

3. Construction of a Lyapunov function

We show in this section that under reasonable assumptions, there always exist Lyapunov functions having the properties required for the feedback construction of the preceding section, and giving rise to practical feedback stabilization of arbitrarily prescribed range. While the result below appears to be new and the approach to proving it has some novel features, there is a familiar heuristic at work: the Lyapunov function is constructed as the value function associated with a parametrized family of optimal control problems.

The function $f(x, u)$ describing the dynamics is supposed in this section to satisfy much the same regularity conditions as before. Specifically, we require that for any bounded subset S of $\mathbb{R}^n$, there exist constants $m = m(S)$ and $L = L(S)$ such that

$$\|f(x, u)\| \leq m \quad \forall x \in S, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

$$\|f(x, u) - f(y, u)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in S, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

(As before, $\mathcal{U}$ is just an abstract set, and no hypotheses are made concerning the nature of the dependence of f on u.)

In addition, we require "nice" controllability to a given compact set A via relaxed trajectories. Let us now proceed to make this precise. We define a multifunction Γ on $\mathbb{R}^n$ by

$$\Gamma(x) := \mathrm{cl}\ \mathrm{co}\{f(x,u) : u \in \mathcal{U}\}.$$

By "trajectory" (or Γ-trajectory) we mean an absolutely continuous function $x(\cdot)$ on an interval $[0,T]$ such that

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \quad a.e. \quad t \in [0,T].$$

Given $\alpha \in \mathbb{R}^n$, we define $T_A(\alpha)$ as the least time required for a trajectory to go from α to the set A:

$$T_A(\alpha) := \inf\{T \geq 0 : x(\cdot) \text{ is a trajectory on } [0,T], x(0) = \alpha, x(T) \in A\}.$$

The controllability hypothesis that we make is that every α admits a trajectory steering it to A in finite time, a time which goes to zero as α approaches A.
Equivalently:

$$\text{(CH)} \qquad T_A(\alpha) < \infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \text{and} \lim_{d(\alpha,A)\downarrow 0} T_A(\alpha) = 0.$$

We remark that proximal criteria exist ensuring that A satisfies (CH); see [**24**, 4.6.7]. Fix now a point $a_0 \in A$. Below, $\mathrm{diam}(A)$ refers to the usual diameter of A as a subset of $\mathbb{R}^n$.

Theorem 3.1. For any $r > 0$ and $R > \mathrm{diam}(A) + r$, there exist numbers a, b, γ, η and a function $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$S(a) + \gamma B \subset A + rB \subset \bar{B}(a_0, R) \subset S(b) + \gamma B,$$

and such that all the hypotheses of Theorem 2.2 are satisfied and, in addition, $S(b)$ is compact. The feedback defined in Theorem 2.2 stabilizes $S(b) + \gamma B$ to $A + rB$.

The following addresses the issue of practical semi-global stabilization of globally asymptotically controllable systems.

Corollary 3.2. Let the system be globally asymptotically controllable to the origin. Then, for any $0 < r < R$, there exists a feedback of the type constructed in Theorem 2.2 which is defined on a neighborhood of $\bar{B}(0,R)$, and which stabilizes every initial point in $B(0,R)$ to the ball $B(0,r)$.

Proof. It is known that a continuous global Lyapunov function exists for the problem of stabilization to the origin [**72**], and every level set $S(a)$ for $a > 0$ of that function satisfies (CH) [**24**, 4.6.7]. It suffices now to take such a level set A contained in the ball $B(r/2, 0)$, and to apply Theorem 3.1 with $r := r/2$ and $a_0 := 0$. $\square$

Proof of Theorem 3.1

We begin the proof by defining another multifunction $\tilde{\Gamma}$ (more useful than Γ for being uniformly bounded):

$$\tilde{\Gamma}(x) := \text{cl co}\{\frac{v}{1+\|v\|} : v \in \Gamma(x)\}.$$

We set

$$\tilde{T_A}(\alpha) := \inf\{T \geq 0 : x(\cdot) \text{ is a } \tilde{\Gamma}\text{-trajectory on } [0,T], x(0) = \alpha, x(T) \in A\}.$$

Evidently (or by convention) we have $\tilde{T_A} = 0$ on A.

Lemma 3.3.

(a) $\tilde{\Gamma}$ is locally Lipschitz and has nonempty convex compact values in $\bar{B}(0,1)$.
(b) $\tilde{T_A}(\alpha)$ is finite $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$.
(c) $\lim_{d(\alpha,A)\downarrow 0} \tilde{T_A}(\alpha) = 0$.
(d) There exists a positive number ϵ such that whenever $\alpha \in A+\epsilon B$, and whenever the $\tilde{\Gamma}$-trajectory $x(\cdot)$ has $x(0) = \alpha$ and $x(T) \in A$ for some $T \leq \tilde{T_A}(\alpha)+\epsilon$, then we have $\|x - a_0\|_\infty \leq \text{diam}(A)+1$. We can suppose $\epsilon < 1, \epsilon < r$, and

$$\sup\{\tilde{T_A}(\alpha) : \alpha \in A + \epsilon B\} < \frac{r^2}{4(1+\text{diam}(A))}. \tag{3.1}$$

Proof. We omit the routine proof of (a). For (b), let $\alpha \in \mathbb{R}^n$ be given. By assumption, there is a Γ-trajectory x on an interval $[0,T]$ such that $x(0) = \alpha, x(T) \in A$. We set

$$\tilde{T} := \int_0^T (1 + \|\dot{x}(t)\|)dt$$

and we define a function $\tilde{x}$ on $[0, \tilde{T}]$ by

$$\tilde{x}(\tau) := x(t),$$

where $t = t(\tau)$ is determined in $[0,T]$ by

$$\tau = \int_0^t (1 + \|\dot{x}(r)\|)dr$$

(this change of variables or time scale is known as the Erdmann Transform.) Then

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{\dot{x}(t)}{1+\|\dot{x}(t)\|} \in \tilde{\Gamma}(\tilde{x}(\tau)) \quad a.e.,$$

so that $\tilde{x}$ is a $\tilde{\Gamma}$-trajectory. Hence $\tilde{T_A}(\alpha) \leq \tilde{T} < \infty$.

We turn now to (c). Let α_i be a sequence for which $d(\alpha_i, A)$ decreases to 0. Then $T_A(\alpha_i) \to 0$ by assumption. Let m be such that $\|f(x,u)\| \leq m$ for $(x,u) \in (A + \bar{B}) \times \mathcal{U}$. Then, as soon as $T_A(\alpha_i)$ is strictly less than $1/m$, there is a Γ-trajectory x_i on an interval $[0, T_i]$ such that

$$x_i(0) = \alpha_i, x_i(T_i) \in A, T_i < \frac{1}{m}, T_i < T_A(\alpha_i) + \frac{1}{i}.$$

It follows that $x_i(t) \in A + \bar{B}$ for $t \in [0, T_i]$. Now let $\tilde{x}_i$ be the Erdmann Transform of x_i as given above. Then

$$\tilde{T}_A(\alpha_i) \leq \tilde{T}_i = \int_0^{T_i} (1 + \|\dot{x}_i(t)\|)dt \leq (1+m)T_i < (1+m)(T_A(\alpha_i) + \frac{1}{i}).$$

It follows that $\tilde{T}_A(\alpha_i) \to 0$, as required.

We now examine (d). If the assertion is false, there exist a sequence α_i with $d(\alpha_i, A) \downarrow 0$ and corresponding $\tilde{\Gamma}$-trajectories x_i with $x_i(0) = \alpha_i, x_i(T_i) \in A$, such that

$$T_i \leq \tilde{T}_A(\alpha_i) + \frac{1}{i}, \|x_i - a_0\|_\infty > \operatorname{diam}(A) + 1.$$

Since $\tilde{T}_A(\alpha_i) \to 0$ by (c), we have $T_i \to 0$. On the other hand, there is a subinterval of $[0, T_i]$ in which $\|x_i - a_0\|$ goes from being $\operatorname{diam}(A) + 1$ to at most $\operatorname{diam}(A)$, and since $\|\dot{x}_i(t)\| \leq 1$ the length of that subinterval (and hence, T_i) is at least 1. This contradiction establishes the first part of (d); the rest follows immediately by shrinking ϵ as required, in light of (c). ☐

Defining a value function

We proceed now to define a new multifunction $F(x)$ whose effect is to enlarge the set $\tilde{\Gamma}(x)$ for $d(x, A) < \epsilon$. We set

$$F(x) := \begin{cases} \tilde{\Gamma}(x) & \text{for } d(x, A) \geq \epsilon \\ \tilde{\Gamma}(x) + 2[\frac{\epsilon - d(x,A)}{\epsilon}]\bar{B} & \text{for } d(x, A) \leq \epsilon \end{cases}$$

Having done this, we define a value function $V(\cdot)$ on $\mathbb{R}^n$ in terms of the trajectories of F as follows :

$$V(\alpha) := \inf\{\int_0^T \|x(t) - a_0\| dt : T \geq 0, x(0) = \alpha, \dot{x} \in F(x) \text{ a.e.}, x(T) \in A\}.$$

We stress that T is a choice variable here, in this free time problem.

Lemma 3.4.

(a) F is compact and convex-valued, uniformly bounded and locally Lipschitz.
(b) $V(\cdot)$ is nonnegative, finite-valued and lower semicontinuous, and the infimum defining $V(\alpha)$ is attained for every α.
(c) $V(\alpha) = 0$ iff $\alpha \in A$, and $\lim_{d(\alpha,A)\downarrow 0} V(\alpha) = 0$.
(d) The sublevel sets $S(b) := \{\alpha : V(\alpha) \leq b\}$ of V are compact.

Proof. The assertions of (a) are immediate. Since $F(x)$ is uniformly bounded, the attainment and the lower semicontinuity asserted in (b) follow from standard "compactness of trajectories" arguments; see [**24**, Chapter 4] for details. The first assertion of (c) is clear, and the other one stems from Lemma 3.3 as follows.
Let $\alpha \in A + \epsilon B$, and let the $\tilde{\Gamma}$-trajectory x satisfy $x(0) = \alpha, x(T) \in A$, and $T \le \tilde{T_A}(\alpha) + \delta$, for some $\delta \in (0, \epsilon)$. Then $\|x - a_0\|_\infty \le \operatorname{diam}(A) + 1$ (by choice of ϵ), and we deduce

$$V(\alpha) \le \int_0^T \|x(t) - a_0\| dt \le (\tilde{T_A}(\alpha) + \delta)(\operatorname{diam}(A) + 1).$$

Since $\tilde{T_A}(\alpha) \downarrow 0$ as $d(\alpha, A) \downarrow 0$, (c) follows. Finally we turn to (d). If $\|\alpha - a_0\| > \operatorname{diam}(A) + \epsilon$, then the time required for a trajectory x to go from $x = \alpha$ to the boundary of $A + \epsilon B$ is at least $\|\alpha - a_0\| - \operatorname{diam}(A) - \epsilon$. But then $V(\alpha) \ge \epsilon(\|\alpha - a_0\| - \operatorname{diam}(A) - \epsilon)$. This implies assertion (d). $\square$

The next step invokes Hamiltonian conditions for optimal control, and uses the *lower Hamiltonian* h associated with F:

$$h(x, p) := \min\{\langle p, v\rangle : v \in F(x)\}.$$

Lemma 3.5. Let $\zeta \in \partial_P V(\alpha)$, where α does not lie in A. Let x be a trajectory solving the problem that defines $V(\alpha)$, with associated time T. Then there exists an absolutely continuous function p on $[0, T]$ such that

$$(3.2) \qquad (-\dot{p} - \frac{x - a_0}{\|x - a_0\|}, \dot{x}) \in \partial_C h(x, p) \quad a.e. \quad t \in [0, T]$$

$$(3.3) \qquad p(0) = \zeta$$

$$(3.4) \quad h(x(t), p(t)) + \|x(t) - a_0\| = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Proof. By definition of $\partial_P V(\alpha)$, we have for some $\sigma \ge 0$ and for all α' near α,

$$V(\alpha') + \sigma\|\alpha' - \alpha\|^2 - \langle\zeta, \alpha'\rangle \ge -\langle\zeta, \alpha\rangle.$$

Let x' be a trajectory near x (in the L^∞ norm), put $\alpha' = x'(0)$ and $\alpha = x(0)$ and rearrange to derive that $x'(\cdot) = x(\cdot)$ solves locally the problem of minimizing

$$\int_0^{T'} \|x'(t) - a_0\| dt - \langle\zeta, x'(0)\rangle + \sigma\|x'(0) - x(0)\|^2$$

over the trajectories x' for F satisfying $x'(T') \in A$. (Here T' and $x'(0)$ are free.) We apply the corollary of Theorem 3.6.1 of [**16**] (with time reversed) to deduce the existence of an absolutely continuous function

q on $[0,T]$ satisfying

$$(3.5)\qquad (-\dot q,\dot x) \in \partial_C[H(x,q)-\|x-a_0\|](x,q) \quad a.e. \quad t\in[0,T],$$
$$(3.6)\qquad q(0) = -\zeta,$$
$$(3.7)\qquad H(x(t),q(t)) = \|x(t)-a_0\|, \quad t\in[0,T],$$

where $H(x,p)$ is the function $-h(x,-p)$ and ∂_C denotes the generalized gradient. The Hamiltonian inclusion above implies

$$(\dot q - \frac{x-a_0}{\|x-a_0\|},\dot x)\in \partial_C h(x,-q) \quad a.e., t\in[0,T].$$

Now putting $p := -q$ gives to these conclusions the form asserted in the statement of the lemma. □

Lemma 3.6. For any constant $c>0$, there is a constant M_c with the following property. If $\alpha\in S(c)$ and if the trajectory x on $[0,T]$ attains the infimum defining $V(\alpha)$, then $\|x-a_0\|_\infty \le M_c, T\le M_c$.

Proof. If $\|x-a_0\|_\infty > c+\mathrm{diam}(A)+1$, then the time required for $\|x-a_0\|$ to attain the value $\mathrm{diam}(A)+1$ exceeds c (since $\|\dot x\|\le 1$). But then $V(\alpha)\ge(1+\mathrm{diam}(A))c > c$. This shows that $\|x-a_0\|_\infty$ is bounded by $c+\mathrm{diam}(A)+1$. By Lemma 3.3(c), $\lim_{d(\alpha,A)\downarrow 0}\tilde T_A(\alpha)=0$. So there exists $\rho>0$ such that

$$\tilde T_A(x)\le 1 \quad \forall x\in A+\rho\bar B.$$

Now take α outside $A+\rho\bar B$, and let τ_ρ denote the first time t that $x(t)$ attains $A+\rho\bar B$. Then $V(\alpha)\ge\rho\tau_\rho$, whence $\tau_\rho\le c/\rho$ for $\alpha\in S(c)$.

We deduce that

$$\begin{aligned}\tilde T_A(\alpha) &\le \tau_\rho+1 \quad \text{(by choice of }\rho)\\ &\le \frac{c}{\rho}+1.\end{aligned}$$

If $\alpha\in A+\rho\bar B$, the same bound evidently holds. It suffices now to set

$$M_c := \max\{\frac{c}{\rho}+1, c+\mathrm{diam}(A)+1\}.$$

□

Lemma 3.7. V is locally Lipschitz on $\mathbb{R}^n$.

Proof. We prove first that V is locally Lipschitz on the open set $\{V>0\}=\mathrm{comp}(A)$. Let α_0 belong to this set, take any $\delta>0$ such that $\delta<d(\alpha_0,A)$, and any element $\zeta\in\partial_P V(\alpha)$, where

$$(3.8)\qquad \|\alpha-\alpha_0\|<\delta, V(\alpha)\le V(\alpha_0)+\delta =: c.$$

The conclusions of Lemma 3.6 are available for any trajectory solving the $V(\alpha)$ problem. If K is a Lipschitz constant for F on the ball $B(0,M_c+1+\|a_0\|)$ (where M_c comes from Lemma 3.6), then the Hamiltonian inclusion (3.2) implies

$$(3.9)\qquad \|\dot p\|\le K\|p\|+1.$$

The condition (15) at $t = T$ gives $\|p(T)\| \leq \operatorname{diam}(A)$ since $x(T) \in A$, and since $F(x(T)) = \tilde{\Gamma}(x(T)) + 2\bar{B} \supset \bar{B}$. This, together with (3.9) and Gronwall's Lemma, leads to

$$\begin{aligned} \|\zeta\| = \|p(0)\| &\leq e^{KT}\|p(T)\| + \int_0^T e^{K(T-s)} ds \\ &\leq \operatorname{diam}(A)e^{KT} + \frac{e^{KT} - 1}{K} \\ &\leq \operatorname{diam}(A)e^{KM_c} + \frac{e^{KM_c} - 1}{K}, \end{aligned}$$

since $T \leq M_c$ by Lemma 3.6. This establishes a uniform bound on elements of $\partial_P V(\alpha)$ whenever α satisfies (3.8), which proves that V is Lipschitz on a neighborhood of α_0 [**24**, 1.11.11]. Thus V is locally Lipschitz on the set where it is strictly positive.

There is a neighborhood N of A on which V is bounded above, in view of Lemma 3.4(c). The argument above therefore yields a bound L on elements of $\partial_P V(\alpha)$ for all $\alpha \in N \setminus A$, so that V is uniformly Lipschitz of rank L on $\alpha \in N \setminus A$ by [**24**, Theorem 1.7.3]. Of course, $V = 0$ on A, and is continuous at each point of A in view of Lemma 3.4(c). That V is Lipschitz on N, and hence locally Lipschitz on $\mathbb{R}^n$, now follows. □

Lemma 3.8.

$$\sup\{V(\alpha) : \alpha \in A + \epsilon B\} < \inf\{V(\alpha) : d(\alpha, A) \geq r\}$$

Proof. Let $d(\alpha, A) < \epsilon$, fix $\delta \in (0, \epsilon)$ and let the trajectory x on $[0, T]$ satisfy $x(0) = \alpha, x(T) \in A, T < \tilde{T_A}(\alpha) + \delta$. Then by Lemma 3.3 we have $\|x - a_0\|_\infty \leq \operatorname{diam}(A) + 1$ and so

$$V(\alpha) \leq \int_0^T \|x(t) - a_0\| dt \leq (\tilde{T_A}(\alpha) + \delta)(\operatorname{diam}(A) + 1).$$

We derive $V(\alpha) \leq (\operatorname{diam}(A) + 1)\tilde{T_A}(\alpha)$, and (from (3.1))

$$V(\alpha) \leq \sup\{\tilde{T_A}(\alpha) : d(\alpha, A) \leq \epsilon\}(\operatorname{diam}(A) + 1) < \frac{r^2}{4}.$$

Now let $d(\alpha, A) \geq r$, and let x solve the problem defining $V(\alpha)$. There is an interval of length at least $r/2$ during which $\|x(t) - a_0\| \geq r/2$ (since $\|\dot{x}\| \leq 1$), whence

$$V(\alpha) > \frac{r^2}{4}.$$

The result follows. □

Lemma 3.9. There exist positive numbers a, b, η with $a < b$ such that

$$S(a) + \eta B \subset A + rB \subset \bar{B}(a_0, R) \subset S(b)$$

and

$$S(a, b) + \eta B \subset \{\alpha : d(\alpha, A) > \epsilon\}.$$

PROOF. Pick a number $a > 0$ lying between the two quantities in the statement of Lemma 3.8. Then evidently the compact set $S(a)$ satisfies

$$S(a) \subset \text{comp}\{d(\alpha, A) \geq r\} = A + rB,$$

whence $S(a) + \eta B \subset A + rB$ for $\eta > 0$ suitably small. It also follows that (for any $b > a$) the compact set $S(a, b)$ is contained in the open set $\{\alpha : d(\alpha, A) > \epsilon\}$. Any b suitably large will satisfy $\bar{B}(a_0, R) \subset S(b)$, since V is bounded on bounded sets. Finally, by shrinking η further if necessary, we will have the final conclusion of the Lemma as well. □

Lemma 3.10. The Infinitesimal Decrease Condition (H5) of §1 holds on $S(a, b) + \eta B$, with $\omega := \epsilon$.

PROOF. As pointed out in Remark 2.4, it suffices to show that for any $\alpha \in S(a, b) + \eta B$, for any $\zeta \in \partial_P V(\alpha)$, one has:

$$\inf\{\langle \zeta, f(\alpha, u)\rangle : u \in \mathcal{U}\} \leq -\epsilon. \tag{3.10}$$

Let x be a trajectory solving the problem defining $V(\alpha)$. Then, by Lemma 3.5, we have (at $t = 0$):

$$h(\alpha, \zeta) + \|\alpha - a_0\| = 0.$$

Since $d(\alpha, A) > \epsilon$ by Lemma 3.9, we have $F(\alpha) = \tilde{\Gamma}(\alpha)$, so that the preceding equality yields, for any $\delta > 0$, the existence of some element $v \in \Gamma(\alpha)$ such that

$$\langle \zeta, \frac{v}{1 + \|v\|}\rangle \leq -\|\alpha - a_0\| + \delta < -\epsilon + \delta.$$

For δ small enough, the right side is negative, whence

$$\langle \zeta, v\rangle < -\epsilon + \delta.$$

Given that $\Gamma(\alpha) := \text{cl co} f(\alpha, \mathcal{U})$, this yields the existence of $u \in \mathcal{U}$ for which

$$\langle \zeta, f(\alpha, u)\rangle < -\epsilon + 2\delta.$$

Since δ is arbitrarily small, (3.10) ensues. □

Since $S(b)$ is compact, f is Lipschitz in x and bounded on $S(b)+\eta B$, in accord with hypotheses (H3) (H4) of §1. When the level sets are compact and V is continuous, (H2) always holds. The verification of this fact is the last property to confirm.

Lemma 3.11. Hypothesis (H2) holds.

PROOF. If (H2) fails, then there exist sequences $\alpha_i \in \mathbb{R}^n, \epsilon_i \downarrow 0$, and $u_i \in B(0, 1)$ such that

$$V(\alpha_i) \leq a + \epsilon_i \text{ and } V(\alpha_i + \epsilon_i u_i) > b.$$

Since $S(b)$ is compact, we can suppose by passing to a subsequence that $\alpha_i \to \alpha_0$. Then, since V is continuous, we have $V(\alpha_0) \geq b > a \geq V(\alpha_0)$, a contradiction. □

The setting of Theorem 1 is established, and Theorem 2 is proved.

4. Robustness

We prove in this section that the feedback constructed in §1 is robust with respect to small measurement error and persistent external disturbance, in a precise sense that requires two stipulations. The first is that the measurement error must not exceed in order of magnitude the step size of the underlying discretization, a condition which appears to be rather natural. The second requirement is perhaps more surprising, and surfaces from the nature of the feedback construction. It dictates that each step be "big enough" (while continuing to be "small enough") so as to counteract the measurement error by means of the attractive effect inherent in the construction. Thus the partitions used to discretize the effect of the control are taken to be "reasonably uniform".

Our perturbed system is modeled by

$$\dot{x} = f(x, k(x+p)) + q,$$

where the external disturbance $q : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ is a bounded measurable function:

$$\|q(t)\| \leq E_q \quad t \geq 0 \quad a.e.$$

Given a partition $\pi = \{t_i\}_{i \geq 0}$ of $[0, \infty)$ and the initial condition x_0, the resulting π-trajectory of our perturbed system is defined by successively solving the differential equation

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t_i) + p_i)) + q(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

with $x(0) = x_0$. The continuous function $x(t)$ is the real state of the system, while the sequence $\{x(t_i) + p_i\}$ corresponds to the inexact measurements used to select control values.

Theorem 4.1. The feedback $k : S(b) + \gamma B \to \mathcal{U}$ constructed in Theorem 2.2 is robust in the sense that there exist positive numbers δ_0, T and E_q such that, for every $\delta \in (0, \delta_0)$ there exists $E_p(\delta) > 0$ having the following property: for any partition $\pi = \{t_i\}_{i \geq 0}$ having

$$\frac{\delta}{2} \leq t_{i+1} - t_i \leq \delta \quad i \geq 0,$$

where $0 < \delta < \delta_0$, for any set of measurement errors $\{p_i\}_{i \geq 0}$ having

$$\|p_i\| \leq E_p(\delta), \quad i \geq 0,$$

for any initial condition x_0 such that $x_0 + p_0 \in S(b) + \gamma B$, for any disturbance q having $\|q\|_\infty \leq E_q$, the resulting π-trajectory x satisfies

$$x(t_i) + p_i \in S(b) + \gamma B \quad \forall i \geq 0,$$

$$x(t) \in S(b) + 2\gamma B \quad \forall t \geq 0,$$

$$x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \geq T.$$

Remarks 4.2. (a) Note that unlike T and E_q, the maximum admissible measurement error E_p depends on δ. Note also that (in contrast to Theorem 2.2) $x(t)$ may not lie in $S(b)+\gamma B$ for all t, although for large t it must do so. We prove, however, that the "observed values" of the state, namely the values $x(t_i)+p_i (i \geq 0)$, all fall in $S(b)+\gamma B$, the domain of definition of k.

(b) Certain other kinds of error, for example a disturbance $d(\cdot)$ entering into the dynamics in the form $\dot{x} = f(x, k(x)+d)$, can be reduced to that of external disturbance by positing suitable continuity of f in the control variable.

(c) The maximum admissible disturbance measure E_q will be seen to be proportional to ω/L_V. This has a natural physical meaning, as can easily be seen in the case of smooth V and a continuous feedback $k(x)$ such that

$$\langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle \leq -W(x).$$

Then we see that the perturbed system

$$\dot{x} = f(x, k(x)) + q$$

is stabilized by k if $\|q\|_\infty < W(x)/\|\nabla V(x)\|$ for every x, a bound akin to that involving ω/L_V.

Proof of Theorem 4.1

We adapt the proof of Theorem 2.2, whose first five lemmas hold with no change whatever, as does the definition of $k(\cdot)$. Recall that γ, β and N were introduced earlier; see (2.1) (2.2). We now define our upper bound for δ:

$$\delta_0 := \min\left\{ \frac{6\gamma L_V}{\omega}, 1, \frac{\gamma\omega}{24L_V(m + \frac{\omega}{6L_V} + 1)^2}, \frac{\gamma}{20m} \right\} \tag{4.1}$$

$$E_q := \frac{\omega}{6L_V} \tag{4.2}$$

$$T := \left(1 + \frac{b-a}{\beta}\right)\left(1 + \frac{81\gamma L_V}{\omega}\right) \tag{4.3}$$

(this T differs slightly from the one in Theorem 2.2) and we let $\pi = \{t_i\}_{i\geq 0}$ be a partition as described in the statement of Theorem 4.1, with corresponding measurement errors $\{p_i\}_{i\geq 0}$ having $\|p_i\| \leq E_p$ for some $E_p > 0$ satisfying

$$E_p < \min\{\frac{3\gamma}{80}, \delta, \frac{\delta\omega}{432L_V}\}. \tag{4.4}$$

We also admit any disturbance $q(\cdot)$ for which $\|q\|_\infty \leq E_q$, and we take x_0 such that $x_0 + p_0 \in S(b)+\gamma B$. We shall show that the corresponding π-trajectory has the required properties. We introduce the notation

$$x_i := x(t_i), y_i := x_i + p_i$$

for the actual and the measured state values at time t_i, and proceed to develop modified versions of the four last lemmas figuring in the proof of Theorem 2.2. We set

$$\tilde{\Delta} := \frac{\omega}{108 L_V}.$$

Lemma 4.3. For some $t_j \in \pi$, suppose that $y_j \in \Omega_i$, $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$. Then

$$x(t) \in S(b) + 2\gamma B \subset S(b) + \eta B, \quad t_j \le t \le t_{j+1}$$
$$y_j \in S(b) + \gamma B, y_{j+1} \in S(b) + \gamma B,$$
$$d(y_{j+1}, S(b - i\beta)) \le d(y_j, S(b - i\beta)) - \tilde{\Delta}(t_{j+1} - t_j).$$

Proof. Note that $y_j \in S(b) + \gamma B$ by Lemma 2.8; it will follow from the last conclusion of the current Lemma that $y_{j+1} \in S(b) + \gamma B$. Also, $\|x_j - y_j\| = \|p_j\| \le E_p$, together with $\|x(t) - x_j\| \le \delta m$, yield

$$x(t) \in S(a, b) + \gamma B + (E_p + \delta m)B \subset S(b) + 2\gamma B,$$

since $E_p + \delta m < \gamma$ in view of (4.1) and (4.4). Since $2\gamma < \eta$ by (2.1), this gives $x(t) \in S(b) + \eta B$. By Lemma 2.9 we have

$$\langle y_j - s, f(s, k(y_j)) \rangle \le -\frac{\omega}{2L_V} \|y_j - s\|, \tag{4.5}$$

where $s \in \mathrm{proj}(y_j, S(b - i\beta))$. Fix $t \in (t_j, t_{j+1})$ and set

$$\Psi := \frac{x(t) - s}{\|x(t) - s\|}.$$

Note that $x(t) \neq s$ since $\|y_j - s\| \ge \gamma/4$ by Lemma 2.8(e), while

$$\|y_j - x(t)\| \le \|y_j - x_j\| + \|x_j - x(t)\| < E_p + \delta m < \frac{\gamma}{4},$$

as already noted. We observe the relations

$$\begin{aligned} d(x(t), S(b - i\beta)) &\le \|x(t) - s\| = \langle \Psi, x(t) - s \rangle, \\ d(y_j, S(b - i\beta)) &= \|y_j - s\| \ge \langle \Psi, y_j - s \rangle, \end{aligned}$$

whence

$$\begin{aligned} d(x(t), S(b - i\beta)) - d(y_j, S(b - i\beta)) &\le \langle \Psi, x(t) - y_j \rangle \\ &= \langle \Psi, x_j + \tau(f_j + q_j) - y_j \rangle \\ &\le \tau \langle \Psi, f_j + q_j \rangle + \|p_j\|, \end{aligned} \tag{4.6}$$

where we have introduced

$$\begin{aligned} \tau &:= t - t_j, \\ f_j &:= \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t} f(x(r), k(y_j)) dr, \\ q_j &:= \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t} q(r) dr. \end{aligned}$$

We also set $\hat{f}_j := f(s, k(y_j))$; note $\|\hat{f}_j\| \le m$. We have

$$\begin{aligned} \|f_j - \hat{f}_j\| &\le \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t} L_f\|x(r)-s\|dr \le \frac{L_f}{\tau}\int_{t_j}^{t}(\|x(r)-x_j\| + \|x_j - s\|)dr \\ &\le L_f(\delta m + \|x_j - y_j\| + \|y_j - s\|) \\ &\le L_f(\delta m + E_p + \gamma) \le \frac{5}{4}L_f\gamma. \qquad (4.7) \end{aligned}$$

We deduce

$$\begin{aligned} \langle x(t)-s, f_j+q_j\rangle &= \langle x_j + \tau(f_j+q_j) - s, f_j + q_j\rangle \\ &= \langle y_j - s - p_j, f_j + q_j\rangle + \tau\|f_j+q_j\|^2 \\ &\le \langle y_j - s, f_j\rangle + E_p(m+E_q) + \delta(m+E_q)^2 \\ &= \langle y_j - s, \hat{f}_j\rangle + \langle y_j - s, f_j - \hat{f}_j\rangle + (m+E_q)[\delta m + \delta E_q + E_p] \\ &\le -\frac{\omega}{2L_V}\|y_j - s\| + \frac{5}{4}\|y_j - s\|L_f\gamma + (m+E_q)[\delta m + \delta E_q + E_p] \\ &\qquad \text{(where we have used (4.5) and (4.7))} \\ &\le d(y_j, S(b-i\beta))\left[-\frac{\omega}{2L_V} + \frac{\omega}{6L_V}\right] + \delta[m+E_q+1]^2 \\ &\qquad \text{(by (2.1), and since } E_p < \delta \text{ by (4.4))} \\ &\le \frac{\gamma}{4}\left[-\frac{\omega}{3L_V}\right] + \frac{\gamma\omega}{24L_V} = -\frac{\gamma\omega}{24L_V} \end{aligned}$$

(since $d(y_j, S(b-i\beta)) \ge \gamma/4$ by Lemma 2.8, and since $\delta < \delta_0$ defined by (4.1)).

Note also that

$$\begin{aligned} \|x(t)-s\| &= \|y_j - p_j + \tau(f_j+q_j) - s\| \\ &\le \gamma + E_p + \delta(m+E_q) \le \frac{5\gamma}{4} + \delta E_q < \frac{9\gamma}{4} \end{aligned}$$

(note $\delta E_q < \gamma$ because of $\delta < \delta_0$, in view of (4.1) (4.2)).

It follows that

$$\langle \Psi, f_j + q_j\rangle = \langle \frac{x(t)-s}{\|x(t)-s\|}, f_j+q_j\rangle \le -\frac{(\gamma\omega)/(24L_V)}{(9\gamma)/4} = -\frac{\omega}{54L_V}.$$

Substituting into (4.6) leads to

$$d(x(t), S(b-i\beta)) - d(y_j, S(b-i\beta)) \le -2\tilde{\Delta}(t-t_j) + E_p.$$

We obtain from this

$$\begin{aligned} d(y_{j+1}, S(b-i\beta)) - d(y_j, S(b-i\beta)) &\le \|y_{j+1} - x(t_{j+1})\| - 2\tilde{\Delta}(t-t_j) + E_p \\ &\le -\tilde{\Delta}(t_{j+1}-t_j) + [2E_p - \tilde{\Delta}(t_{j+1}-t_j)] \\ &\le -\tilde{\Delta}(t_{j+1}-t_j), \end{aligned}$$

by (4.4), and since $t_{j+1} - t_j \ge \delta/2$. □

Lemma 4.4. *If $y_j \in \Omega_i$, where $i \leq N$, then y_{j+1} lies in Ω_k for some $k \geq i$.*

Proof. We know that $y_{j+1} \in \Omega_k$ for some k, since y_{j+1} belongs to $S(b) + \gamma B$ by Lemma 4.3. Suppose that $k < i$. We have $d(y_j, S(b - i\beta)) < \gamma$ by definition of Ω_i, and Lemma 4.3 implies $d(y_{j+1}, S(b-i\beta)) < \gamma$. But $S(b-i\beta) \subset S(b-(k+1)\beta)$, so that $d(y_{j+1}, S(b-(k+1)\beta)) < \gamma$. But then $y_{j+1} \notin \Omega_k$ by definition of Ω_k (note that $k \leq N$). This contradiction proves the Lemma. □

Lemma 4.5. *If $\tau \in \pi$ is such that $y(\tau) \in \Omega_{N+1}$, then*

$$x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \geq \tau.$$

Proof. We first establish

$$d(y(\tau'), S(b - N\beta)) \leq \frac{2\gamma}{5} \quad \text{for all nodes } \tau' \geq \tau. \tag{4.8}$$

We consider first $\tau' = \tau + 1$. We have $d(y(\tau), S(b - N\beta)) \leq \gamma/4$, whence

$$\begin{aligned} d(y(\tau+1), S(b - N\beta)) &\leq d(x(\tau+1), S(b - N\beta)) + E_p \\ &\leq d(x(\tau), S(b - N\beta)) + E_p + m\delta \\ &\leq d(y(\tau), S(b - N\beta)) + 2E_p + m\delta \\ &< \frac{\gamma}{4} + \frac{3\gamma}{20} = \frac{2\gamma}{5} (\text{ by (4.4)}). \end{aligned}$$

If $d(y(\tau + 1), S(b - N\beta))$ is in fact $\leq \gamma/4$, then this same argument yields

$$d(y(\tau + 2), S(b - N\beta)) \leq \frac{2\gamma}{5}.$$

If however $d(y(\tau + 1), S(b - N\beta)) > \gamma/4$, then $y(\tau + 1)$ lies in Ω_N by definition, and Lemma 4.3 yields again $d(y(\tau+2), S(b-N\beta)) < 2\gamma/5$. Continuing in this way, we obtain (4.8) for all nodes $\tau' \geq \tau$.

We use (4.8) to argue as follows: let $t \geq \tau$, and let $\tau' \geq \tau$ be a node adjacent to t; then

$$\begin{aligned} d(x(t), S(b - N\beta)) &\leq d(x(\tau'), S(b - N\beta)) + \delta m \\ &\leq d(y(\tau'), S(b - N\beta)) + E_p + \delta m \\ &< \frac{2\gamma}{5} + \frac{\gamma}{10} = \frac{\gamma}{2} (\text{by (4.4)}). \end{aligned}$$

This gives $x(t) \in S(a) + \gamma B$ by Lemma 2.8(f). □

Lemma 4.6. *Let*

$$T := \left(1 + \frac{b - a}{\beta}\right)\left(1 + \frac{81\gamma L_V}{\omega}\right).$$

Then $x(t) \in S(a) + \gamma B \quad \forall t \geq T$.

Proof. In view of Lemma 4.5, it suffices to prove that some node $\tau \in \pi$ with $\tau \leq T$ is such that $y(\tau) \in \Omega_{N+1}$. The argument is identical to that used to prove Lemma 2.12, with Δ replaced by $\tilde{\Delta}$, and applied to the y_i rather than the x_i. $\square$

CHAPITRE IV

Existence of Lipschitz and semiconcave control-Lyapunov functions

1. Introduction

This chapter is concerned with the stabilization problem for a standard control system of the form $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Lyapunov-like techniques have been successfully used in many problems in control theory, such as stabilizability, asymptotic controllability and stability. Stabilization by smooth feedback has been a subject of research by many authors. Among them, Artstein provided an important contribution (see [**4**]), proving that a control system admits a smooth Lyapunov function if and only if there is a stabilizing relaxed feedback. Moreover, if the system is affine in the control, there exists an ordinary stabilizing feedback continuous outside the origin. In general however such a feedback fails to exist, as pointed out by Sontag and Sussmann [**77**] and by Brockett [**13**] among others ([**69**],[**22**]). Consequently, a smooth Lyapunov function in general does not exist. This fact leads to the design of time-varying (see [**28**],[**29**]) or discontinuous feedbacks. The construction of the latter (see [**21**]) has used the existence of a locally Lipschitz control-Lyapunov function whose decrease condition is stated in terms of Dini derivates or equivalently of proximal subgradients. The first result of this chapter is that, under certain mild assumptions on f (a local Lipschitz condition and bounded dynamics near the origin), for Globally Asymptotically Controllable systems, such control-Lyapunov functions always exist. This fact extends the well-known result of Sontag [**72**] and brings an affirmative answer to a conjecture that has been attributed to Sontag and Sussmann. Furthermore, the main result shows that a semiconcave control-Lyapunov function outside the origin always exists under the same assumptions. The semiconcavity is an intermediate property between Lipschitz continuity and continuous differentiability. Semiconcave functions have been used for instance to obtain uniqueness results for weak solutions of Hamilton-Jacobi equations, see [**48**],[**58**]. More recently, attention has been focused on the differential properties of such functions, see [**1**], [**3**]. Semiconcavity will be exploited in forthcoming work to construct stabilizing feedbacks having certain regularity properties. Some works and general references related to this chapter include [**9, 10, 37, 40, 68**].

2. Definitions and statements of the results

In this chapter, we study systems of the general form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

where the state $x(t)$ takes values in a Euclidean space $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, the control $u(t)$ takes values in a given set U, and f satisfies the following hypotheses:

Assumption 2.1. f is locally Lipschitz in x(uniformly in u). That is, for all $x \in \mathbb{X}$, there exists $\mathcal{V}_x$ a neighborhood of x and $L_x \geq 0$ such that

$$\|f(y', u) - f(y, u)\| \leq L_x \|y' - y\| \quad \forall y, y' \in \mathcal{V}_x, \forall u \in U.$$

Assumption 2.2. f is bounded on the ball $R\bar{B} \times U$ for all $R > 0$ (or equivalently, in view of the preceding assumption for some $R > 0$.)

A special element "0" is distinguished in U, and the state $x = 0$ of $\mathbb{X}$ is an equilibrium point, i.e., $f(0, 0) = 0$ (No linear structure on U is used, however). The set of admissible controls is the set of measurable and locally essentially bounded functions $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow U$. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denotes nonnegative reals, B the open ball $B(0, 1) := \{x : \|x\| < 1\}$ in $\mathbb{X}$ and $\bar{B}$ the closure of B.
We now introduce our definitions and the main result.

Definition 2.3. The system (2.1) is Globally Asymptotically Controllable (abbreviated GAC) if there exist a nondecreasing function $M : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ such that $\lim_{R \downarrow 0} M(R) = 0$ and a function $T : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ with the following property:
For any $0 < r < R$, for each initial state ξ, $\|\xi\| \leq R$, there exist a control $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow U$ and corresponding trajectory $x(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{X}$ such that

1) $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$;
2) $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M(R)$;
3) $\forall t \geq T(r, R), \|x(t)\| \leq r$.

Remark 2.4. A routine argument involving continuity of trajectories with respect to initial states shows that the requirements of the above standard definition are equivalent to the following apparently weaker pair of conditions used in some references (see [**79**],[**80**]):

1) For each $\xi \in \mathbb{X}$ there is a control $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow U$ that drives ξ asymptotically to 0;
2) for each $\epsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that for each $\xi \in \mathbb{X}$ with $\|\xi\| \leq \delta$ there is a control $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow U$ that drives ξ asymptotically to 0 and such that the corresponding trajectory $x(\cdot)$ satisfies $\|x(t)\| \leq \epsilon$ for all $t \geq 0$.

Moreover, the authors of [**79**],[**80**] add a condition on bounded controls; this one implies the assumption 2.2 by restriction to the system near the origin.

A function $V : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is *positive definite* if $V(0) = 0$ and $V(x) > 0$ for $x \neq 0$, and *proper* if $V(x) \to +\infty$ as $\|x\| \to +\infty$.

Definition 2.5. A Lyapunov pair for the system (2.1) is a pair (V, W) consisting of a continuous, positive definite, proper function $V : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ and a positive definite continuous function $W : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, with the property that for each $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ we have

$$\forall \zeta \in \partial_P V(x), \inf_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -W(x). \tag{2.2}$$

Here $\partial_P V(x)$ refers to the *proximal subdifferential* of V at x (which may be empty): ζ belongs to $\partial_P V(x)$ iff there exists σ and $\eta > 0$ such that

$$V(y) - V(x) + \sigma \|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle \quad \forall y \in x + \eta B.$$

The condition (2.2) is in fact equivalent to another one often used in the definition of nonsmooth Lyapunov function (see [**72**], [**79**], [**80**]); this other notion is based on the notion of directional or Dini subderivate. The equivalence between these two conditions is a consequence of Subbotin's Theorem (see for example [**24**], our principal source for the theory of nonsmooth analysis and [**19**] for a discussion of the equivalence). We remark that there exists a complete calculus of proximal subdifferentials, one that extends all the theorems of the usual smooth calculus.

Definition 2.6. A control-Lyapunov function (CLF) for the system (2.1) is a function $V : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ such that there exists a continuous positive definite $W : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ with the property that (V, W) is a Lyapunov pair for (2.1).

We will say that V is a locally Lipschitz control-Lyapunov function if V is a control-Lyapunov function which is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$. We claim the following theorem.

Theorem 2.7. Let (f, U) be a control system as described above. Then under the assumptions 2.1 and 2.2, if the system is Globally Asymptotically Controllable, there exists a locally Lipschitz control-Lyapunov function.

Remark 2.8. The converse is true and relatively easy if we suppose that f is continuous in u (we need this to obtain the existence of trajectories); we refer to Sontag [**72**].

We now recall the definition of a *semiconcave* function [**48**] in an open set Ω of $\mathbb{X}$.

Definition 2.9. Let $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function on Ω; it is said to be semiconcave on Ω if for any point $x_0 \in \Omega$ there exist $\rho, C > 0$ such that

$$u(x) + u(y) - 2u\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq C\|x - y\|^2, \tag{2.3}$$

for all $x, y \in x_0 + \rho B$.

We shall deduce as a corollary of the preceding theorem the main result of this chapter.

Theorem 2.10. Let (f, U) be a control system as described above. Then under the assumptions 2.1 and 2.2, if the system is Globally Asymptotically Controllable, there exists a continuous control-Lyapunov function semiconcave on $\mathbb{X} \setminus \{0\}$.

Remark 2.11. The CLF is a viscosity supersolution of

$$\sup_{u \in U}\{-\langle f(x,u), DV\} - W \geq 0.$$

We begin by giving some regularity results about certain value functions. Then we give the proof of Theorem 2.7. In the last section, we conclude with the proof of Theorem 2.10.

3. A Result on Value Functions in finite time

Throughout this section, we are given a multifunction F mapping $\mathbb{X}$ to the subsets of $\mathbb{X}$, and we consider the differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{a.e..} \tag{3.1}$$

We say that $x(\cdot)$ is a solution of (3.1) on the interval $[a, b]$ if it is an absolutely continuous function $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{X}$ which, together with $\dot{x}$, satisfies (3.1); such an arc will be called an F-trajectory on the interval $[a, b]$. We need for this section two properties of F which turn out to be particulary important.

Assumption 3.1. The multifunction F is locally Lipschitz with nonempty compact convex values.

Assumption 3.2. For some positive constants K and M, and for all $x \in \mathbb{X}$,

$$v \in F(x) \Longrightarrow \|v\| \leq K\|x\| + M$$

(that is called the linear growth condition).

Under these two conditions, for all $x_0 \in \mathbb{X}$, there exists a trajectory of (3.1) defined on $\mathbb{R}_{\geq 0}$ such that $x(0) = x_0$, and for any trajectory with initial data x_0 we have the following estimate

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq \|x_0\|e^{Kt} + Mte^{Kt}. \tag{3.2}$$

This inequality is an easy consequence of Gronwall's Lemma (see [**24**]). Let us consider a function $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ and a compact set $\mathcal{T}$ of $\mathbb{X}$ satisfying

Assumption 3.3. L is locally Lipschitz and for all $x \in \mathbb{X}$, $L(x) \geq 1$.

Assumption 3.4. There exists $\delta > 0$ such that $\forall x \in \mathcal{T}, \delta\bar{B} \subset F(x)$.

We proceed now to define a value function $V(\cdot)$ on $\mathbb{X}$ in terms of trajectories of F as follows:

$$V(x) := \inf \left\{ \int_0^T L(x(t))dt : x(0) = x, \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ a.e.}, x(T) \in \mathcal{T} \right\}.$$

(Note that T is a choice variable in this "free-time" problem.)
We introduce the notation

$$\mathcal{R} := \{x \in \mathbb{X} : V(x) < +\infty\},$$

the letter $\mathcal{R}$ stands for reachable: the set of points where V is finite is the sets of points which can be driven to the target $\mathcal{T}$ in finite time. We have the following theorem.

Theorem 3.5. Assume (3.1)-(3.4). Then

(i) $\mathcal{R}$ is open;
(ii) V is locally Lipschitz in $\mathcal{R}$;
(iii) $\forall x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{T}, \forall \zeta \in \partial_P V(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -L(x)$.

Proof. First, by the Lipschitz condition on F and (3.4), there exists $0 < r \leq 1$ such that $\forall x \in \mathcal{T} + r\bar{B}, \frac{\delta}{2}\bar{B} \subset F(x)$. Hence, each state x of $\mathcal{T} + r\bar{B}$ can be driven to $\mathcal{T}$ by a trajectory of (3.1) in time $\frac{2}{\delta} d(x, \mathcal{T})$ (where $d(x, \mathcal{T})$ denotes $\min_{\tau \in \mathcal{T}} \|x - \tau\|$). This proves that V is finite on $\mathcal{T} + r\bar{B}$, if we set $m := \max_{x \in \mathcal{T} + r\bar{B}} L(x)$, we have

$$\forall x \in \mathcal{T} + r\bar{B}, V(x) \leq \frac{2m}{\delta} d(x, \mathcal{T}). \tag{3.3}$$

Fix now $x_0 \notin \mathcal{T}$ such that $V(x_0) < +\infty$.
By the definition of V, there exists an F-trajectory $x_0(\cdot)$ and $T > 0$ such that $x_0(0) = x_0, x_0(T) \in \mathcal{T}$ and

$$\int_0^T L(x(s))ds \leq V(x_0) + 1. \tag{3.4}$$

The estimate (3.2) gives

$$\forall t \in [0, T], \|x_0(t)\| \leq \|x_0\| e^{KT} + MTe^{KT}.$$

Let $A := [\|x_0\| + MT]e^{KT}$, let λ_F the Lipschitz constant of F on the ball $(A + 1)\bar{B}$. Fix $y \in B(x_0, re^{-\lambda_F T})$.
By [**7**, Cor.1,p.121], there exists an F-trajectory $y(\cdot)$ such that $y(0) = y$ and verifying

$$\forall t \in [0, T], \|y(t) - x_0(t)\| \leq e^{\lambda_F T}\|y - x_0\|, \text{and } \|y(t)\| \leq A + 1. \tag{3.5}$$

Consequently, if we set λ_L the Lipschitz constant of L on the ball $(A+1)\bar{B}$, we obtain

$$\begin{aligned}\int_0^T L(y(s))ds &\leq \int_0^T L(x_0(s))ds + \int_0^T [L(y(s)) - L(x_0(s))]ds \\ &\leq V(x_0) + 1 + \int_0^T \lambda_L \|y(s) - x_0(s)\| ds \\ &\leq V(x_0) + 1 + T\lambda_L e^{\lambda_F T} \|y - x_0\| \\ &\leq V(x_0) + 1 + T\lambda_L r.\end{aligned}$$

On the other hand, $d(y(T), \mathcal{T}) \leq \|y(T) - x_0(T)\| \leq e^{\lambda_F T} \|y - x_0\| \leq r$; this implies by (3.3) that

$$V(y(T)) \leq \frac{2m}{\delta} d(y(T), \mathcal{T}) \leq \frac{2mr}{\delta}.$$

Consequently, we have that for all $y \in B(x_0, re^{-\lambda_F T})$,

$$\begin{aligned} V(y) &\leq \int_0^T L(y(s))ds + \frac{2mr}{\delta} && (3.6) \\ &\leq V(x_0) + 1 + T\lambda_L r + \frac{2mr}{\delta} =: c < +\infty. && (3.7)\end{aligned}$$

We have shown that $B(x_0, re^{-\lambda_F T}) \subset \mathcal{R}$ which gives (i).
Now, let $x \in B(x_0, re^{-\lambda_F T})$, then for each positive integer n, there exists an F-trajectory $x_n(\cdot)$ and $T_x^n \geq 0$ such that $x_n(0) = x, x_n(T_x^n) \in \mathcal{T}$ and

$$\int_0^{T_x^n} L(x_n(s))ds \leq V(x) + \frac{1}{n}.$$

Thus $L \geq 1$ implies $T_x^n \leq V(x) + \frac{1}{n} \leq c + \frac{1}{n}$ by (3.6). As before, the estimate (3.2) gives for each n

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, T_x^n], \|x_n(t)\| &\leq \|x\| e^{KT_x^n} + MT_x e^{KT_x^n} \\ &\leq [\|x\| + M(c+1)]e^{K(c+1)} \\ &\leq [\|x_0\| + 1 + M(c+1)]e^{K(c+1)}.\end{aligned}$$

So we find a uniform bound for $\|\dot{x}_n(\cdot)\|$ on the intervals $[0, T_x^n] \subset [0, V(x)+1]$. Hence, since our trajectories $x_n(\cdot)$ are uniformly bounded and equicontinuous on the compact interval $[0, c + \frac{1}{n}]$, the theorem of Arzela-Ascoli and the compactness of trajectories (see [**24**]) imply that there exists a trajectory $x(\cdot)$ with initial data x such that $x(T_x) \in \mathcal{T}$ and

$$V(x) = \int_0^{T_x} L(x(s))ds,$$

with $T \leq V(x)$. That means that the infimum is attained in the definition of V.
We set $A' := [\|x_0\| + 1 + M(c+1)]e^{K(c+1)}$, and λ_F' the Lipschitz constant of F on the ball $(A'+1)\bar{B}$. We proceed to show that V is Lipschitz on

the ball $\bar{B}(x_0, \frac{r}{2}e^{-\lambda'_F(c+1)})$.
Fix x, y in $\bar{B}(x_0, \frac{r}{2}e^{-\lambda'_F(c+1)})$. Then there exists as above $x(\cdot)$ an F-trajectory and $T_x \geq 0$ such that $x(0) = x, x(T_x) \in \mathcal{T}$ and

$$V(x) = \int_0^{T_x} L(x(s))ds.$$

By [**7**, Cor.1,p.121], there exists an F-trajectory $y(\cdot)$ such that $y(0) = y$ and verifying

$$\forall t \in [0, T_x], \|y(t) - x(t)\| \leq e^{\lambda'_F T_x}\|y - x\|, \text{and } \|y(t)\| \leq A' + 1.$$

Consequently, if we set as before λ'_L the Lipschitz constant of L on the ball $(A'+1)\bar{B}$, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_x} L(y(s))ds &\leq \int_0^{T_x} L(x(s))ds + \int_0^{T_x} \lambda'_L\|y(s) - x(s)\|ds \\
&\leq V(x) + T_x\lambda'_L e^{\lambda'_F T_x}\|y - x\| \\
&\leq V(x) + c\lambda'_L e^{\lambda'_F c}\|y - x\|
\end{aligned}$$

Now, $V(y(T_x)) \leq \frac{2m}{\delta} d(y(T_x), \mathcal{T}) \leq \frac{2m}{\delta} e^{\lambda'_F c}\|y - x\|$. Hence, we conclude that

$$V(y) \leq V(x) + \left[c\lambda'_L + \frac{2m}{\delta}\right] e^{\lambda'_F c}\|y - x\|.$$

Thus, since all the constants in the preceding inequality are independent of x and y, we find

$$|V(y) - V(x)| \leq \left[(c+1)\lambda'_L + \frac{2m}{\delta}\right] e^{\lambda'_F(c+1)}\|y - x\|,$$

which proves (ii). We now have to prove (iii). For that, consider $x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{T}$, and a trajectory $x(\cdot)$ of (3.1) attaining the infimum of the definition of $V(x)$ is attained. Let ζ belonging to $\partial_P V(x)$, then there exists σ and $\eta > 0$ such that

$$V(y) - V(x) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x\rangle \quad \forall y \in x + \eta B.$$

By the optimality of the trajectory $x(\cdot)$, for all $t \in [0, T]$:

$$V(x(t)) = \int_t^T L(x(s))ds.$$

Then, for t sufficiently small,

$$\int_t^T L(x(s))ds - \int_0^T L(x(s))ds + \sigma\|x(t) - x\|^2 \geq \langle \zeta, x(t) - x\rangle,$$

which gives

$$-\frac{1}{t}\int_0^t L(x(s))ds + t\sigma\|\frac{x(t) - x}{t}\|^2 \geq \langle \zeta, \frac{x(t) - x}{t}\rangle.$$

We find (iii) by passing to the limit: $t \downarrow 0$. $\square$

Remark 3.6. In [**19**], a result of this type is proven differently by an argument based on Hamiltonian necessary conditions.

Remark 3.7. The conclusions of Theorem 3.5 remain true if we weaken the assumption 3.4 to the proximal condition

$$\min_{v\in F(x)} \langle \zeta, v\rangle \leq -\delta\|\zeta\|$$

for all $x \in \mathcal{T}$ where $\zeta \in N^P_{\mathcal{T}}(x)$. (This result is a consequence of proximal criteria for attainability, see [**23**],[**24**].) This kind of condition added to the smooth regularity of F is used in [**15**] to obtain the semiconcavity of the minimum-time function. However, these results (on the Lipschitz property or on the semiconcavity property) do not hold if we omit the linear growth condition (3.2); see for example [**11**, Ex.1.3,p.238]

Remark 3.8. The conclusion (iii) can be strengthened to equality. The value function V is the viscosity solution of a certain Hamilton-Jacobi equation (see [**11**],[**24**]).

4. Proof of Theorem 2.7

We suppose first that we have constructed a control-Lyapunov function V which is continuous on $\mathbb{X}$ and locally Lipschitz on $\mathbb{X}\setminus\{0\}$. Thus, there exists another continuous positive definite function $W : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that (V, W) is a Lyapunov pair for (2.1). We proceed to show that we can deduce the existence of a new control-Lyapunov function which is locally Lipschitz on all the space $\mathbb{X}$. We set for any $0 \leq a \leq b$

$$S_V(b) := \{x; V(x) \leq b\} \text{ and } S_V[a, b] := \{x; a \leq V(x) \leq b\},$$

these are compact sets of $\mathbb{X}$. We proceed to construct a sequence of functions on $\mathbb{X}$ which will converge uniformly to our desired locally Lipschitz control-Lyapunov function.

First, we set $\mathcal{V}_0(x) := \max\{V(x), 1\}$. This function is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$, proper, positive, constant on $S_V(1)$ and it verifies

$$\forall x \notin S_V(1), \forall\zeta \in \partial_P\mathcal{V}_0(x), \inf_{u\in\mathcal{U}}\langle\zeta, f(x, u)\rangle \leq -W(x).$$

By assumption, for all $n \geq 0$, V is Lipschitz on $S_V[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$, we denote by $K(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}) = K_n$ its Lipschitz constant on this set (without loss of generality we can choose this constant greater than 1).

We define now a sequence inductively; suppose $\mathcal{V}_n$ given, we set

$$\mathcal{V}_{n+1}(x) := \begin{cases} \mathcal{V}_n(x) & \text{if } x \notin S_V(\frac{1}{2^n}) \\ \mathcal{V}_n(x) + \frac{1}{K_n}[V(x) - \frac{1}{2^n}] & \text{if } x \in S_V[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}] \\ \mathcal{V}_n(x) - \frac{1}{2^{n+1}K_n} & \text{if } x \in S_V(\frac{1}{2^{n+1}}) \end{cases}$$

We have the following lemma.

Lemma 4.1. For all $n \geq 1$, $\mathcal{V}_n$ is 1-Lipschitz on $S_V(1)$, proper, and constant on $S_V(\frac{1}{2^n})$. Moreover, $\mathcal{V}_n$ satisfies the following properties:

$$\forall x \in \mathbb{X}, \mathcal{V}_n(x) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k K_{k-1}}, \quad \text{and}$$

$\forall x \in S_V(\frac{1}{2^{n-1}}) \setminus S_V(\frac{1}{2^n}), \forall \zeta \in \partial_P \mathcal{V}_n(x),$

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -\frac{W(x)}{K_{n-1}}. \tag{4.1}$$

Proof. We're going to prove only the last assertion. The other ones are left to the reader, they are the consequence of an easy inductive proof.
Let $n \geq 1, x \in S_V(\frac{1}{2^{n-1}}) \setminus S_V(\frac{1}{2^n})$, and $\forall \zeta \in \partial_P \mathcal{V}_n(x)$.
We remark that for all y not in $S_V(\frac{1}{2^n})$, we have

$$\mathcal{V}_n(y) = \min\left\{\mathcal{V}_{n-1}(y), \mathcal{V}_{n-1}(y) + \frac{V(y) - \frac{1}{2^{n-1}}}{K_{n-1}}\right\}.$$

For the x chosen above, the minimum is attained in the second term , so

$$\zeta \in \partial_P \left[\mathcal{V}_{n-1}(x) + \frac{V(x) - \frac{1}{2^{n-1}}}{K_{n-1}}\right] = \partial_P \left[\mathcal{V}_{n-1}(x) + \frac{V(x)}{K_{n-1}}\right]. \tag{4.2}$$

First case: $n > 1$. We remark now that $\forall y \in S_V(\frac{1}{2^{n-2}})$,

$$\mathcal{V}_{n-1}(y) = \max\left\{C_{n-2} + \frac{V(y) - \frac{1}{2^{n-2}}}{K_{n-2}}, C_{n-2} - \frac{1}{2^{n-1}K_{n-2}}\right\},$$

where C_{n-2} is the value of $\mathcal{V}_{n-2}$ on the set $S_V(\frac{1}{2^{n-2}})$. We deduce by (4.2) that

$$\zeta \in \partial_P \left[\max\left\{\frac{V(x)}{K_{n-2}} + A, A'\right\} + \frac{V(x)}{K_{n-1}}\right].$$

where $A = C_{n-2} - \frac{1}{2^{n-2}K_{n-2}}$ and $A' = C_{n-2} - \frac{1}{2^{n-1}K_{n-2}}$.
Hence, we obtain that ζ is in the set

$$\partial_P \left[\max\left\{\left(\frac{1}{K_{n-2}} + \frac{1}{K_{n-1}}\right) V(x) + A, \frac{V(x)}{K_{n-1}} + A'\right\}\right].$$

Now, by the basic calculus on the proximal subgradients, we have

$$\zeta \in \operatorname{co}\left\{\left(\frac{1}{K_{n-2}} + \frac{1}{K_{n-1}}\right) \partial_P V(x), \frac{1}{K_{n-1}} \partial_P V(x).\right\}$$

Then, there exists ζ_1 et ζ_2 in $\partial_P V(x)$ and $t \in [0,1]$ such that

$$\begin{aligned}
\zeta &= t\left(\frac{1}{K_{n-2}} + \frac{1}{K_{n-1}}\right) \zeta_1 + (1-t)\frac{1}{K_{n-1}} \zeta_2. \\
&= \left[t\left(\frac{1}{K_{n-2}} + \frac{1}{K_{n-1}}\right) + (1-t)\frac{1}{K_{n-1}}\right] \hat{\zeta}
\end{aligned}$$

where $\hat{\zeta} \in \partial_P V(x)$, because $\partial_P V(x)$ is a convex set. Now, we invoke the decrease property of V, $\inf_{u\in\mathcal{U}}\langle\hat{\zeta}, f(x,u)\rangle \leq -W(x)$. Then

$$\inf_{u\in\mathcal{U}}\langle\zeta, f(x,u)\rangle \leq -\frac{W(x)}{K_{n-1}},$$

which gives the result.
Second case: If $n = 1$, the proof is similar. □

Now, note that for each $x \neq 0$, the sequence $(\mathcal{V}_n(x))_{n\geq 0}$ is stationary, thus it converges. So, we can define

$$\mathcal{V}(x) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}_n(x) - C.$$

where $C := 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}K_n} \in [0,1]$ (because the Lipschitz constants have been chosen greater than 1).
By the preceding lemma, $\mathcal{V}_n$ is always positive and for $x = 0$,

$$\mathcal{V}_n(0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k K_{k-1}} \to_{n\to\infty} C =: \mathcal{V}(0) + C.$$

We deduce that $\mathcal{V}(0) = 0$ and then that $\mathcal{V}$ is positive definite. On the other hand, it is locally Lipschitz everywhere as a simple limit of Lipschitz functions (with the same constant in each compact set on $\mathbb{X}$) and it verifies the decreasing property (2.2) with a continuous positive definite function $\mathcal{W}$ defined as follows:

$$\mathcal{W}(x) := \inf_{y\in\mathbb{X}}\{w(y) + \|x-y\|\}, \text{ for all } x \in \mathbb{X};$$

where

$$w(x) := \begin{cases} W(x) & \text{if } x \notin S_V(1) \\ \frac{W(x)}{K_n} & \text{if } x \in S_V(\frac{1}{2^n}) \setminus S_V(\frac{1}{2^{n+1}}) \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

The decrease property is an immediate consequence of (4.1).

To complete the proof of Theorem 2.7, we now have to prove the existence of a control-Lyapunov function which is continuous on $\mathbb{X}$ and locally Lipschitz outside the origin. We begin by defining a multifunction F, which is useful because it is uniformly bounded:

$$\forall x \in \mathbb{X}, F(x) := \text{cl} \quad \text{co}\left\{\frac{f(x,u)}{1+\|f(x,u)\|}; u \in \mathcal{U}\right\}.$$

We study the differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{a.e.}$$

This dynamic has the same properties as the system (2.1).

Proposition 4.2.

(i) F is locally Lipschitz and compact convex valued;

(ii) The system $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ is GAC.

PROOF. (i) We omit the proof.

(ii) Let $x \in \mathbb{X}$ with $\|x\| \leq R$ be given. By assumption, there is a trajectory $x(\cdot)$ of (2.1) on $[0, \infty)$ which verifies the assumptions of Global Asymptotic Controllability (Definition 2.3). We set

$$\phi(t) := \int_0^t [1 + \|\dot{x}(s)\|] ds$$

and we define a function $\tilde{x}$ on $[0, \infty]$ by

$$\tilde{x}(\tau) := x(t),$$

where $t = t(\tau)$ is determined in $[0, \infty]$ by

$$\tau = \int_0^t [1 + \|\dot{x}(s)\|] ds$$

(this change of variables or time scale is known as the Erdmann Transform.) Then

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{\dot{x}(t)}{1 + \|\dot{x}(t)\|} \in F(\tilde{x}(\tau)) \quad a.e.,$$

so that $\tilde{x}$ is an F-trajectory.
But by construction, for all $\tau \geq 0, \|\tilde{x}(\tau)\| \leq M(R)$ and if $\tau \geq \phi(T(r, R))$ then $\|\tilde{x}(\tau)\| \leq r$.
The trajectory $x(\cdot)$ remains in the ball $M(R)\bar{B}$, so if N_R denotes the maximum of $\|f(x, u)\|$ for $x \in M(R)\bar{B}$ and $u \in U$ (finite by the assumption 2.2), we have

$$\forall t \geq 0, \phi(t) \leq t(1 + N_R).$$

We deduce that if $\tau \geq T(r, R)(1 + N_R)$, then $\tau \geq \phi(T(r, R)$ and consequently $\|\tilde{x}(\tau)\| \leq r$.
The new differential inclusion $\dot{x} \in F(x)$ is GAC with suitable constants $M(R)$ and $\tilde{T}(r, R) := T(r, R)(1 + N_R)$.

□

We shall use the notation $M(\cdot)$ and $\tilde{T}(\cdot, \cdot)$ for the constants of global asymptotic stability of F.

Remark 4.3. We have in fact by a similar proof the following property.

Proposition 4.4. Let $\beta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ locally Lipschitz. Then the differential inclusion

$$\dot{x}(t) \in \beta(x(t))F(x(t)) \quad \text{a.e.}$$

is locally Lipschitz with convex compact values and it is GAC with appropriate functions $M(R) \downarrow 0$ and

$$\tilde{T}_\beta(r,R) = T(r,R) \max_{x \in M(R)\bar{B}} \{\beta(x)^{-1}\}.$$

First Step:

We proceed to define a first multifunction Γ_0 as follows:

$$\Gamma_0(x) := \begin{cases} \left[1 + (\|x\| - M(1))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2},1)}{M(1)^2}\right]^{-1} F(x) & \text{for } \|x\| \geq M(1) \\ F(x) & \text{for } 1 \leq \|x\| \leq M(1) \\ F(x) + 4[1 - \|x\|]\bar{B} & \text{for } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \\ F(x) + 2\bar{B} & \text{for } \|x\| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

By construction (and by Proposition 4.4), we have immediately the following lemma.

Lemma 4.5. The multifunction Γ_0 is compact convex valued, locally Lipschitz, uniformly bounded (by 1) and the differential inclusion $\dot{x} \in \Gamma_0(x(t))$ is GAC.

On the other hand, $\bar{B} \subset \Gamma_0(x)$ for all x in $\frac{1}{2}\bar{B}$. Hence, Theorem 3.5 can be applied with $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 := \frac{1}{2}\bar{B}$ and $L = L_0 := 1$. So we define the value function

$$V_0(x) := \inf\{T : x(0) = x, \dot{x}(t) \in \Gamma_0(x(t))\text{a.e. and } x(T) \in \frac{1}{2}\bar{B}\},$$

for all $x \in \mathbb{X}$.

Lemma 4.6. V_0 is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$, positive, proper and for all $x \notin B$,

$$\forall \zeta \in \partial_P V_0(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -1.$$

PROOF. This is an easy corollary of Theorem 3.5. □

We set $m_0 := \max\{V_0(x); \|x\| \leq 1\}$ and $S_0 := \{x; V_0(x) \leq m_0\}$. We define a new function $\tilde{V}_0$ as follows:

$$\tilde{V}_0(x) := \max\{0, V_0(x) - m_0\}.$$

Lemma 4.7.

(a) $\tilde{V}_0(x) = 0 \iff x \in S_0$;
(b) $\bar{B} \subset S_0 \subset 3M(1)\bar{B}$;
(c) $\forall x \notin S_0, \forall \zeta \in \partial_P \tilde{V}_0(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -1$.

PROOF. (a) Obvious by the definition of $\tilde{V}_0$.

(b) The first inclusion is given by the definition of S_0. However, the second one is less easy. Since the system $\dot{x} \in F(x)$ is GAC, for all $\alpha \in \bar{B}$ there exists a F-trajectory $x(\cdot)$ such that
   (1) $x(0) = \alpha$ and $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ a.e.,
   (2) $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M(1)$,
   (3) $\forall t \geq \tilde{T}(\frac{1}{2}, 1), \|x(t)\| \leq \frac{1}{2}$.

Now, from the definition of Γ_0, $\forall x \in M(1)\bar{B} \quad F(x) \subset \Gamma_0(x)$, then

$$V_0(\alpha) \leq \tilde{T}(\frac{1}{2}, 1).$$

Consequently, $m_0 \leq \tilde{T}(\frac{1}{2}, 1)$.
Let us consider now $\alpha \in \mathbb{X}$ such that $\|\alpha\| \geq 3M(1)$.
We remark that for $\|x\| \geq 2M(1)$, we have

$$\|\Gamma_0(x)\| \leq [1 + \frac{\tilde{T}(\frac{1}{2}, 1)}{M(1)}]^{-1}.$$

Then the time needed by a Γ_0 trajectory with initial condition α to reach the ball $2M(1)\bar{B}$ is greater than $[1 + \frac{\tilde{T}(\frac{1}{2},1)}{M(1)}]M(1)$.
Hence, $V_0(\alpha) \geq M(1) + \tilde{T}(\frac{1}{2}, 1) > m_0$.
Consequently, $S_0 \subset 3M(1)\bar{B}$.

(c) This last assertion is a consequence of Lemma 4.6.

$\square$

Second step

We now define a value function with a decrease property which holds closer to the origin. We set

$$\Gamma_1(x) := \begin{cases} \left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}\right]^{-1} F(x) & \text{for } \|x\| \geq M(\frac{1}{2}) \\ F(x) & \text{for } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq M(\frac{1}{2}) \\ F(x) + 8[\frac{1}{2} - \|x\|]\bar{B} & \text{for } \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ F(x) + 2\bar{B} & \text{for } \|x\| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

We have immediately the following result.

Lemma 4.8. Γ_1 is compact convex valued and the differential inclusion $\dot{x}(t) \in \Gamma_1(x(t))$ is GAC (with possible constants $M_1(R) = M(R) \downarrow 0$ and $\tilde{T}_1(r, R)$).

We need an auxiliary function with the local Lipschitz property. We define for all $x \in \mathbb{X}$:

$$B_0(x) := \max\{V_0(y) : \|y\| \leq \|x\| + M(1)\}.$$

As before, the new multifunction leads to a value function R_1 associated to the set $\mathcal{T}_1 := \frac{1}{4}\bar{B}$. We set for all x in $\mathbb{X}$:

$$R_1(x) := \inf\left\{\int_0^T L_1(x(t))dt : x(0) = x, \dot{x} \in \Gamma_1(x) \text{ a.e. and } x(T) \in \mathcal{T}_1\right\}$$

where $L_1(x) := 1 + \max\{0, \|x\| - 3M(1)\}\frac{B_0(x)}{\rho_1 M(1)^2}$ and

$$\rho_1 := \frac{m_0/2}{m_0\left[1 + (3M(1) - M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}\right] + \tilde{T}_1(\frac{1}{4}, 1)} \leq 1.$$

Theorem 3.5 gives the following lemma.

Lemma 4.9.

(a) R_1 is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$;
(b) $\forall \|x\| \geq \frac{1}{2}, \forall \zeta \in \partial_P R_1(x), \min_{v\in F(x)}\langle \zeta, v\rangle \leq -L_1(x)$.

PROOF. Since L_1 and Γ_1 are locally Lipschitz and the system associated to Γ_1 is GAC, R_1 is finite everywhere and Theorem 3.5 proves the assertions. □

As in the first step, we are going to evaluate the size of a certain level set given by R_1. We set $m_{R_1} := \max\{R_1(y) : y \in \frac{1}{2}\bar{B}\}$ and

$$S_{R_1}(m_{R_1}) = \{x : R_1(x) \leq m_{R_1}\}.$$

By Proposition 4.2, for any $x \in \frac{1}{2}\bar{B}$, there exists an F-trajectory $x(\cdot)$ such that

(1) $x(0) = x$,
(2) $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M(\frac{1}{2})$,
(3) $\forall t \geq \tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), \|x(t)\| \leq \frac{1}{4}$.

Moreover, $\forall x \in M(\frac{1}{2})\bar{B}, \quad F(x) \subset \Gamma_1(x)$ and $L_1(x) = 1$, then

$$R_1(x) \leq \tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}).$$

Consequently, $m_{R_1} \leq \tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
Now, we consider an initial state α such that $\|\alpha\| \geq 3M(\frac{1}{2})$.
We remark that for $\|x\| \geq 2M(1)$, we have

$$\|\Gamma_1(x)\| \leq [1 + \frac{\tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})}]^{-1}.$$

Then the time used by a Γ_1 trajectory with initial condition α to reach the ball $2M(\frac{1}{2})\bar{B}$ is greater than $[1 + \frac{\tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})}]M(\frac{1}{2})$.
Hence, $L_1 \geq 1$ implies $R_1(\alpha) \geq M(\frac{1}{2}) + \tilde{T}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) > m_{R_1}$.
Consequently:

$$S_{R_1}(m_{R_1}) \subset 3M(\frac{1}{2})\bar{B}.$$

Indeed, from the proof it follows the following lemma.

Lemma 4.10. $\frac{1}{2}\bar{B} \subset S_{R_1}(m_{R_1}) \subset 3M(\frac{1}{2})\bar{B}$.

We want now to compare R_1 with V_0.

Lemma 4.11.
(a) $\forall x \in S_0, \rho_1 R_1(x) \leq \frac{m_0}{2}$;
(b) If $\|x\| \geq 5M(1)$, then $V_0(x) \leq \rho_1 R_1(x)$.

PROOF. (a) Let $x \in S_0$. Indeed, there exists a Γ_0-trajectory $x(\cdot)$ which connects x to the set $\bar{B}$ in time $T_x \leq V_0(x) \leq m_0$. Hence, $\forall t \geq 0, x(t) \in S_0 \subset 3M(1)\bar{B}$ (by Lemma 4.7(b)). In the zone

$\|x\| \in [1, 3M(1)]$ we can write $\Gamma_1(x) \subset \beta(x)\Gamma_0(x)$ with $\beta(x)$ as follows (assuming that $M(\frac{1}{2}) \geq 1$):

$$\beta(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } \|x\| \in [\frac{1}{2}, M(\frac{1}{2})] \\ \left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}\right]^{-1} & \text{if } \|x\| \in [M(\frac{1}{2}), M(1)] \\ \frac{\left[1+(\|x\|-M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}\right]^{-1}}{\left[1+(\|x\|-M(1))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2},1)}{M(1)^2}\right]^{-1}} & \text{if } \|x\| \in [M(1), 3M(1)] \end{cases}$$

We observe that if $M(\frac{1}{2}) < 1$, we have to omit it in the definition of β. Now, an appropriate change of variables (see Proposition 4.4) shows that there exists a Γ_1-trajectory $x(\cdot)$ which remains in $3M(1)\bar{B}$ and drives x to $\bar{B}$ in a time $T \leq T_x \max_{\|x\| \in [1,3M(1)]} \beta(x)^{-1}$. Thus, we obtain $T \leq m_0[1 + (3M(1) - M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}]$.
Now, we can extend this trajectory to $\mathcal{T}_1$ with the following property (by Lemma 4.8): $\forall t \geq T, x(t) \in M(1)\bar{B}$ and $x(T + \tilde{T}_1(\frac{1}{4}, 1)) \in \frac{1}{4}\bar{B}$. Thus, we have constructed a trajectory which remains in $3M(1)\bar{B}$ (where $L_1 = 1$) and reaches the set $\mathcal{T}_1$. Consequently, $R_1(x) \leq m_0 \left[1 + (3M(1) - M(\frac{1}{2}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{4},\frac{1}{2})}{M(\frac{1}{2})^2}\right] + \tilde{T}_1(\frac{1}{4}, 1)$. We conclude by the definition of ρ_1.

(b) Let x be such that $\|x\| \geq 5M(1)$. By the definition of B_0 we have

$$\|y\| \geq \|x\| - M(1) \Longrightarrow B_0(y) \geq V_0(x) \Longrightarrow L_1(y) \geq 1 + \frac{V_0(x)}{\rho_1 M(1)^2}.$$

On the other hand, the time required to go from $\{\|y\| \geq \|x\| - M(1)\}$ to $\{\|y\| \geq \|x\| - 2M(1)\}$ is greater than $M(1)$ (the dynamic is bounded by 1). Consequently,

$$\begin{aligned} R_1(x) &\geq M(1)[1 + \frac{V_0(x)}{\rho_1 M(1)}] \\ &\geq \frac{V_0(x)}{\rho_1}. \end{aligned}$$

□

We finish this step by defining a new function V_1 as follows.

$$\forall x \in \mathbb{X}, V_1(x) := \min\{\tilde{V}_0(x) + m_0, \rho_1 R_1(x)\}.$$

We set $m_1 := \max\{V_1(x) : x \in \frac{1}{2}\bar{B}\}$ and $S_1 := \{x : V_1(x) \leq m_1\}$. We have the following lemma.

Lemma 4.12. V_1 is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$. Moreover, we have,

(a) $m_1 \leq \frac{m_0}{2}$;
(b) $\forall x \in S_0 \cup S_1, V_1(x) = \rho_1 R_1(x)$;
(c) $\frac{1}{2}\bar{B} \subset S_1 \subset 3M(\frac{1}{2})\bar{B}$;
(d) If $\|x\| \geq 5M(1)$ then $V_1(x) = V_0(x)$.

(e) For $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 5M(1), \forall \zeta \in \partial_P V_1(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -\rho_1$;
(f) For $\|x\| > 5M(1), \forall \zeta \in \partial_P V_1(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -1$.

PROOF. (a) By Lemma 4.11 (a), for any $x \in S_0, \rho_1 R_1(x) \leq \frac{m_0}{2}$. Hence by definition of V_1, $\forall x \in S_0, V_1(x) = \rho_1 R_1(x)$. Thus we conclude by remarking that $\frac{1}{2}\bar{B} \subset S_0$. We have in fact $m_1 = \rho_1 m_{R_1}$.

(b) let $x \in S_0 \cup S_1$. If $x \in S_0$, we have shown the equality in the first assertion. Otherwise, $V_1(x) \leq m_1 \leq \frac{m_0}{2}$ implies the equality.

(c) If $x \in S_1$ then $V_1(x) = \rho_1 R_1(x) \leq m_1$. And by the remark in (a), $R_1(x) \leq m_{R_1}$ which gives the inclusion.

(d) For $\|x\| \geq 5M(1)$, we have that $V_0(x) = \tilde{V}_0(x) + m_0$ (because $S_0 \subset 3M(1)\bar{B}$). We conclude by Lemma 4.11(b).

(e) Let $x \in \mathbb{X}$ such that $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 5M(1)$ and $\zeta \in \partial_P V_1(x)$. We recall the definition of $V_1(x)$:

$$V_1(x) := \min\{\tilde{V}_0(x) + m_0, \rho_1 R_1(x)\}.$$

First Case: The minimum is attained by the second term.
Then $\zeta \in \partial_P \rho_1 R_1(x) = \rho_1 \partial_P R_1(x)$
We conclude by Lemma 4.9 (b).
Second Case: the minimum is attained by the first term and not by the second one. In this case, $x \notin S_0$ and $\zeta \in \partial_P(\tilde{V}_0 + m_0)(x) = \partial_P \tilde{V}_0(x)$. We conclude by Lemma 4.7 (c).

(f) This is an easy consequence of the Lemma 4.11(b).

□

Third Step

We finish the construction of the sequence $(V_n)_{n\geq 0}$ by induction on n. Assume $(V_k, \mathcal{T}_k, L_k, R_k, \Gamma_k)$ have already been defined for $1 \leq k \leq n$ with the following properties.

1) $\frac{1}{2^k}\bar{B} \subset S_k \subset 3M(\frac{1}{2^k})\bar{B}$;
2) For $\|x\| \geq 5M(\frac{1}{2^{k-1}}), V_k(x) = V_{k-1}(x)$;
3) For $\frac{1}{2^k} \leq \|x\| \leq 5M(\frac{1}{2^{k-1}}), \forall \zeta \in \partial_P V_k(x), \min_{v \in F(x)} \langle \zeta, v \rangle \leq -\rho_k$;
4) $L_k = 1$ on the ball $3M(\frac{1}{2^{k-1}})\bar{B}$;
5) $\forall x \in \mathbb{R}^N, V_k(x) = 0 \iff x \in \frac{1}{2^{k+1}}\bar{B}$;
6) $\forall k \in [1, n], m_k \leq \frac{m_{k-1}}{2}$, and $\rho_k \leq \rho_{k-1} \leq 1 =: \rho_0$;

where

$$m_k := \max\{V_k(x); \|x\| \leq \frac{1}{2^k}\},\ S_k := \{x; V_k(x) \leq m_k\},$$

and the ρ_k's are some positive constants.
As before, we can define a new function V_{n+1}. We proceed as follows:

for all $x \in \mathbb{X}$, we set $\Gamma_{n+1}(x) :=$

$$\begin{cases} \left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}},\frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}\right]^{-1} F(x) & \text{if } \|x\| \geq M(\frac{1}{2^{n+1}}) \\ F(x) & \text{if } \|x\| \in [\frac{1}{2^{n+1}}, M(\frac{1}{2^{n+1}})] \\ F(x) + 2^{n+3}[\frac{1}{2^{n+1}} - \|x\|]\bar{B} & \text{if } \|x\| \in [\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}] \\ F(x) + 2\bar{B} & \text{if } \|x\| \leq \frac{1}{2^{n+2}} \end{cases}$$

As before we need an auxiliary function with the local Lipschitz property. We define for all $x \in \mathbb{X}$:

$$B_n(x) := \max\{V_n(y) : \|y\| \leq \|x\| + M(\frac{1}{2^n})\}.$$

From this multifunction, we define a value function associated to the set $\mathcal{T}_{n+1} := \frac{1}{2^{n+2}}\bar{B}$. We set for any $x \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) := \inf\{\int_0^T \quad & L_{n+1}(x(t))dt : \\ & x(0) = x, \dot{x} \in \Gamma_{n+1}(x) \text{ and } x(T) \in \mathcal{T}_{n+1}\}, \end{aligned}$$

where $L_{n+1}(x) := 1 + \max\{0, \|x\| - 3M(\frac{1}{2^n})\}\frac{B_n(x)}{\rho_{n+1}M(\frac{1}{2^n})^2}$ with

$$\rho_{n+1} := \frac{\rho_n m_n/2}{m_n\left[1 + (3M(\frac{1}{2^n}) - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}},\frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}\right] + \tilde{T}_{n+1}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n})}$$

Of course, we have by definition that $\rho_{n+1} \leq \rho_n$.
The differential inclusion $\dot{x} \in \Gamma_{n+1}(x))$ is GAC, we denote by $\tilde{T}_{n+1}(\cdot,\cdot)$ its new constant (we saw that we can choose $\tilde{M}_{n+1} = M$). On the other hand, we set

$$m_{R_{n+1}} := \max\{R_{n+1}(y) : y \in \frac{1}{2^{n+1}}\bar{B}\},$$

$$\text{and } S_{R_{n+1}}(m_{R_{n+1}}) := \{x : R_{n+1}(x) \leq m_{R_{n+1}}\}.$$

Lemma 4.13.
(a) R_{n+1} is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$;
(b) $\forall \|x\| \geq \frac{1}{2^{n+1}}, \forall \zeta \in \partial_P R_{n+1}(x), \min_{v\in F(x)}\langle \zeta, v\rangle \leq -L_{n+1}(x)$;
(c) $\frac{1}{2^{n+1}}\bar{B} \subset S_{R_{n+1}}(m_{R_{n+1}}) \subset 3M(\frac{1}{2^{n+1}})\bar{B}$;
(d) $\forall x \in S_n, \rho_{n+1}R_{n+1}(x) \leq \frac{m_n}{2}$;
(e) If $\|x\| \geq 5M(\frac{1}{2^n})$, then $V_n(x) \leq \rho_{n+1}R_{n+1}(x)$.

Proof. (a) and (b) are evident by Theorem 2.7. The assertion (c) is proved as before (Lemma 4.10). We prove now (d) and (e); we begin with (e).
Let be given $\|x\| \geq 5M(\frac{1}{2^n})$. By the definition of B_n we have

$$\|y\| \geq \|x\| - M(\frac{1}{2^n}) \Longrightarrow B_n(y) \geq V_n(x) \Longrightarrow L_{n+1}(y) \geq 1 + \frac{V_n(x)}{\rho_{n+1}M(\frac{1}{2^n})^2}.$$

On the other hand, the time required for driving from $\{\|y\| \geq \|x\| - M(\frac{1}{2^n})\}$ to $\{\|y\| \geq \|x\| - 2M(\frac{1}{2^n})\}$ is greater than $M(\frac{1}{2^n})$ (the dynamic is bounded by 1). Consequently,

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &\geq M(\frac{1}{2^n})[1 + \frac{V_n(x)}{\rho_{n+1}M(\frac{1}{2^n})}] \\ &\geq \frac{V_n(x)}{\rho_{n+1}}. \end{aligned}$$

We prove now (d). Let $x \in S_n$. Indeed, there exists a Γ_n-trajectory $x(\cdot)$ which takes x to the set $\frac{1}{2^n}\bar{B}$ in time $T_x \leq V_n(x) \leq m_n$ and which remains in S_n (because $S_n \subset 3M(\frac{1}{2^n}\bar{B}$ and $L_n = 1$ on $3M(\frac{1}{2^n}\bar{B})$. In the zone $\|x\| \in [\frac{1}{2^n}, 3M(\frac{1}{2^n})]$ we can write $\Gamma_{n+1}(x) \subset \beta(x)\Gamma_n(x)$ with $\beta(x)$ as follows (assuming that $M(\frac{1}{2^{n+1}}) \geq \frac{1}{2^n}$; we adapt otherwise): $\beta(x) :=$

$$\begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| \in [\frac{1}{2^n}, M(\frac{1}{2^{n+1}})] \\ \left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}\right]^{-1} & \text{for } \|x\| \in [M(\frac{1}{2^{n+1}}), M(\frac{1}{2^n})] \\ \dfrac{\left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}\right]^{-1}}{\left[1 + (\|x\| - M(\frac{1}{2^n}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+1}}, 2^n)}{M(\frac{1}{2^n})^2}\right]^{-1}} & \text{for } \|x\| \in [M(\frac{1}{2^n}), 3M(\frac{1}{2^n})] \end{cases}$$

An appropriate change of variables (see Proposition 4.4) shows that there exists a Γ_{n+1}-trajectory $x(\cdot)$ which remains in $3M(\frac{1}{2^n})\bar{B}$ and takes x to $\frac{1}{2^n}\bar{B}$ in a time $T \leq T_x \max_{\|x\| \in [\frac{1}{2^n}, 3M(\frac{1}{2^n})]} \beta(x)^{-1}$.

Thus, we have $T \leq m_n[1 + (3M(\frac{1}{2^n}) - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}]$.

Now, we can extend this trajectory to $\mathcal{T}_{n+1}$ with the following property (by Lemma 4.8): $\forall t \geq T, x(t) \in M(\frac{1}{2^n})\bar{B}$ and $x(T + \tilde{T}_{n+1}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n})) \in \mathcal{T}_{n+1}$. In this way, we have constructed a trajectory which remains in $3M(\frac{1}{2^n})\bar{B}$ (where $L_{n+1} = 1$) and reaches the set $\mathcal{T}_{n+1}$.

Consequently,

$R_{n+1}(x) \leq m_n \left[1 + (3M(\frac{1}{2^n}) - M(\frac{1}{2^{n+1}}))\frac{\tilde{T}(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}})}{M(\frac{1}{2^{n+1}})^2}\right] + \tilde{T}_1(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n})$.

We conclude by the definition of ρ_{n+1}. □

We can now define the new function V_{n+1}. We set for all $x \in \mathbb{X}$,

$$V_{n+1}(x) := \min\{\tilde{V_n}(x) + m_n, \rho_{n+1}R_{n+1}(x)\},$$

where $\tilde{V_n}(x) := \max\{0, V_n(x) - m_n\}$.

As before, we consider

$$m_{n+1} := \max\{V_{n+1}(x) : x \in \frac{1}{2^{n+1}}\bar{B}\} \text{ and} S_{n+1} := \{x : V_{n+1}(x) \leq m_{n+1}\}.$$

We have the following lemma.

Lemma 4.14. V_{n+1} is locally Lipschitz on $\mathbb{X}$. Moreover, we have

(a) $m_{n+1} \leq \frac{m_n}{2}$;

(b) $\frac{1}{2^{n+1}}\bar{B} \subset S_{n+1} \subset 3M(\frac{1}{2^{n+1}})\bar{B}$;
(c) If $\|x\| \geq 5M(\frac{1}{2^n})$, then $V_{n+1}(x) = V_n(x)$;
(d) For $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \|x\| \leq 5M(\frac{1}{2^n}), \forall \zeta \in \partial_P V_{n+1}(x), \min_{v\in F(x)}\langle \zeta, v\rangle \leq -\rho_{n+1}$.

Proof. The proof is similar to the proof of Lemma 4.12. This is left to the reader. □

Fourth Step: The Function V

We study the convergence of the sequence $(V_n)_{n\geq 0}$; for that, we need a last lemma:

Lemma 4.15. $\forall k, 0 \leq k \leq n, \forall x \in S_k, V_n(x) \leq m_k$.

Proof. We do an inductive proof. Since the result has already been proved for n=1 (Lemma 4.12), we assume that we have proved the result for $n \geq 1$; we establish the property for $n+1$.
Let us consider $0 \leq k \leq n+1$ and $x \in S_k$.
First Case: $k \leq n$.
If $x \notin S_n$, then by definition of V_n, $V_n(x) = \tilde{V_n}(x) + m_n$. Hence, $V_{n+1}(x) \leq V_n(x) \leq m_k$ by induction.
Otherwise, $x \in S_n$. In this case, $\tilde{V_n}(x) = 0$ implies $V_{n+1}(x) \leq m_n \leq m_k$ by the property on the sequence (m_k).
Second Case: $k = n+1$.
The property follows from the definition of S_{n+1}. □

We can now conclude. Let us consider a compact set K in $\mathbb{X}\setminus\{0\}$. Then, as $\lim_{n\to\infty} M(\frac{1}{2^n}) = 0$, there exists a positive integer n_K such that

$$\|x\| \geq 5M(\frac{1}{2^{n_K}}), \quad \forall x \in K.$$

By the second property of the sequence $(V_n)_{n\geq 0}$, for any $n \geq n_K, V_n(x) = V_{n_K}(x)$.
Hence, the sequence $(V_n(x))_{n\geq 0}$ converges for all x in K and the limit is a locally Lipschitz function in K (as a stationary limit of locally Lipschitz functions). On the other hand, for any $n \geq 0, V_n(0) = 0$; so we can define for all $x \in \mathbb{X}$,

$$V(x) := \lim_{n\to\infty} V_n(x).$$

By the proof above, V is locally Lipschitz on $\mathbb{X}\setminus\{0\}$, positive definite and proper (since $V_n = V_0, \quad \forall n$ if $\|x\| \geq 5M(1)$); we have to show that V is continuous at the origin. This fact is a consequence of the preceding lemma.
Let us consider $x_p \longrightarrow_{p\to\infty} 0$. We want to show that $f(x_p) \longrightarrow_{p\to\infty} 0$.
Let $\epsilon > 0$. There exists $n_0 \geq 0$ such that $m_{n_0} \leq \epsilon$ (because $m_n \leq \frac{m_0}{2^n}$).
Thus, by the last lemma, $\forall n \geq n_0, \forall x \in S_{n_0}, V_n(x) \leq \epsilon$.
But for p sufficiently great (for instance $p \geq P$, where P is a positive

real number):

$$x_p \in \frac{1}{2^{n_0}}\bar{B} \subset S_{n_0}.$$

We deduce that $\forall n \geq n_0, \forall p \geq P, V_n(x_p) \leq \epsilon$. By passing to the limit: $\forall p \geq P, V(x_p) \leq \epsilon$, which gives the continuity on the origin.
Now, we set $\forall x \in \mathbb{X}$,

$$w(x) := \begin{cases} \rho_n & \text{if } 5M(\frac{1}{2^{n+1}}) < \|x\| \leq 5M(\frac{1}{2^n}) \\ 1 & \text{if } \|x\| > 5M(1) \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

We can now define the function W by

$$\forall x \in \mathbb{X}, W(x) := \inf_{y \in \mathbb{X}}\{w(y) + \|x - y\|\}.$$

W is a positive definite and locally Lipschitz function. The decrease condition (2.2) is the consequence of the stationarity of the sequence $(V_n(x))_{n\geq 0}$ outside the origin and of Lemma 4.14 (d). This completes the proof of Theorem 2.7.

5. Existence of a semiconcave CLF

We begin with some preliminaries on semiconcavity. It is easy to show that any semiconcave function in Ω is locally Lipschitz. Concave functions are of course semiconcave. Another class of semiconcave functions is that of C^1 functions with locally Lipschitz gradient. Moreover we have the two following lemmas.

Lemma 5.1. Let $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ be an increasing semiconcave function and $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ be a semiconcave function on Ω. Then $\Psi \circ u$ is a semiconcave function on Ω.

Lemma 5.2. Let $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ be two semiconcave functions on Ω, then the function $\min\{u, v\}$ is semiconcave on Ω.

A convenient way to build semiconcave approximations of a given function is provided by the method of *inf-convolution*, a standard tool in convex and non-smooth analysis. Let Ω be a subset of $\mathbb{X}$ and u a positive function in Ω. Define, for any $\alpha > 0$,

$$u_\alpha(x) := \inf_{y \in \Omega}\{u(y) + \alpha\|x - y\|^2\}. \tag{5.1}$$

Lemma 5.3. Let $u : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ be a locally Lipschitz and proper function. Then u_α is semiconcave on $\mathbb{X}$ (in (5.1) the infimum is actually a minimum) and moreover, $u_\alpha \nearrow u$, as $\alpha \to +\infty$, locally uniformly in $\mathbb{X}$.

Proof. We leave the proof to the reader. □

We can link the proximal subdifferentials of u and its inf-convolution. We have the following Lemma. (We refer to [**24**, Th.5.1,p.44] for the proof.)

Lemma 5.4. Suppose that $x \in \mathbb{X}$ is such that $\partial_P u_\alpha(x)$ is nonempty. Then there exists a point $\bar{y} \in \mathbb{X}$ satisfying the following:

a) The infimum in (5.1) is attained uniquely at $\bar{y}$.
b) The proximal subgradient $\partial_P u_\alpha(x)$ is the singleton $\{2\alpha(x - \bar{y})\}$.
c) $2\alpha(x - \bar{y}) \in \partial_P u(\bar{y})$.

Proof of Theorem 2.10

By Theorem 2.7, there exists a control-Lyapunov pair for the system (2.1); without loss of generality, we can suppose that the function W is 1-Lipschitz on $\mathbb{X}$ (othewise, we can set $\tilde{W}(x) := \inf_{y\in\mathbb{X}}\{W(y) + \|x - y\|\}$).
For any $0 < r < R$, we define the following sets:

$$S_V[r, R] := \{x \in \mathbb{X} : V(x) \in [r, R]\} \text{ and } S_V(R) := \{x \in \mathbb{X} : V(x) \le R\}.$$

Let us consider an integer $n \in \mathbb{N}^*$.
By the Lipschitz property of f and V, we can consider $L_f^n \ge 1$ (respectively $L_V^n \ge 1$) the Lipschitz constant of $f(\cdot, u)$ (respectively of V) on the level set $S_V(M_n)$ where the constant M_n is defined by

$$M_n := \max\{V(x) : x \in S_V(11n) + \bar{B}\}.$$

On the other hand, we denote by w_n the minimum of W on $S_V[\frac{1}{2n}, 11n]$, and we set

$$\alpha_n \;:=\; \max\left\{8n(L_V^n)^2 + 1, \frac{2L_V^n(1 + L_V^n L_f^n)}{w_n} + 1, 11n\right\}. \tag{5.2}$$

We define by inf-convolution the function V_{α_n} as follows:

$$V_{\alpha_n}(x) := \inf_{y\in\mathbb{X}}\{V(y) + \alpha_n\|x - y\|^2\}. \tag{5.3}$$

Lemma 5.5. Let $x_0 \in S_V(M_n)$. If the infimum in the definition of $V_{\alpha_n}(x_0)$ is attained at $\bar{y}$, then $\|x_0 - \bar{y}\| \le \min\{\frac{1}{8nL_V^n}, \frac{w_n}{2(1+L_V^n L_f^n)}\}$ and

$$V(x_0) - \frac{1}{8n} \le V_{\alpha_n}(x_0) \le V(x_0).$$

Proof. If the infimum is attained for $\bar{y}$, then $V(\bar{y}) \le V(x_0) \le M_n \Longrightarrow \bar{y} \in S_V(M_n)$. Hence, if $\|x_0 - \bar{y}\| > \min\{\frac{1}{8nL_V^n}, \frac{w_n}{2(1+L_V^n L_f^n)}\}$ then, by definition of L_f^n and L_V^n:

$$\begin{aligned}
V_{\alpha_n}(x_0) &= V(\bar{y}) + \alpha_n\|x_0 - \bar{y}\|^2 \\
&\ge V(x_0) - L_V^n\|x_0 - \bar{y}\| + \alpha_n\|x_0 - \bar{y}\|^2 \\
&\ge V(x_0) + \|x_0 - \bar{y}\|[\alpha_n\|x_0 - \bar{y}\| - L_V^n] \\
&\ge V(x_0) + \|x_0 - \bar{y}\|\left[\alpha_n \min\left\{\frac{1}{8nL_V^n}, \frac{w_n}{2(1 + L_V^n L_f^n)}\right\} - L_V^n\right] \\
&> V(x),
\end{aligned}$$

we find a contradiction. Hence, $\|x_0 - \bar{y}\| \leq \min\{\frac{1}{8nL_V^n}, \frac{w_n}{2(1+L_V^n L_f^n)}\}$. On the other hand, we have found the estimate

$$V_{\alpha_n}(x_0) \geq V(x_0) + \|x_0 - \bar{y}\|[\alpha_n \|x_0 - \bar{y}\| - L_V^n].$$

Consequently, $V_{\alpha_n}(x_0) \geq V(x_0) - L_V^n \|x_0 - \bar{y}\|$ which implies the desired inequality by the bound on $\|x_0 - \bar{y}\|$. ☐

Lemma 5.6. Let $x_0 \in S_V[\frac{1}{2n}, 11n]$ and $\zeta \in \partial_P V_{\alpha_n}(x_0)$, then

$$\inf_{u \in U} \langle \zeta, f(x_0, u)\rangle \leq -\frac{W(x_0)}{2}.$$

PROOF. By the Lemmas 5.4 and 5.5, the infimum in the definition of $V_{\alpha_n}(x_0)$ is attained uniquely at a point $\bar{y} \in S_V(11n)$ which satisfies $\|x_0 - \bar{y}\| \leq \frac{w_n}{2(1+L_V^n L_f^n)}$ and such that $\zeta \in \partial_P V(\bar{y})$. Thus, by the Lipschitz properties of f, V and W, we can write:

$$\begin{aligned}
\inf_{u \in U} \langle \zeta, f(x_0, u)\rangle &\leq \inf_{u \in U} \langle \zeta, f(\bar{y}, u)\rangle + \sup_{u \in U} \|\zeta\| \|f(x_0, u) - f(\bar{y}, u)\| \\
&\leq -W(\bar{y}) + L_V^n L_f^n \|x_0 - \bar{y}\| \quad \text{(decrease condition)} \\
&\leq -W(x_0) + (1 + L_V^n L_f^n)\|x_0 - \bar{y}\| \\
&\leq -W(x_0) + \frac{w_n}{2} \leq -\frac{W(x_0)}{2}.
\end{aligned}$$

☐

Lemma 5.7. There exists $\Psi_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ C^∞ increasing which satisfies the following properties:

(i) $\forall t \in [0, \frac{1}{2n}], \Psi_n(t) = t + \frac{1}{8n}$;
(ii) $\forall t \in [11n - \frac{1}{8n}, \infty), \Psi_n(t) \geq 11n + \max\{V(x) : V_{\alpha_n}(x) \leq t\}$;
(iii) $\forall t \in [\frac{1}{n} - \frac{1}{8n}, 10n], \Psi_n(t) = t$;
(iv) $\forall t \geq 0, \Psi_n'(t) \geq \frac{1}{2}$.

PROOF. The different properties lead to defining a piecewise affine function which we then regularize to render it C^∞, giving Ψ_n. ☐

The function $\tilde{V}_n := \Psi_n \circ V_{\alpha_n}$ is semiconcave on $\mathbb{X}$ by Lemma 5.1. The definitive Lyapunov pair $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ is defined for all $x \in \mathbb{X}$ by:

$$\mathcal{V}(x) := \min_{n \in \mathbb{N}^*}\{\tilde{V}_n(x)\} \quad \text{and } \mathcal{W}(x) := \frac{W(x)}{4}. \tag{5.4}$$

Lemma 5.8. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_0 \in S_V[\frac{1}{n}, 10n], \mathcal{V}(x_0) = \min_{1 \leq p \leq n} \tilde{V}_p(x_0)$. Furthermore, if $\zeta \in \partial_P \mathcal{V}(x_0)$, then

$$\inf_{u \in U} \langle \zeta, f(x_0, u)\rangle \leq -\frac{W(x_0)}{4}. \tag{5.5}$$

PROOF. Let be given $n \in \mathbb{N}^*$ and $x_0 \in S_V[\frac{1}{n}, 10n]$. By Lemma 5.5, $V_{\alpha_n}(x_0) \in [\frac{1}{n} - \frac{1}{8n}, 10n]$. Hence, Lemma 5.7 implies that $\tilde{V}_n(x_0) = V_{\alpha_n}(x_0)$. On the other hand, for any $p \geq n$, by construction $\alpha_p \geq \alpha_n$

and then $V_{\alpha_p}(x_0) \geq V_{\alpha_n}(x_0)$. The same argument as above on Ψ_p leads to

$$\tilde{V}_p(x_0) = V_{\alpha_p}(x_0) \geq \tilde{V}_n(x_0) = V_{\alpha_n}(x_0).$$

consequently, we have shown that $\mathcal{V}(x_0) = \min_{1 \leq p \leq n} \tilde{V}_p(x_0)$. Now, if the minimum in the definition of $\mathcal{V}(x_0)$ is attained for $\tilde{V}_{n_0}(x_0)$ (with $1 \leq n_0 \leq n$) then

$$\zeta \in \partial_P \mathcal{V}(x_0) \Longrightarrow \zeta \in \partial_P \tilde{V}_{n_0}(x_0) = \Psi'(V_{\alpha_{n_0}}(x_0))\partial_P V_{\alpha_{n_0}}(x_0).$$

We now have to show the inequality (5.5).
First Case: If $V(x_0) > 11n_0$ and $V_{\alpha_{n_0}(x_0)} \leq 11n_0$, then there exists $\bar{y} \in x_0 + \bar{B}$ (because $\alpha_{n_0} \geq 11n_0$) such that $V_{\alpha_{n_0}}(x_0) = V(\bar{y}) + \alpha_{n_0}\|x_0 - \bar{y}\|^2$. Therefore, $\bar{y} \in S_V(11n_0)$ and $x_0 \in S_V(M_{n_0})$ by definition of M_{n_0}. By Lemma 5.5 and Lemma 5.7 (ii), we obtain $V_{\alpha_{n_0}(x_0)} \geq 11n_0 - \frac{1}{8n_0}$ and $\tilde{V}_{n_0}(x_0) \geq 11n_0 + V(x_0)$. But $\tilde{V}_n(x_0) = V_{\alpha_n}(x_0) \leq V(x_0)$. Hence, $n_0 = n$, and we have the decrease property by Lemma 5.6.
Second Case: If $V(x_0) > 11n_0$ and $V_{\alpha_{n_0}(x_0)} > 11n_0$, then Lemma 5.7(ii) implies $\tilde{V}_{n_0}(x_0) \geq 11n_0 + V(x_0)$, we conclude as in the first case.
Third Case: If $V(x_0) < \frac{1}{2n_0}$, then

$$V_{\alpha_{n_0}}(x_0) \leq V(x_0) < \frac{1}{2n_0} \Longrightarrow \tilde{V}_{n_0}(x_0) = V_{\alpha_{n_0}}(x_0) + \frac{1}{8n_0} \geq V(x_0).$$

But we proved that $\tilde{V}_n(x_0) = V_{\alpha_n}(x_0) \leq V(x_0)$, so the minimum is also attained for n; then we have (5.5) by Lemma 5.6.
Fourth Case: If $x_0 \in S_V[\frac{1}{2n_0}, 11n_0]$, then we conclude by Lemma 5.6 and Lemma 5.7 (iv). $\square$

This last Lemma shows that the minimum in the definition of $\mathcal{V}(x)$ is always attained for $x \neq 0$. Therefore, the function $\mathcal{V}$ is semiconcave outside the origin (by Lemma 5.2). On the other hand, $\mathcal{V}$ is continuous at the origin (because $0 \leq \mathcal{V} \leq V$) and satisfies the decrease condition by 5.5. Consequently $\mathcal{V}$ provides a control-Lyapunov function; which proves the Theorem 2.10.

CHAPITRE V

Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks

1. Introduction

In the previous chapter, we have considered the stabilization problem for standard control systems. In particular, we have proved that if a control system is globally asymptotically controllable, then one can associate to it a control-Lyapunov function which is semiconcave outside the origin. The aim of this article is to show the interest of considering semiconcavity of such functions in the construction of stabilizing feedbacks.

Let be given a standard control system of the general form $\dot{x} = f(x, u)$ which is globally asymptotically controllable; our objective is to design a feedback law $u : \mathbb{R}^n \to U$ such that the origin of the closed loop system $\dot{x} = f(x, u(x))$ is globally asymptotically stable. Unfortunately, as pointed out by Sontag and Sussmann [**77**] and by Brockett [**13**], a continuous stabilizing feedback fails to exist in general. In addition to that, a smooth Lyapunov function does not exist either. As a matter of fact, although smooth Lyapunov-like techniques have been successfully used in many problems in control theory, it was shown by Clarke, Ledyaev and Stern [**22**] that there is no hope to obtain a smooth Lyapunov function in the general case of globally asymptotically controllable systems (the existence of such a function is indeed equivalent to the one of a robust stabilizing feedback, see [**55, 67**]). These facts lead us to consider nonsmooth control-Lyapunov functions and particularly semiconcave control-Lyapunov functions; we proved the existence of such a function in the previous chapter. This article relies on this result to derive a very useful construction of stabilizing feedbacks. As a matter of fact, the semiconcavity of the control-Lyapunov function allows us to give an explicit formula for the design of the stabilizing feedbacks. More particularly, this formula can be used in the context of control systems which are affine in the control to extend the Sontag's formula [**71**] to the case of discontinuous feedback laws.

Furthermore, the last result of this chapter asserts that when the control system is affine in the control and satisfies a condition (related to the control-Lyapunov function that we consider), we can design a feedback which is continuous on an open dense set and which stabilizes the closed loop system in the sense of Carathéodory Solutions. Surprisingly, we show that in this case, all the trajectories of the closed loop system remain in the set of continuity for positive times; in other words, the set of singularities of the stabilized system is repulsive and hence the feedback law is continuous along the trajectories for $t > 0$.

Our chapter is organised as follows: in section 2 we describe our main results. In section 3 we present notions of discontinuous stabilizing feedbacks. In section 4 and 5, we give the proofs of different results. Finally, the main theorem is proved in Section 6.

Throughout this chapter, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ denotes nonnegative reals, $\|\cdot\|$ a norm of $\mathbb{R}^n$, B the open ball $B(0,1) := \{x : \|x\| < 1\}$ in $\mathbb{R}^n$ and $\overline{B}$ the closure of B.

2. Definitions and statements of the results

We study systems of the general form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

where the state $x(t)$ takes values in a Euclidean space $\mathbb{R}^n$, the control $u(t)$ takes values in a given metric space U, and f is locally Lipschitz in x uniformly in u. We distinguish a special element "0" in U and we assume that the state $x = 0$ is an equilibrium point (i.e., $f(0,0) = 0$). We are interested in the globally asymptotically controllable systems which we proceed to define.

Definition 2.1. The system (2.1) is Globally Asymptotically Controllable (abbreviated GAC) if there exist nondecreasing functions

$$\theta, \tilde{\theta} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

such that $\lim_{r\to 0^+} \tilde{\theta}(r) = 0$, with the property that, for each $\xi \in \mathbb{R}^n$ there exist a control $u : R_{\geq 0} \to U$ and a corresponding trajectory $x(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ such that $x(0) = \xi$,

$$x(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty,$$

$$\|u\|_\infty \leq \theta(|\xi|),$$

and

$$\sup\{\|x(t)\| : 0 \leq t < \infty\} \leq \tilde{\theta}(|\xi|).$$

We may refer to the articles of Sontag and Sussmann [**79, 80**] for the definition of the essential supremum $\|u\|_\infty$ of $u(\cdot)$.

Remark 2.2. This definition seems weaker than the one given initially in [**65**]. However, as explained by Sontag and Sussmann in [**79, 80**], a routine argument involving continuity of trajectories with respect to initial states shows that our differents definitions are indeed equivalent.

Our objective is to design a feedback law $u : \mathbb{R}^n \to U$ such that the origin of the closed-loop system (2.1) is globally asymptotically stable; that is such that the new system

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))) \tag{2.2}$$

is globally asymptotically stable. Our method relies on nonsmooth Lyapunov functions which we proceed to define; we refer to the next section for the definition of the proximal subdifferential $\partial_P V(\cdot)$.

Definition 2.3. A control-Lyapunov function (clf) for the system (2.1) is a continuous function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ which is positive definite (i.e. $V(0) = 0$ and $V(x) > 0$ for $x \neq 0$), proper (i.e. $V(x) \to \infty$ when $\|x\| \to \infty$) and such that there exists a positive definite continuous function $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ with the property that, for each $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ we have

$$\forall \zeta \in \partial_P V(x), \inf_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -W(x). \tag{2.3}$$

We present now a refinement of the main theorem given in Chapter 5; we function W can in fact be taken to be V.

Theorem 2.4. If (2.1) is GAC, then there exists a control-Lyapunov function semiconcave on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_P V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -V(x). \tag{2.4}$$

This special form (which was inspired by a discussion with Eduardo Sontag) of the infinitesimal decrease condition (2.4) will allow us to obtain exponential decrease for $V(x(t))$, and will make it possible to give closed-form estimates (in terms of V) on the rate of stabilization. Moreover, the semiconcave regularity of this control-Lyapunov function will be crucial for the construction of discontinuous stabilizing feedbacks.

Now, using the concept of solutions which will be defined in the next section, we give a general result on the existence of stabilizing feedbacks; this result was announced in [**66**].

Theorem 2.5. Assume that the system (2.1) is GAC. Then there exists a feedback $u : \mathbb{R}^n \to U$ for which the system $\dot{x} = f(x, u(x))$ is globally asymptotically stabilisable in the sense of π-trajectories and in the Euler sense.
Moreover, if we consider a control-Lyapunov function V (coming from Theorem 3) for the given system, then the stabilizing feedback can be designed as follows:

- We set $u(0) = 0$;
- for each $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, we choose arbitrarily $\zeta \in \partial_L V(x)$ and we set

$$u := u(x) \in U \text{ such that } \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -V(x).$$

And we have

$$V(x(t)) \leq e^{-t} V(x_0) \tag{2.5}$$

for any Euler trajectory starting at $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

The existence of a discontinuous feedback which is stabilizing in the sense of the π-trajectories is not new; it appeared initially in the article of Clarke, Ledyaev, Sontag and Subbotin [**21**]. We refer also to Ancona and Bressan [**2**] who proved a slightly stronger result in the sense that their feedback stabilizes the closed-loop system in the sense of Carathéodory; their proof do not use nonsmooth control-Lyapunov functions. However, here the consideration of a semiconcave control-Lyapunov function leads to a simple proof and allows us to give an explicit formula for the design of the feedback. Moreover, we are able to design some stabilizing feedbacks which are rather regular in the case of affine systems.

Let us assume now that the control system is affine in the control, that is

$$f(x,u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times B_m, \tag{2.6}$$

for some $f_0, \cdots, f_m$ locally Lipschitz in $\mathbb{R}^n$ (where B_m is the ball $B(0,1)$ of $\mathbb{R}^m$).

First of all, assuming the knowledge of a control-Lyapunov function, we are able to give an explicit feedback law; it reduces to Sontag's formula [**71**] in the smooth case.

Theorem 2.6. Assume that V is a control-Lyapunov function for (2.6) and consider any selection $\zeta_V(\cdot)$ of $\partial_L V(\cdot)$. Then the feedback control defined by

$$u_i(x) := -\phi\left(\langle f_0(x), \zeta_V(x)\rangle, \sum_{i=1}^{m} \langle f_i(x), \zeta_V(x)\rangle^2\right) \langle f_i(x), \zeta_V(x)\rangle,$$

where

$$\phi(a,b) = \begin{cases} \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b} & \text{if } b \neq 0 \\ 0 & \text{if } b = 0 \end{cases}$$

(globally asymptotically) stabilizes the control system (2.6) in the sense of π-trajectories and in the Euler sense.

Furthermore, we can exploit the semiconcavity property more strongly to derive some regularity properties on the feedback in the case of affine control system. We are going to obtain continuity of our discontinuous feedback outside a set of singularity which will be proved small account of semiconcavity.

Theorem 2.7. If the control affine system (2.6) is GAC, then there exists a subset $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ which verifies the following properties:

(i) The set $\mathcal{D}$ is open, dense;

(ii) the complement S of $\mathcal{D}$ has Hausdorff dimension less than $n-1$;
(iii) there exists a feedback $u : \mathbb{R}^n \to U$ which is continuous on $\mathcal{D}$ for which the system $\dot{x} = f(x, u(x))$ is globally asymptotically stable in the Euler sense.

Moreover, if we know a semiconcave control-Lyapunov function V which satisfies

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} \tag{2.7}$$

where

$$\mathcal{D} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ s.t. } \min_{u \in U} \max_{\zeta \in \partial V(x)} \langle \zeta, f(x,u) \rangle < -\frac{V(x)}{2} \right\}$$

and

$$\mathcal{E} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ s.t. } \min_{u \in U} \max_{\zeta \in \partial V(x)} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -\frac{V(x)}{2} \right\},$$

then the set $\mathcal{D}$ satisfies the properties above and the following one : For any Carathéodory solution $x(\cdot)$ of the closed loop system, we have

$$x(t) \in \mathcal{D} \cup \{0\}, \quad \forall t > 0. \tag{2.8}$$

In particular, the Euler trajectories are solutions in the sense of Caratheodory.

Remark 2.8. As in the paper of Artstein [**4**, Theorem 5.2], if the system verifies the small-control property, then the feedback can be chosen to be continuous at the origin.

We refer to Morgan [**61**] for a survey on the Hausdorff measure and the Hausdorff dimension. As a consequence of the upper bound of the Hausdorff dimension of S, we get that S has Lebesgue measure zero. Moreover, we stress that the property (2.8) implies the following facts: For each state $x_0 \in \mathbb{R}^n$, for any Carathéodory solution of the closed loop system starting at x_0 we have

- If $x_0 = 0$, then $x(t) = 0$ for all $t \geq 0$.
- If $x_0 \in \mathcal{D}$, then $x(t) \in \mathcal{D} \cup \{0\}$ for all $t \geq 0$; and consequently

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{s.t. } x(t) \neq 0.$$

- If $x_0 \notin \mathcal{D} \cup \{0\}$, then $x(t) \in \mathcal{D} \cup \{0\}$ for all $t > 0$; and consequently

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))), \quad \forall t > 0 \quad \text{s.t. } x(t) \neq 0.$$

Now let us give two examples where the condition (2.7) is fulfilled.

- If the affine control system is of dimension 1 without drift:

$$f(x, u) = ug(x), \quad u \in [-1, 1],$$

then if we consider a control-Lyapunov function V associated to it, the condition (2.7) is automatically verified.
- We will see that in the case of the nonholonomic integrator (Chapter 6), the condition (2.7) is satisfied.

3. Discontinuous stabilizing feedbacks

As it has been explained before, there does not exist robust stabilizing feedbacks in general. To overcome this difficulty, we describe a concept of solution of the general Cauchy problem

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

where the feedback $u : \mathbb{R}^n \to U$ is not assumed to be continuous. This concept of solutions for differential equations with discontinuous right-hand side, inspired by the theory of differential games, has been introduced in the fundamental article of Clarke, Ledyaev, Sontag and Subbotin [**21**] (see also [**19**]); it provides an alternative approach to the ones developed by Sussmann [**82**] and Coron [**28**] (see also Pomet [**63**]).

Let $\pi = \{t_i\}_{i\geq 0}$ be a partition of $[0, \infty)$, by which we mean countable, strictly increasing sequence t_i with $t_0 = 0$ such that $t_i \to \infty$ as $i \to \infty$. The *diameter* of π, denoted $\operatorname{diam}(\pi)$, is defined as $\sup_{i\geq 0}(t_{i+1} - t_i)$. Given an initial condition x_0, the π-trajectory $x(\cdot)$ corresponding to π is defined in a step-by-step fashion as follows. Between t_0 and t_1, $x(\cdot)$ is a classical solution of the differential equation

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x_0)), \quad x(0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

(Of course in general we do not have uniqueness of the solution, nor is there necessarily even one solution.) We then set $x_1 := x(t_1)$ and restart the system with control value $u(x_1)$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x_1)), \quad x(t_1) = x_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

and so on in this fashion. This resulting trajectory x is a physically meaningful one that corresponds to a natural sampling procedure and piecewise constant controls; this kind of solutions appears in [**21**], called system sampling solutions. We proceed now to give the definition of the global asymptotic stabilization associated to this concept.

Definition 3.1. The system (2.1) is Globally Asymptotically Stable in the sense of π-trajectories if there exist a function $M : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ such that $\lim_{R\downarrow 0} M(R) = 0$ and two functions $T, \delta : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ with the following property:
For any $0 < r < R$, for any partition π with $\operatorname{diam}(\pi) \leq \delta(r, R)$, and for each initial state x_0 such that $\|x_0\| \leq R$, the corresponding π-trajectory $x(\cdot)$ is well-defined and satisfies:

1) $\forall t \geq 0, \|x(t)\| \leq M(R)$;
2) $\forall t \geq T(r, R), \|x(t)\| \leq r$.

Remark 3.2. This definition is equivalent to another one given by Sontag in [**75**]. In this chapter, it was required that there exists a function $\beta \in \mathcal{KL}$ so that the following property holds: For each $0 < \epsilon < K$, there exists a $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ such that, for every sampling schedule

π with $\mathrm{diam}(\pi) < \delta$, and for each initial state x_0 with $\|x_0\| \leq K$, the corresponding π-trajectory $x(\cdot)$ of (2.1) is well-defined and satifies:

$$\|x_\pi(t)\| \leq \max\{\beta(K,t), \epsilon\}, \quad \forall t \geq 0.$$

We can define from the concept of π-trajectories the notion of Euler trajectories (also called "limiting s-solutions" in [**53**]). As presented in [**66**], we call an Euler solution of (2.2) any uniform limit of π-trajectories of this system with $\mathrm{diam}(\pi) \to 0$. Moreover, we will say that the closed-loop system (2.2) is GAS in the Euler sense (or that the feedback u stabilizes in the Euler sense) if the two properties given in Definition 2.1 are satisfied for any Euler solutions.

We recall briefly for the convenience of the reader that a Carathéodory solution to

$$\dot{x} = g(x) \tag{3.2}$$

on an interval $I \subset \mathbb{R}$ by definition is an absolutely continuous function $x : I \mapsto \mathbb{R}^n$ satisfies (3.2) almost everywhere on I. This holds if and only if, for every $t_0 \in I$, one has

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(x(s))ds \quad \forall t \in I.$$

Consequently, we will say that the closed-loop system is stabilizing in the sense of Carathéodory if the usual properties stand for all Carathéodory solutions on $[0, +\infty)$.

4. Proof of Theorem 2.4

We can invoke Theorem 2.4 to get a control-Lyapunov function V_0 which is semiconcave on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. We begin by showing that there exists a smooth function $\gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ which satisfies

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_P V_0(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x,u) \rangle \leq -\gamma(V_0(x)). \tag{4.1}$$

We use the method given by Clarke, Ledyaev and Stern in [**22**]. We set for all $v > 0$,

$$\gamma(v) := \min\{W(x); x \in \Gamma(v)\},$$

where

$$\Gamma(v) := \{x \in \mathbb{R}^n; V_0(x) = v\}.$$

It is not difficult to show that the multifunction Γ is locally Lipschitz, which implies that the function γ is locally Lipschitz on $(0,\infty)$ and verifies (4.1). Moreover, we can approximate γ by a smooth function $\tilde{\gamma}$ such that

$$0 < \tilde{\gamma} \leq \gamma.$$

Finally, without loss of generality we can suppose that γ is smooth and verifies (4.1).
Now, we set

$$\Psi(t) := \int_1^t \frac{1}{\gamma(s)} ds. \tag{4.2}$$

This new function from $(0, \infty)$ into $\mathbb{R}$ is increasing, smooth and verifies the three following properties:

$$\Psi'(t) = \frac{1}{\gamma(t)}, \quad \forall t > 0, \tag{4.3}$$

$$\limsup_{t \downarrow 0} \Psi(t) \leq 0, \tag{4.4}$$

$$\text{and } \liminf_{t \to \infty} \Psi(t) \geq 0. \tag{4.5}$$

We are now able to define a new control-Lyapunov function V_1. We set

$$V_1(x) := \begin{cases} V_0(x) e^{\Psi(V_0(x))} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

By (4.4) and (4.5) and the properties of V_0, this new function is obviously proper, continuous at the origin, and locally Lipschitz on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
We want now to make the link between the proximal subdifferentials of V_1 and the proximal subdifferentials of V_0; for that, we give the following lemma.

Lemma 4.1. Let there be given two functions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ and $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. If we assume that f is positive and locally Lipschitz on the open set Ω and that F is a C^2, positive and increasing ($F' > 0$) function, then for all $x \in \Omega$,

$$\partial_P[fF(f)](x) = [F(f(x)) + F'(f(x))f(x)F(f(x))]\partial_P f(x).$$

The same formula holds for the proximal superdifferential. Moreover, if the function f is taken to be semiconcave then the new function $fF(f)$ is semiconcave as well.

Proof. Let us consider $x \in \mathbb{R}^n$ and $\zeta \in \partial_P[fF(f)](x)$, then by the analytic characterization of the proximal subdifferential (see Chapter 1), there exists $\sigma \geq 0$ such that

$$f(y)F(f(y)) - f(x)F(f(x)) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle \zeta, y - x \rangle, \tag{4.7}$$

whenever y is in a neighbourhood of x. The function $X \to XF(X)$ is C^2, so we have by Taylor's formula that there exists a constant C such that for all Y in a neigbourghood of X,

$$YF(Y) - XF(X) = F(X) + XF'(X)(Y - X) + \frac{C}{2}\|Y - X\|^2 + o(\|Y - X\|^2).$$

We get for $Y = f(y)$ and $X = f(x)$ that $f(y)F(f(y)) - f(x)F(f(x))$ is equal to

$$[F(f(x)) + f(x)F'(f(x))][f(y) - f(x)] + \frac{C}{2}\|f(y) - f(x)\|^2 + h,$$

where $h = o(\|f(y) - f(x)\|^2)$.
We set $D := F(f(x)) + f(x)F'(f(x))$; by the assumptions on f and F, $D > 0$ and so we can divide by D. On the other hand, f being locally Lipschitz, we deduce that there exists a constant $\bar{\sigma} \geq 0$ such that

$$\frac{f(y)}{D} - \frac{f(x)}{D} + \bar{\sigma}\|y - x\|^2 \leq \langle \frac{\zeta}{D}, y - x \rangle, \tag{4.8}$$

whenever y is in a neighbourghood of x; and then by analytic characterization we get:

$$\partial_P f[F(f)](x) \subset [F(f(x)) + f(x)F'(f(x))]\partial_P f(x).$$

That proves one inclusion, the other one is left to the reader. Of course, for the case of the proximal superdifferential, a similar proof is valid.
It remains to show the conservatrion of semiconcavity. If we assume that f is semiconcave, then by using the results of Chapter 1 and by following the same proof as above, we show that the differents σ remain uniform on the compact sets of Ω. □

We are turning back to the proof of Theorem 2.4; the lemma implies immediatly that $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \partial_P V_1(x) \subset \partial_L V_1(x)$,

$$\begin{aligned}
\min_{u \in U}\langle \zeta, f(x,u)\rangle &\leq -\gamma(V_0(x))[e^{\Psi(V_0(x))} + \Psi'(V_0(x))V_0(x)e^{\Psi(V_0(x))}] \\
&\leq -V_1(x)[\frac{\gamma(V_0(x))}{V_0(x)} + \gamma(V_0(x))\psi'(V_0(x))] \\
&\leq -V_1(x)[\frac{\gamma(V_0(x))}{V_0(x)} +] \quad \text{by (4.3)} \\
&\leq -V_1(x).
\end{aligned}$$

On the other hand, as the initial function V_0 was semiconcave on $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ we have by Lemma 4.1 that the new function V_1 is semiconcave; the proof is complete.

5. Proof of Theorems 2.5 and 2.6

Let V the semiconcave Lyapunov function given by Theorem 2.4 and two positive constants $r < R$. We set

$$M_R := \max\{V(x) : \|x\| \leq R\} \text{ and } M(R) := \max\{\|y\| : V(y) \leq M_R\}.$$

Obviously, the function $M(\cdot)$ is nondecreasing and verifies

$$\lim_{R \downarrow 0} M(R) = 0.$$

We set also two constants depending on r:

$$m_r := \min\{V(x) : \|x\| \geq r\} \text{ and } m_{\frac{r}{2}} := \min\left\{V(x) : \|x\| \geq \frac{r}{2}\right\};$$

we can say by definition that if $V(x) \leq \frac{m_{\frac{r}{2}}}{2}$, then $x \in \frac{r}{2}\bar{B}$. On the other hand, the Proposition 3.2 of Chapter 1 allows us to consider $\sigma := \sigma(\frac{r}{2}, R)$ and δ uniform on the set $\mathcal{A} := \{x : \frac{m_{\frac{r}{2}}}{2} \leq V(x) \leq M_R\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
We get that $\forall x \in \mathcal{A}, \forall y \in \mathcal{A}, \forall \zeta \in \partial_L V(x)$,

$$-V(y) + V(x) + \sigma\|y - x\|^2 \geq \langle -\zeta, y - x\rangle. \tag{5.1}$$

From now, we denote by M_f the upper bound of f on $R\bar{B} \times U$, L_f the Lipschitz constant of f on the same set, m_V the minimum of V and L_V the Lipschitz constant of V on $\mathcal{A}$. Let us consider a π-trajectory $x(\cdot)$ associated to a partition $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots\}$ and to nodes $x_i := x(t_i)$ with x_0 verifying $x_0 \in R\bar{B}$. We pick ζ_0 belonging to $\partial_L V(x_0)$. For any $t \in [t_0, t_1]$, We can compute by (5.1):

$$\begin{array}{rl}
& V(x(t)) - V(x_0) \\
\leq & \langle \zeta_0, x(t) - x_0\rangle + \sigma\|x(t) - x_0\|^2 \\
\leq & \langle \zeta_0, \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(x_0))ds\rangle + \sigma\|x(t) - x_0\|^2 \\
\leq & \langle \zeta_0, (t - t_0)f(x_0, u(x_0))\rangle \cdots \\
& +\langle \zeta_0, \int_{t_0}^{t} [f(x(s), u(x_0)) - f(x_0, u(x_0))]ds\rangle + \sigma\|x(t) - x_0\|^2 \\
\leq & -(t - t_0)V(x_0) + \|\zeta_0\|L_f \max\limits_{s\in[t_0,t_1]} \|x(s) - x_0\|(t - t_0) \cdots \\
& +\sigma\|x(t) - x_0\|^2 \\
\leq & -(t - t_0)V(x_0) + L_V L_f M_f (t - t_0)^2 + \sigma M_f^2 (t - t_0)^2 \\
\leq & (t - t_0)\left[-m_V + (L_f L_V M_f + \sigma M_f^2)(t - t_0)\right]
\end{array}$$

More generally, we have for all $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$V(x(t)) - V(x_i) \leq -(t - t_i)V(x_i) + [L_V L_f M_f + \sigma M_f^2](t - t_i)^2. \tag{5.2}$$

We get that for any n, $\forall t \in [t_{n-1}, t_n]$,

$$\begin{array}{rl}
& V(x(t)) - V(x_0) \\
\leq & \sum\limits_{i=0}^{n-2}[-(t_{i+1} - t_i)V(x_i) + (L_V L_f M_f + \sigma M_f^2)(t_{i+1} - t_i)^2] \cdots \\
& -(t - t_{n-1})V(t_{n-1}) + (L_f L_V M_f + \sigma M_f^2)(t - t_{n-1})^2 \\
\leq & (t - t_0)[-m_V + (L_f L_V M_f + \sigma M_f^2)\text{diam}(\pi)].
\end{array} \tag{5.3}$$

We deduce that if we set

$$\delta(r,R) := \min\left\{ \frac{m_V}{2(L_f L_V M_f + \sigma M_f^2)}, \frac{m_r - m_{\frac{r}{2}}}{2L_V M_f} \right\},$$

we obtain from (5.3) that for every π-trajectory $x(\cdot)$ starting at x_0 and such that $\mathrm{diam}(\pi) \leq \delta(r,R)$, we have

$$\forall t \geq 0, V(x(t)) - V(x_0) \leq -\frac{m_V}{2}(t - t_0). \tag{5.4}$$

That means that the π-trajectory remains in $\{x : V(x) \leq V(x_0)\}$ which is included in $M(R)\bar{B}$ and that for $t \geq T(r,R) := \frac{2M_R - m_{\frac{r}{2}}}{m_V}$,

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - \frac{m_V}{2} t \leq \frac{m_{\frac{r}{2}}}{2};$$

that is $x(t) \in \frac{r}{2}\bar{B}$. There is a possible danger ! The work done above is valid only when we stay in the set $\mathcal{A}$. But as $\delta(r,R) \leq \frac{m_r - m_{\frac{r}{2}}}{2L_V M_f}$, there exists a first step i_0 for which $\frac{m_{\frac{r}{2}}}{2} \leq V(x_{i_0}) \leq \frac{m_r}{2}$, and by the same computation as above, the set $\{x : V(x) \leq V(x_{i_0})\}$ is invariant, that is

$$\forall t \geq t_{i_0}, x(t) \in \{x : V(x) \leq V(x_{i_0})\} \subset r\bar{B}.$$

That completes the proof for the case of π-trajectories.

We get from this proof (more especially from (5.2) and a convergence result of a Riemann's sums) that for any Euler trajectory of (2.2), we have that

$$V(x(t)) - V(x(s)) \leq -\int_s^t V(x(y))dy, \quad \forall 0 \leq s \leq t. \tag{5.5}$$

The inequality (5.5) combined with the Gronwall's Lemma brings a proof of the property (2.5).

We make now the proof of Theorem 2.6.

Proof. As in the statement of Theorem 2.5, the formula given above considers for all x a limiting subgradient $\zeta_V(x)$ and a function $u(\cdot)$ satisfying:

$$\langle \zeta_V(x), f(x, u(x)) \rangle \leq -V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

This construction agrees with the one given in the statement of Theorem 2.5, the result follows. □

6. Proof of Theorem 2.7

Theorem 2.7 requires a more subtle proof; we will need the following lemma; we refer to Chapter 1 for the proof.

Lemma 6.1. Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a locally Lipschitz function and $x \in \mathbb{R}^n$; if $\partial_P f(x)$ and $\partial^P f(x)$ are non empty, then

$$\partial_P f(x) = \partial^P f(x) = \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}.$$

We know by Theorem 3 that

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \max_{\zeta\in\partial_L V(x)} \min_{u\in U} \langle \zeta, f(x,u)\rangle \leq -V(x) < 0. \tag{6.1}$$

Let us first assume that the control system (2.6) is without drift, that is such that the function f_0 equals zero.

We define the following set:

$$\mathcal{D} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ s.t. } \min_{u\in U} \max_{\zeta\in\partial V(x)} \langle \zeta, f(x,u)\rangle < -\frac{V(x)}{2} \right\}.$$

As the multivalued mapping $x \mapsto \partial V(x)$ has a closed graph, the set $\mathcal{D}$ is obviously open. On the other hand, by the density Theorem [**24**, Theorem 3.1], the proximal subdifferential $\partial_P V(x)$ is non empty on a dense set. Consequently, by the semiconcavity of V, both proximal sub and superdifferentials are non empty on this set; it implies that (by Lemma 6.1) $\partial_P V(x) = \partial_L V(x) = \{\nabla V(x)\}$ on a dense subset of $\mathbb{R}^n$. So, we conclude that the min-max and the max-min of (6.1) and of the definition of the set $\mathcal{D}$ coincide on a open dense set of $\mathbb{R}^n$; that means that $\mathcal{D}$ contains this set. Consequently $\mathcal{D}$ is an open dense set of $\mathbb{R}^n$. Moreover, the complement S of $\mathcal{D}$ is included in $\cup_{k=1,\cdots,n} S^k(V)$, therefore we get the upper bound on the Hausdorff dimension of S by the results given in subsection 3.2. We postpone the proof on the arc-connectedness of $\mathcal{D}\cup\{0\}$ at the end of this section.

We define the following multifunction on $\mathcal{D}$:

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad G(x) := \left\{ u \in U : \forall \zeta \in \partial V(x), \langle \zeta, f(x,u)\rangle \leq -\frac{V(x)}{2} \right\}.$$

As the system is affine in the control, the multifunction G has nonempty closed convex values. We show now that G is lower semicontinuous on $\mathcal{D}$ (we refer to [**8**] for a task about semicontinuity of multivalued functions). We then have to prove that for any sequence $(x_n)_n$ of points in $\mathcal{D}$ converging to $x \in \mathcal{D}$, and for any $z \in G(x)$, there exists a sequence $(z_n)_n$ of points in $G(x_n)$ with limit z.

Let $(x_n)_n$ be a sequence in $\mathcal{D}$ converging to $x \in \mathcal{D}$ and let $y = f(x,u_0)$ in $G(x)$. We set for all n :

$$z_n := f(x_n, u_0).$$

From now, we denote M_1 the Lipschitz constant of V, M_2 the upper bound of $f(\cdot,u_0)$ and M_3 the Lipschitz constant of $f(\cdot,u_0)$ in a neighbourhood of x containing all the x_n (without loss of generality we can assume this condition) and on the other hand we denote by $\beta(A,B)$ the Haussdorff distance between the sets A and B (see [**8**]). Two cases appear.

1. $\max_{\zeta \in \partial V(x)} \langle \zeta, y \rangle < -\frac{V(x)}{2}$.
   We fix n and we choose $\zeta_n \in \partial V(x_n)$; so we have:

$$
\begin{aligned}
& \langle \zeta_n, z_n \rangle \\
= \quad & \langle \zeta, z_n \rangle + \langle \zeta_n - \zeta, z_n \rangle \quad (\text{where } \zeta := \mathrm{proj}_{\partial V(x)}(\zeta_n)) \\
\leq \quad & \langle \zeta, y \rangle + M_1 \|z_n - y\| + M_2 \beta(\partial V(x_n), \partial V(x)) \\
< \quad & -\frac{V(x)}{2} + M_1 \|z_n - y\| + M_2 \beta(\partial V(x_n), \partial V(x)) \\
< \quad & -\frac{V(x_n)}{2} + \frac{M_3}{2} \|x_n - x\| + M_3 \|x_n - x\| + M_2 \beta(\partial V(x_n), \partial V(x)).
\end{aligned}
$$

   Hence, for n sufficiently high, $z_n \in G(x_n)$ and the sequence $(z_n)_n$ converges to $y = f(x, u_0)$ by continuity of f.
2. $\max_{\zeta \in \partial V(x)} \langle \zeta, y \rangle = -\frac{V(x)}{2}$.
   We know by assumption that since $x \in \mathcal{D}$ there exists $u_1 \in U$ such that

$$\forall \zeta \in \partial V(x), \langle \zeta, f(x, u_1) \rangle < -\frac{V(x)}{2}.$$

   Consequently, we can express $y = f(x, u_0)$ as a limit of

$$y_p = t_p y + (1 - t_p) f(x, u_1)$$

   (when $t_p \uparrow 1$) such that $\max_{\zeta \in \partial V(x)} \langle \zeta, y_p \rangle < -\frac{V(x)}{2}$. So each y_p is by the first case, limit of a sequence $(z_p^n)_n$; we conclude by a diagonal process.

We conclude that G is a lower semicontinuous multifunction on the set $\mathcal{D}$.

Returning to the proof of our theorem, we can apply the well-known selection Theorem of Michael [**60, 8**]; we deduce the existence of a continuous selection u of G on $\mathcal{D}$. We can extend this selection to the whole set $\mathbb{R}^n$ by picking some subgradient in $\partial_L V(x)$ when $x \notin \mathcal{D}$ and by choosing $u \in U$ to satisfy (6.1) ($u(0) = 0$). In this way, we have constructed a feedback $u(\cdot)$ which stabilises the system in the Euler sense and which is continuous on an open dense set of $\mathbb{R}^n$. We prove now the rest of the theorem.

The set $\mathcal{D}$ is the same as the one which has been defined in the first part of the proof. Hence, we can deduce that it is open dense and that we have constructed a discontinuous feedback u as before.
Let us consider $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and $x(\cdot)$ an Euler trajectory of

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))), x(0) = x_0. \tag{6.2}$$

Obviously, if $x_0 = 0$, then as $f(0, u(0)) = 0$ all the Euler solution of (6.2) starting at $x_0 = 0$ will stay at the origin; let us now assume that $x_0 \neq 0$.

Let t_0 be fixed in $(0, \infty)$, there exists $\sigma > 0$ such that for any $\zeta \in \partial^P V(x(t_0))$, we have that

$$-V(y) + V(x(t_0)) + \sigma \|y - x(t_0)\|^2 \geq \langle -\zeta, y - x(t_0)) \rangle,$$

whenever y is in a neighbourhood of $x(t_0)$. We deduce that for some $s < t_0$ and close to t_0, we have

$$V(x(t_0)) - V(x(s)) + \sigma \|x(s) - x(t_0)\|^2 \geq \langle \zeta, x(t_0) - x(s) \rangle.$$

That implies (by (5.5))

$$\begin{aligned} (6.3)\ \langle \zeta, x(t_0) - x(s) \rangle &\leq V(x(t_0)) - V(x(s)) + \sigma \|x(s) - x(t_0)\|^2 \\ &\leq -\int_s^{t_0} \frac{V(x(y))}{2} dy + \sigma \|x(s) - x(t_0)\|^2 \end{aligned}$$

Now, by convexity and compactness of $f(x(t), U)$ (since f is affine in the control) there exists a sequence $(s_n)_n$ and u in U such that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x(t_0) - x(s_n)}{t_0 - s_n} = f(x(t_0), u).$$

Consequently, passing to the limit for the sequence $(s_n)_n$, we obtain

$$\langle \zeta, f(x(t_0), u) \rangle \leq -\frac{V(x(t_0))}{2}.$$

We can repeat this argument for all $\zeta \in \partial^P V(x(t_0))$, that is

$$\forall \zeta \in \partial^P V(x(t_0)), \langle \zeta, f(x(t_0), u) \rangle \leq -\frac{V(x(t_0))}{2}.$$

As $\partial^P V(x(t_0) = \partial V(x(t_0))$ and since $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, that means that $x(t_0) \in \mathcal{D}$. We conclude that for all $t > 0$ the Euler trajectory $x(\cdot)$ remains in $\mathcal{D} \cup \{0\}$.

Consider now the case of solutions in the sense of Carathéodory. Let $x_0 \neq 0$ and $x(\cdot)$ a Carathéodory solution of (6.2) starting at x_0. Hence, we have a set N of measure zero on $[0, \infty)$ such that

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \setminus N. \tag{6.4}$$

We have by the Mean value inequality that for any $0 \leq t < t'$, there exists $z_{t,t'} \in [x(t), x(t')]$ and $\zeta_{t,t'} \in \partial_C V(z_{t,t'})$ such that

$$V(x(t')) - V(x(t)) \leq \langle \zeta_{t,t'}, x(t') - x(t) \rangle. \tag{6.5}$$

Now by setting the function $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \theta(t) := V(x(t))$, it means that for any $t, t' \geq 0$

$$\theta(t') - \theta(t) \leq \langle \zeta_{t,t'}, x(t') - x(t) \rangle. \tag{6.6}$$

As the function f is locally bounded, the function θ is locally Lipschitz and hence by the Rademacher's Theorem differentiable outside a set of measure zero N'. Therefore, for all $t \in [0,\infty) \setminus N \cup N'$, we obtain by passing to the limit in (6.6):

$$\theta'(t) \leq \langle \zeta, \dot{x}(t) \rangle = \langle \zeta, f(x(t), u(x(t))) \rangle,$$

where $\zeta \in \partial_C V(x(t))$.

Lemma 6.2. The Carathéodory trajectory $x(\cdot)$ does not belong to S almost everywhere:

$$x(t) \notin S \quad \text{a.e.} t \geq 0.$$

The proof is based on the properties on the sets $S^k(V)$ given by Alberti, Ambrosio and Cannarsa [**1**]; it is postponed to the end of this section.

By Lemma 6.2 there exists a third set N^0 of measure zero such that

$$x(t) \in \mathcal{D} \quad \forall t \in [0,\infty) \setminus N^0.$$

Thus we get by construction of u that for all $t \in [0,\infty) \setminus N \cup N' \cup N^0$,

$$\theta'(t) \leq -\frac{V(x(t))}{2}.$$

Therefore, we deduce by the characterization given in subsection 3.1 that for any $t \geq 0$

$$\partial\theta(t) \subset (-\infty, -\frac{V(x(t))}{2}].$$

We deduce that the function $t \mapsto \theta(t) + \int_0^t \frac{V(x(s))}{2} ds$ is nonincreasing, and consequently

$$\forall 0 \leq s \leq t, V(x(t)) - V(x(s)) \leq -\int_s^t \frac{V(x(y))}{2} dy. \tag{6.7}$$

Now if we fix $t_0 > 0$ and if we take $\zeta \in \partial^P V(x(t_0))$, we get by (6.3) and (6.7) that

$$\langle \zeta, x(t_0) - x(s) \rangle \leq -\int_s^{t_0} \frac{V(x(y))}{2} dy + \sigma \|x(s) - x(t_0)\|^2.$$

Then we deduce as in the case of Euler trajectories of (6.2) that

$$x(t_0) \in \mathcal{D} \cup \{0\}.$$

Now by convergence of all trajectories to the origin, it is clear that $\mathcal{D} \cup \{0\}$ is arc-connected.

It remains to prove Lemma 6.2.

Proof. Assume that the conclusion is false. Then there exists a subset H of $[0,\infty)$ of positive measure such that $x(\cdot)$ is differentiable in H and

$$x(t) \in S \quad \forall t \in H.$$

On the other hand by Chapter 1, we can write

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma^k(V) \cap S \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup p \in \{1, 2, \cdots\} \Sigma^k_{\frac{1}{p}}(V) \cap S. \end{aligned}$$

Thus there exists a couple (k, p) for which

$$x(t) \in \Sigma^k_{\frac{1}{p}}(V) \cap S \subset \Sigma^k_{\frac{1}{p}}(V)$$

on a set of positive measure $H' \subset H$.
This implies that there exists a $t_0 \in H'$ such that

$$\dot{x}(t_0) = f(x(t_0), u(x(t_0)) \in T^B_{\Sigma^k_{\frac{1}{p}}(V)}(x(t_0)).$$

Hence we deduce by Proposition 3.5 of Chapter 1 that

$$\forall \zeta \in \partial V(x), \langle \zeta, f(x(t_0), u(x(t_0)) \rangle = -\frac{V(x(t_0))}{2}.$$

Since $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, this last inequality implies that $x(t_0) \in \mathcal{D}$; we get a contradiction. $\square$

CHAPITRE VI

Robust stabilization of the nonholonomic integrator

1. Introduction

A problem of feedback stabilization of the control system

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U \tag{1.1}$$

at the origin of $\mathbb{R}^n$ traditionally takes a central place the control theory. A stabilizing feedback $k : \mathbb{R}^n \to U$ makes a closed-loop system

$$\dot{x} = f(x, k(x)) \tag{1.2}$$

asymptotically stable at the origin. The main motivation for using closed-loop (feedback) control instead of the open-loop one is the property of feedback control being *robust* (insensitive) with respect to small external disturbances $w(t)$, actuator errors $a(t)$ and measurement errors $e(t)$ in such way that the perturbed system

$$\dot{x} = f(x, k(x + e(t) + a(t)) + w(t)) \tag{1.3}$$

is asymptotically stable if all errors and disturbances are small enough. In the case of continuous stabilizing feedback the problem of its robustness is reduced to the classical problem of robustness of asymptotic stability of an ordinary differential equation with respect to external disturbance

$$\dot{x} = f(x, k(x)) + d(t)$$

well studied in the literature (see [**45**] or [**22**] for more general case of differential inclusions with upper semicontinuous right-hand side).
Unfortunately, for general nonlinear control system a continuous stabilizing feedback can fail to exist. The celebrated covering condition of Brockett [**13**] should necessary hold for a control system which is stabilizable with a continuous feedback. The nonholonomic integrator control system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

has appeared in [**13**] as an example of a nonlinear control system which does not satisfy Brockett's condition and cannot be stabilized with continuous feedback.

There have been several papers devoted to the problem of feedback stabilization of this particular control system by using different approaches and methods : unbounded feedbacks via discontinuous transformations [**5**], sliding modes [**12**], time-varying controllers [**63**], [**62**]. To our knowledge, not of these works rigorously studies the robustness properties of stabilizing controllers.

In this paper we suggest two constructions of stabilizing discontinuous stabilizing feedback for the nonholonomic integrator with an accompaning detailed analysis and estimates of the robustness properties. These feedbacks also illustrate some recently developed robust feedback techniques based on nonsmooth control Lyapunov functions.

The classical differentiable (smooth) control-Lyapunov function (abreviated CLF) $V : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ is a positive definite and proper function which satisfies the following infinitesimal decrease condition

$$\min_{u \in U} \nabla V(x) \cdot f(x, u) < -W(x) < 0. \tag{1.5}$$

The classical method of constructing a stabilizing feedback is to find continuous function $k : \mathbb{R}^n \to U$ such that

$$\nabla V(x) \cdot f(x, k(x)) < -W(x) < 0. \tag{1.6}$$

There are two main obstacles to the realization of this idea. The first one is the fact that even in the case of the existence of smooth CLF V there need be no feedback satisfying (1.6). The second, even more serious one, is the lack of such smooth CLF. In the case of the nonholonomic integrator, which is a control affine system, the existence of a smooth CLF V is equivalent to the existence of a continuous stabilizing feedback due to Artstein's theorem [**4**]. But the absence of a continuous stabilizing feedback in the nonholonomic integrator, as can be seen by the failure of Brockett's necessary condition, implies the absence of a smooth control Lyapunov function.

In this paper we demonstrate that the following nonsmooth function

$$V = \max\left\{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, |x_3| - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\} \tag{1.7}$$

is a CLF for the nonholonomic integrator system (1.4).

It is well known now that any asymptotically controllable nonlinear system (1.1) possesses a nonsmooth continuous CLF V (see [**72**], [**79**]) with the infinitesimal decrease condition in the terms of Dini lower directional derivatives

$$\min_{f \in \operatorname{co} f(x,U)} DV(x; f) < -W(x) < 0 \tag{1.8}$$

where

$$DV(x; f) = \liminf_{\substack{f' \to f \\ t \downarrow 0}} \frac{V(x + tf') - V(x)}{t},$$

and co$F$ denotes a convex hull of the set F.
It also can be shown by using Subbotin's theorem [**19**] that the infinitesimal condition (1.8) can be expressed in terms of *proximal subgradients* of the function V in terms more reminiscent of the condition (1.5)

$$\min_{u \in U} \langle V', f(x,u) \rangle < -W(x), \forall V' \in \partial_P V(x).$$

Actually, a new result by Rifford [**65**] establishes that the nonsmooth Lyapunov function can be chosen locally Lipschitz everywhere. Furthermore, we recall that these nonsmooth CLF together with proximal calculus have been used in [**21**] to construct for any asymptotically controllable system a stabilizing (possibly discontinuous) feedback.
The concept of discontinuous feedback is based on that introduced by Krasovskii and Subbotin [**46**] in differential game theory. It was shown that the feedback in [**21**] is robust with respect to external disturbance and to a choice of sampling moments if a sampling rate is sufficiently high. The important observation has been made in [**19**] that by restricting the sampling from above we can also make the feedback robust with respect to the measurement errors too. This observation served as a basis for the following concept of a feedback control with feedback sampling.

2. Feedback control with feedback sampling

The feedback concept used here was introduced in [**51**] and is based on the concept of stabilizing discontinuous feedback in [**21**], [**19**]. This concept reflects the fact that consequent sampling moments t_i can be chosen in feedback manner by using measurements

$$x'(t_i) := x(t_i) + e_i \tag{2.1}$$

where e_i is a measurement error.

Definition 2.1. The pair $(k, \delta) : \mathbb{R}^n \to U, \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ is called *feedback control-sampling* (FCS) pair for the stabilization problem if δ is a continuous function and $\delta(x) > 0$ for $x \neq 0$. The scalar function δ is called a *sampling function* and it determines the rule for choosing the sampling moments t_i, t_{i+1} : they should satisfy the following relations

$$c\delta(x'(t_{i+1})) \leq t_{i+1} - t_i \leq \delta(x'(t_i)) \tag{2.2}$$

where $c \in (0,1)$ is an arbitrary fixed constant, say $c = 1$.

Remark 2.2. This rule follows the discovery made in [**19**] that by restricting the sampling rate above we can make the discontinuous stabilizing feedback robust with respect to small measurement errors.

Note that the trajectory of the perturbed system corresponding to the FCS pair and the sampling moments $\{t_i\}$ corresponding to rule (2.2) is defined recursively on the intervals $[t_i, t_{i+1}]$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_i) + w(t), t \in [t_i, t_{i+1}] \tag{2.3}$$

with $u_i = k(x'(t_i))$.
The following definition [**51**] of a stabilizing feedback control-sampling pair incorporates the property of robustness with respect to measurement errors and external disturbances.

Definition 2.3. An FCS pair (k, δ) is called stabilizing if there exists $\mathcal{KL}$-function β, continuous functions $\eta_e : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}, \eta_w : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{>0}$ such that for any measurement error $e(t)$ and external disturbances $w(t)$ satisfying

$$|e(t)| \leq \eta_e(x(t)), \forall t \geq 0, |w(t)| \leq \eta_w(x(t)) a.e. t \geq 0, \tag{2.4}$$

any trajectory $x(\cdot)$ corresponding to (k, δ) satisfies

$$|x(t)| \leq \beta(t, |x(0)|), \forall t \geq 0. \tag{2.5}$$

We recall that the function $\beta \in \mathcal{KL}$ if $\beta \geq 0, t \mapsto \beta(t, \cdot)$ is monotone decreasing and $\lim_{t\to+\infty} \beta(t, r) = 0$ for any $r \geq 0$, $\lim_{r\to 0^+} \beta(0, r) = 0$. Note that the decay estimate (2.5) reflects the following behavior of trajectories: a) their uniform attractiveness to the origin; b) uniform bounded overshoot and c) uniform strong Lyapunov stability.
It was shown in [**51**] that for any asymptotically controllable system (1.1) there exists a stabilizing FCS pair.

In this paper we present two designs for a stabilizing FCS pair (k, δ) for the nonholonomic integrator which provide an exponential stabilization with a decay estimate

$$\beta(t, |x_0|) = e^{-\lambda t} 2|x(0)| \tag{2.6}$$

for some $\lambda > 0$.
The first design is based on the recent *integral decrease principle* from [**51**], the second on the proximal aiming approach analogous to the one from [**19**]. Both these designs use the nonsmooth control Lyapunov function V in (1.7) for the nonholonomic integrator. We pause briefly to describe these two approaches.

Integral decrease principle. Let us assume that there exists locally Lipschitz positively defined functions $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \delta_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that for some (possibly discontinuous) function $k : \mathbb{R}^n \to U$ the following integral decrease principle holds

$$V(x + \delta f(x, k(x))) - V(x) \leq -\delta W(x), \forall \delta \in [0, \delta_0(x)]. \tag{2.7}$$

Theorem 2.4. Let there exist a clf V satisfying the integral decrease principle (2.7). Then there exists a positive definite continuous function δ such that a pair (k, δ) is the stabilizing FCS pair for (1.1).

The following expressions for η_e, η_w and δ are obtained in [**51**] in terms of localized Lipschitz constants $L_V(x), L_f(x)$ of functions V and

f and localized growth module $m_f(x)$ for $f(x, k(x))$

$$\delta(x) = \min\left\{\delta_0(x), 1, \frac{W(x)}{6L_V m_f}\right\} \tag{2.8}$$

$$\eta_w(x) = \frac{1}{6}\frac{W(x)}{L_V} \tag{2.9}$$

$$\eta_e(x) = \mu(x)\delta(x) \tag{2.10}$$

$$\mu(x) = \frac{1}{8}\frac{W(x)}{L_V m_f} \tag{2.11}$$

(we assume that c from the sampling rule has value $\frac{1}{2}$).
In case

$$W(x) \geq \rho(V(x)) \tag{2.12}$$

where $\rho : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ is a locally Lipschitz function, the $\mathcal{KL}$ function $\beta(t, r)$ in the (2.5) is defined as following one

$$\beta(t, r) = \phi(\frac{1}{2}t, r)$$

where $\phi(t) = \phi(t, r)$ is a solution of the equation

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{1}{2}\rho(\phi(t)). \tag{2.13}$$

Proximal aiming stabilization. The second stabilizing feedback is based on proximal aiming approach introduced in [**19**]. We describe this approach in a more general setting which does not require the exact knowledge of the control Lyapunov function as in [**19**]. Nevertheless, in this case of the nonholonomic integrator the nonsmooth clf V in (1.7) is used in our design.
Let there exist a system of closed bounded sets $\{S_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ and numbers $\{\gamma_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ such that

$$S_i \subset S_{i+1} \quad , i = \cdots, -1, 0, 1, \cdots \tag{2.14}$$

$$\bigcup S_i = \mathbb{R}^n, \bigcap S_i = \{0\}, \lim_{i\to-\infty} \gamma_i = 0. \tag{2.15}$$

Let $\Omega_i = (S_{i+1} + \gamma_{i+1}B) \setminus (S_i + \gamma_i B)$ is such that for every $i, x \in \Omega_i$ there exists $k_i(x)$ and $\delta_i(x)$ such that

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta\omega_i(x) \tag{2.16}$$

for any $\delta \in (0, \delta_i(x))$.
We have the following result.

Theorem 2.5. Under the proximal condition (2.16) there exists a positive definite function $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ such that (k, δ) is a stabilizing FCS pair with

$$k(x) := k_i(x), x \in \Omega_i, i = \cdots, -1, 0, 1, \cdots .$$

Note that the proximal aiming condition (2.16) resembles the *integral decrease consition* (2.7) with $V(x) = d_{S_i}(x)$. This fact explains, in particular, why the analysis of the robustness of the feedback k_i with respect to measurement errors and external disturbances can be obtained as in theorem 2.4.

3. Nonsmooth clf for the nonholomic integrator

In this Section we demonstrate that the function V in (1.7) is a control Lyapunov function for the nonholonomic intregrator system. It is convenient to consider the cylindrical coordinate system (r, φ, z) with

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z.$$

The system in the new coordinates has the following form

$$\begin{array}{ll} \dot{r} & = v_1 \\ \dot{\varphi} & = \frac{1}{r} v_2 \\ \dot{z} & = r v_2 \end{array}$$

where new control variable $v = (v_1, v_2)$ is related with old control variable u as follows

$$\begin{array}{l} v_1 = u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi \\ v_2 = -u_1\sin\varphi + u_2 cos\varphi \end{array}$$

if for some $\nu > 0$,

$$u = (u_1, u_2) \in U_\nu := \{u : u_1^2 + u_2^2 \le \nu^2\}.$$

Note that the function V in (1.7) has the following representation in the cylindrical coordinates

$$V(r, z) = \max\{r, |z| - r\}. \tag{3.1}$$

It is easy to see that

$$V(r, z) \ge \max\left\{r, \frac{1}{2}|z|\right\}. \tag{3.2}$$

This inequality implies that V is a positive definite and proper function. To prove that V also satisfies the infinitesimal decrease condition we can also use the representation (3.1) in the case of $r > 0$ and calculate the derivative of V along the direction $(\dot{r}, \dot{z})$ with $\dot{r} = v_1, \dot{z} = rv_2$. Then it follows from the result on the directional derivatives of min max function (see [**34**], [**64**]) that the quantity $DV(r, z; \dot{r}, \dot{z})$ equals

$$\begin{cases} v_1 & , \text{ if } r > \frac{1}{2}|z| \\ \sigma r v_2 - v_1 & , \text{ if } r < \frac{1}{2}|z| \\ \max_{\alpha\in[0,1]}[\alpha(\sigma r v_2 - v_1) + (1-\alpha)v_1] & , \text{ if } r = \frac{1}{2}|z| \end{cases}$$

with $\sigma = \mathrm{sign}(z)$.
This implies that

$$\min_{v\in U_\nu} DV(r,z;v_1,rv_2) = \begin{cases} -\nu & ,r > \frac{1}{2}|z| \\ -\nu\sqrt{r^2+1} & ,r < \frac{1}{2}|z| \\ -\frac{V}{\sqrt{4+V^2}}\nu & ,r = \frac{1}{2}|z| \end{cases}$$

(we obtain the last relation by using minimax theorem and taking a maximum in α

$$\begin{aligned} & \min_{v\in U_\nu} \max_{\alpha\in[0,1]} [\alpha(\sigma r v_2 - v_1) + (1-\alpha)v_1] \\ = & \max_{\alpha\in[0,1]} \min_{v\in U_\nu} [\alpha(\sigma r v_2 - v_1) + (1-\alpha)v_1] \\ = & \max_{\alpha\in[0,1]} -\nu\sqrt{\alpha^2 r^2 + (1-2\alpha)^2} \\ = & -\nu\frac{r}{\sqrt{4+r^2}} = -\nu\frac{V}{\sqrt{4+V^2}} \text{since } r = V). \end{aligned}$$

Thus, in the case $r > 0$ we have for system (1.4)

$$\begin{aligned} \min_{u\in U_\nu} DV(x;f(x,u)) &= \min_{v\in U_\nu} DV(r,z;v_1,rv_2) \\ &\leq -\nu\frac{V}{\sqrt{4+V^2}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

It is easy to see that in the case $r = 0$ the derivative of $V(x)$ along the direction of $(1,0,0)$ exists and is equal $-\nu$ which implies that the inequality (3.3) is valid for any $x \in \mathbb{R}^3$.

4. Construction via the integral decrease principle

In this section we use an integral decrease principle (2.7) to construct a robust stabilizing feedback. This feedback k depends on function $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0}$ which determines the constraint

$$|k(x)| \leq \nu(x).$$

We consider here two different cases of function ν which provide different rates of stabilization. The first case

$$\nu(x) \equiv 1 \tag{4.1}$$

implies that a control effort remains bounded. In the second case

$$\nu(x) = \max\{1, V(x)\} \tag{4.2}$$

a control effort increases with an increase of $|x|$.
Below we define a stabilizing feedback (which depends on particular choice (4.1) or (4.2) of ν). We mention the notation $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \sigma =$

$\mathrm{sign}(x_3)$.
If $x \in \Gamma_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : r = 0\}$ then

$$k_\nu(x) := (1,0)\nu. \tag{4.3}$$

If $x \in \Gamma_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : r > 0, r \geq |x_3|\}$ then

$$k_\nu(x) := \left(-\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}\right)\nu. \tag{4.4}$$

If $x \in \Gamma_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_3| \geq 3r > 0\}$ then

$$k_\nu(x) := \left(\frac{x_1 + \sigma x_2 r}{r\sqrt{1+r^2}}, \frac{-\sigma x_1 r + x_2}{r\sqrt{1+r^2}}\right)\nu. \tag{4.5}$$

If $x \in \Gamma_4 := \{x \in \mathbb{R}^3 : 3r > |x_3| > r > 0\}$ then

$$k_\nu(x) := \left(\frac{x_1 r - 2\sigma x_2}{r\sqrt{4+r^2}}, \frac{r x_2 + 2\sigma x_1}{r\sqrt{4+r^2}}\right)\nu. \tag{4.6}$$

We show that this feedback satisfies the integral decrease principle (2.7) with

$$W(x) = \nu\frac{V}{\sqrt{4+V^2}}. \tag{4.7}$$

Then by using Theorem 2.4 we prove that the feedback k_ν is a robust stabilizing feedback. It is also easy to find the decay estimates for trajectories of closed-loop system for different cases of ν.Thus in case of ν as in (4.1) we have

$$\rho(V) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} & ,V \geq 1 \\ \frac{V}{\sqrt{5}} & ,V \leq 1 \end{cases}$$

(note that $W(x) \geq \rho(V(x))$ as in (2.12)).
Then we have the following solution of the equation (2.13)

$$\varphi_1(t,r) = \begin{cases} r - \lambda_1 t & ,t \in [0,t_0] \\ e^{-\lambda_1(t-t_0)} & ,t \geq t_0 \end{cases} \tag{4.8}$$

where $t_o = \max\{0, \frac{r-1}{\lambda_1}\}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.
In the case of ν as in (4.2) we have

$$W(x) \geq \rho(V(x))$$

with $\rho(V) = \frac{1}{\sqrt{5}}V$.
In this case the solution of equation (2.13) is

$$\varphi_2(t,r) = re^{-\lambda_1 t}. \tag{4.9}$$

Theorem 4.1. For feedback k_ν (4.3)-(4.6) there exists a function $\delta_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that pair (k_ν, δ_ν) is a stabilizing feedback control sampling pair which provides the following decay estimates for trajectories of corresponding closed-loop systems

$$\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, |x_3(t)|\} \leq \varphi_1\left(\frac{1}{2}t, V(x(0))\right) \tag{4.10}$$

in the case ν (4.1), and

$$\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|, |x_3(t)|\} \leq \varphi_2\left(\frac{1}{2}t, V(x(0))\right) \tag{4.11}$$

in the case ν (4.2).

Proof. It has been mentioned that we need only to show that k_ν satisfies the integral decrease principle (2.7). For the system (1.4) we have that

$$\tilde{x} := x + \delta f(x,u) = [x_1 + \delta u_1, x_2 + \delta u_2, x_3 + \delta(x_1 u_2 - x_2 u_1)]^T.$$

We use the following notation

$$\tilde{r} = \sqrt{(x_1 + \delta u_1)^2 + (x_2 + \delta u_2)^2} \tilde{x}_3 = x_3 + \delta(x_1 u_2 - x_2 u_1)$$

and we leave the reader to check that the following relations hold for any $x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^2$ such that $|u| \leq \nu$,

$$\tilde{r} \leq r + \delta(\frac{x_1}{r} u_1 + \frac{x_2}{r} u_2) + \frac{\delta^2}{2r}(u_1^2 + u_2^2), \tag{4.12}$$

$$\tilde{r} \geq \begin{cases} r + \delta(\frac{x_1}{r} y_1 + \frac{x_2}{r} u_2), & r > 0 \\ \delta\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, & r = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

$$|\tilde{x}_3| = |x_3| + \delta\sigma(x_1 u_2 - x_2 u_1), \delta \in \left[0, \frac{|x_3|}{2r\nu}\right]. \tag{4.14}$$

These inequalities are used at first to establish formulas for $V(\tilde{x})$. Namely, we have

$$V(x) = \begin{cases} |x_3| - r, & x \in \Gamma_1 \\ r, & x \in \Gamma_2 \\ |x_3| - r, & x \in \Gamma_3 \end{cases}$$

□

We show that small enough $\delta > 0$ analogous representation take place for $V(\tilde{x})$.

Lemma 4.2. The following relations hold

(i) $V(\tilde{x}) = |\tilde{x}_3| - \tilde{r}, x \in \Gamma_1, \delta \in [0, \frac{V(x)}{2\nu}]$;
(ii) $V(\tilde{x}) = \tilde{r}, x \in \Gamma_2, \delta \in [0, \frac{V}{(1+V)\nu}]$;
(iii) $V(\tilde{x}) = |\tilde{x}_3 - \tilde{r}|, x \in \Gamma_3, \delta \in [0, \frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{1+r^2}} \frac{V(x)}{\nu}]$

Proof. To prove (i) we note that for $\delta \in (0, \frac{|x_3|}{2\nu}$

$$|\tilde{x}_3| = |x_3| \geq 2\delta\nu \geq 2\tilde{r} \quad \text{(due to (4.13))}.$$

This implies

$$V(\tilde{x}) = \max\{\tilde{r}, |\tilde{x}_3| - \tilde{r}\} = |\tilde{x}_3| - \tilde{r}.$$

To prove (ii) we need to show that $\tilde{r} \geq |\tilde{x}_3| - \tilde{r}$, or, equivalently, $2\tilde{r} - |\tilde{x}_3| \geq 0$.
But due to (4.13) we have

$$\begin{aligned} 2\tilde{r} - |\tilde{x}_3| &\geq 2\left(r + \delta(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2) - |x_3| - \delta r\nu\right) \\ &\geq 2r - |x_3| - \delta(1+r)\nu \geq r - |x_3| \geq 0 \end{aligned}$$

for $\delta \in [0, \frac{r}{(1+r)\nu}]$. Since $V(x) = r$ we obtain that (ii) is valid.
Finally, to prove (iii) we estimate the distance between $(\tilde{x}_3, \tilde{r})$ and (x_3, r)

$$\Delta_1 := \sqrt{(\tilde{x}_3 - x_3)^2 + (\tilde{r} - r)^2} \leq \sqrt{r^2+1}\nu.$$

It is also easy to obtain the estimate of the distance between point (x_3, r) and a surface $|x_3| = 2r$.

$$\Delta_2 := \frac{|x_3| - 2r}{\sqrt{5}} \geq \frac{V(x) - r}{\sqrt{5}} \geq \frac{1}{2\sqrt{5}} V(x)$$

since of (26).
thus, if $\delta \in [0, \frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{1+r^2}}\frac{V(x)}{\nu}]$ we obtain that $\Delta_1 \leq \Delta_2$ which implies that (iii) holds. The Lemma is proven. $\square$

Now let us define the function

$$\tilde{\delta}(x) := \min\left\{\frac{V(x)}{2\nu}, \frac{V(x)}{(1+V(x))\nu}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{V(x)}{\sqrt{1+r^2}}\right\}. \tag{4.15}$$

It is clear that the representation formulas in (i)-(iii) hold for any

$$\delta \in (0, \tilde{\delta}(x)). \tag{4.16}$$

Now we check that the integral decrease condition (2.7) holds for the feedback k_ν (4.3)-(4.6).
Let $x \in \Gamma_1$, then for any δ as in (4.15)

$$\begin{aligned} V(x + \delta f(x, k_\nu(x))) &= |\tilde{x}_3| - \tilde{r} \\ &= |x_3| - r - \delta\nu = V(x) - \delta\nu \end{aligned}$$

where we use (4.13) with $u = k_\nu$. Let $x \in \Gamma_2$ then for $u = k_\nu(x)$,

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &= \tilde{r} \leq r - \delta\nu + \frac{\delta^2}{2r}\nu^2 \\ &\leq r - \frac{1}{2}\delta\nu \leq V(x) - \frac{1}{2}\delta\nu \end{aligned}$$

(we use the fact that $r = V(x)$

$$\frac{\delta^2}{2r}\nu^2 \leq \frac{1}{2}\delta\nu$$

for δ satisfying (4.16).)
Let $x \in \Gamma_3$ then for $u = k_\nu(x)$

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &= |\tilde{x}_3| - \tilde{r} \\ &\leq -r - \delta\left(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2\right) \quad \text{(due to (4.13) and (4.14))} \\ &\leq |x_3| - r - \sqrt{1+r^2}\delta\nu \\ &= V(x) - \delta\sqrt{1+r^2}\nu \end{aligned}$$

(we use the fact that (4.16) implies the constraint on δ in (4.14)).
Finally we need to prove the integral decrease condition in the region Γ_4. We have for $x \in \Gamma_4$

$$\begin{aligned} & V(x) \\ = \; & \max\{\tilde{r}, |\tilde{x}_3 - \tilde{r}\}\text{(due to (4.12)-(4.14))} \\ \leq \; & \max\{r + \delta\left(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2\right) + \frac{\delta^2}{2r}\nu^2, |x_3| + \delta\sigma(x_1u_2 - x_2u_1) \\ & \cdots - r - \delta(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2)\} \\ \leq \; & \max\{r, |x_3| - r\} + \frac{\delta^2}{2r}\nu^2 \\ & \cdots + \delta\max\{\left(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2\right), \sigma(x_1u_2 - x_2u_1) - (\frac{x_1}{r}u_1 - \frac{x_2}{r}u_2)\}. \end{aligned}$$

Note that

$$\begin{aligned} & \min_{|u|\leq\nu}\max\left\{\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2, \sigma(x_1u_2 - x_2u_1) - \left(\frac{x_1}{r}u_1 - \frac{x_2}{r}u_2\right)\right\} \\ = \; & \min_{|u|\leq\nu}\max_{\alpha\in[0,1]}\{(1-\alpha)\left(\frac{x_1}{r}u_1 + \frac{x_2}{r}u_2\right) \\ & \cdots + \alpha\sigma(x_1u_2 - x_2u_1) - \alpha\left(\frac{x_1}{r}u_1 - \frac{x_2}{r}u_2\right)\} \\ = \; & \max_{\alpha\in[0,1]}(-\nu\sqrt{\alpha^2r^2 + (1-2\alpha)^2}) = -\frac{\nu r}{\sqrt{4+r^2}} \end{aligned}$$

by the minimax theorem. We should also note that the control $k_\nu(x)$ in (4.6) is a saddle point in this minimax problem which implies the following estimate for $V(\tilde{x})$ with $u = k_\nu(x)$

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}) &\leq V(x) - \delta\frac{\nu r}{\sqrt{4+r^2}} + \frac{\delta^2}{2r}\nu^2 \\ &\leq V(x) - \frac{1}{2}\frac{\nu r}{\sqrt{4+r^2}}\delta \end{aligned}$$

for $\delta \in [0, \frac{r^2}{\nu\sqrt{4+r^2}}]$.
Now we use the following relations between r and $V(x)$ for $x \in \Gamma_4$ (we use (3.2))

$$\frac{1}{2}r \leq V(x) \leq 2r.$$

Then we obtain that in this case the integral decrease condition has the following form

$$V(\tilde{x}) \leq V(x) - \frac{\nu}{16} \frac{V(x)}{\sqrt{1 + V(x)^2}} \delta$$

(since $\frac{r}{\sqrt{4+r^2}} \geq \frac{V}{2\sqrt{4+4V^2}}$)
for all δ such that

$$\delta \in \left[0, \frac{V(x)^2}{64\nu\sqrt{1 + V(x)^2}}\right].$$

Thus, we have proved that k_ν (4.3)-(4.6) satisfies the integral decrease condition (2.7) with function

$$\delta_0(x) = \min\left\{\tilde{\delta}(x), \frac{V(x)^2}{64\nu\sqrt{1 + V(x)^2}}\right\}$$

where $\tilde{\delta}(x)$ is defined in (4.15).

5. Construction via the proximal aiming approach

In this section we construct a robust stabilizing feedback by using the proximal aiming approach. As above, the feedback k_ν depends on function $\nu : \mathbb{R}^3 \to R_{>0}$ where we consider the two cases (4.1) and (4.2). Below we define our stabilizing feedback by considering the following system of closed bounded sets:

$$S_i := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) \leq b_i\}$$

where

$$b_i := \begin{cases} i + 1 & \text{if } i \geq 0, \\ \frac{10^i}{9^i} & \text{if } i < 0. \end{cases}$$

On the other hand we set

$$\gamma_i := \begin{cases} 1 & \text{if } i \geq 0, \\ \frac{\sqrt{5}}{9} \frac{10^{(i-1)}}{9^{(i-1)}} & \text{if } i < 0. \end{cases}$$

Now we define the feedback $k_i(x)$ for each $x \in \Omega_i$ by considering the projection of x on the set S_i.
First Case: $b_i \leq |x_3| \leq 3b_i, r = 0$

$$k_i(x) := (1, 0)\nu \tag{5.1}$$

Second Case: $x_3 - \sigma r - \sigma b_i \geq 0, x_3 + \sigma r - 3\sigma b_i \leq 0, r > 0$

$$k_i(x) := \left(\frac{x_1 + rx_2}{r\sqrt{1 + r^2}}, \frac{x_2 - rx_1}{r\sqrt{1 + r^2}}\right)\nu. \tag{5.2}$$

Third Case: $x_3 - 2\sigma b_i \geq 0, x_3 + \sigma r - 3\sigma b_i \geq 0, r > 0$

$$k_i(x) := \begin{pmatrix} \frac{x_1(b_i - r) - r x_2(2\sigma b_i - x_3)}{r\sqrt{(r-b_i)^2 + r^2(x_3 - 2\sigma b_i)^2}} \\ \frac{x_2(b_i - r) + r x_1(2\sigma b_i - x_3)}{r\sqrt{(r-b_i)^2 + r^2(x_3 - 2\sigma b_i)^2}} \end{pmatrix}^T \nu. \tag{5.3}$$

Fourth Case: $r \geq b_i, |x_3| \leq 2b_i$

$$k_i(x) := \left(-\frac{x_1}{r}, -\frac{x_2}{r}\right)\nu. \tag{5.4}$$

We will rely on the inequality (2.16) for the projection of $x \in \Omega_i$ on the set S_i.

Lemma 5.1. Let us denote $s(x)$ a projection of x on the set S_i, we have

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) \leq d_{S_i}(x) + \frac{\delta}{2}\frac{\delta\nu^2(1+r^2) + 2\Delta}{d_{S_i}(x)}, \tag{5.5}$$

where $\Delta = \langle x - s(x), f(x, k_i(x))\rangle$.

Proof. We can compute easily

$$\begin{aligned} & d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x)))^2 \\ \leq\ & |x + \delta f(x, k_i(x)) - s(x)|^2 \\ \leq\ & |x - s(x)|^2 + \delta^2 |f(x, k_i(x))|^2 + 2\delta\Delta \\ \leq\ & d_{S_i}(x)^2 + \delta^2\nu^2(1+r^2) + 2\delta\Delta \end{aligned}$$

Now, we obtain

$$\begin{aligned} & d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) \\ \leq\ & d_{S_i}(x)\sqrt{1 + \frac{\delta^2\nu^2(1+r^2) + 2\delta\Delta}{d_{S_i}(x)^2}} \\ \leq\ & d_{S_i}(x) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2\nu^2(1+r^2) + 2\delta\Delta}{d_{S_i}(x)} \end{aligned}$$

which is the required inequality. □

Now, we see that if we choose $\delta_i(x)$ such that

$$\delta_i(x)\nu^2(1+r^2) + 2\Delta \leq -\Delta \Longleftrightarrow \delta_i(x) \leq \frac{-\Delta}{\nu^2(1+r^2)},$$

then we will have the desired inequality (2.16) with

$$w_i(x) = \frac{-\Delta}{2 d_{S_i}(x)}.$$

It remains to compute the constant Δ for each case.

First Case: the point $s(x) := (\frac{x_3-\sigma b_i}{2}, 0, \frac{x_3+\sigma b_i}{2})$ minimizes the distance between x and S_i. We have

$$\begin{aligned} & \langle x - s(x), f(x, k_i(x)) \rangle \\ = & \langle \left(-\frac{x_3 - \sigma b_i}{2}, 0, x_3 - \frac{x_3 + \sigma b_i}{2} \right)^T, (\nu, 0, 0)^T \rangle \\ = & -\frac{x_3 - \sigma b_i}{2} \nu. \end{aligned}$$

On the other hand, we know that $d_{S_i}(x) \geq \gamma_i$, then we deduce that $\frac{x_3-\sigma b_i}{2} \geq \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}}$. Consequently, we have

$$\Delta = \langle x - s(x), f(x, k_i(x)) \rangle \leq -\frac{\gamma_i \nu}{\sqrt{2}}.$$

This implies by using the inequality (5.5)

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) \leq d_{S_i}(x) + \frac{\delta}{2} \frac{\delta \nu^2 - \nu(x_3 - \sigma b_i) \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}}}{d_{S_i}(x)}.$$

Now, $x \in \Omega_i$ implies that $d_{S_i}(x) \leq \sqrt{5}(b_{i+1} - b_i) + \gamma_{i+1}$ and we know that $b_{i+1} - b_i \leq 1$. Consequently, we deduce

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta \frac{\gamma_i \nu}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} + \gamma_{i+1})},$$

for $\delta \in [0, \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}\nu}]$.
Second Case: the projection of x on S_i is

$$\left(\frac{x_1}{r} \frac{\sigma r + x_3 - \sigma b_i}{2}, \frac{x_2}{r} \frac{\sigma r + x_3 - \sigma b_i}{2}, \frac{\sigma r + x_3 + \sigma b_i}{2} \right).$$

Hence

$$\langle x - s(x), f(x, k_i(x)) \rangle \leq -\frac{\nu}{\sqrt{2}} d_{S_i}(x) \leq -\frac{\gamma_i \nu}{\sqrt{2}}.$$

We obtain

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta \frac{\gamma_i \nu}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} + \gamma_{i+1})},$$

for $\delta \in [0, \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}\nu(1+r^2)}]$.
Third Case: the projection of x on S_i is

$$\left(\frac{x_1 b_i}{r}, \frac{x_2 b_i}{r}, 2\sigma b_i \right).$$

Therefore, we can compute

$$\begin{aligned} \Delta &= \langle \left(x_1 - \frac{x_1 b_i}{r}, x_2 - \frac{x_2 b_i}{r}, x_3 - 2\sigma b_i \right)^T, f(x, k_i(x)) \rangle \\ &= -\nu \sqrt{(r - b_i)^2 + r^2 (x_3 - 2\sigma b_i)^2} \end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$d_{S_i}(x) = |x - s(x)|^2 = \sqrt{(r-b_i)^2 + (x_3 - 2\sigma b_i)^2}. \tag{5.6}$$

If $i \geq 0$, then $r^2(|x_3| - 2b_i)^2 \geq (x_3 - 2\sigma b_i)^2$ (because $r \geq 1$). Hence

$$\Delta \leq -d_{S_i}(x)\nu \leq -\gamma_i \nu.$$

We obtain

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta \frac{\gamma_i \nu}{2(\sqrt{5} + \gamma_{i+1})},$$

for $\delta \in [0, \frac{\gamma_i}{\nu(1+r^2)}]$.
Otherwise, we have

$$\begin{aligned} d_{S_i}(x) &\leq \sqrt{5}(b_{i+1} - b_i) + \gamma_{i+1} \qquad (5.7)\\ &\leq \frac{\sqrt{5}}{9}\frac{10^i}{9^i} + \frac{\sqrt{5}}{9}\frac{10^i}{9^i} \\ &\leq \frac{2\sqrt{5}}{9}\frac{10^i}{9^i}. \qquad (5.8) \end{aligned}$$

By (5.6), it is clear that $|r - b_i| \leq d_{S_i}(x)$, hence by (5.7) we have $r \geq \frac{10^i}{3\times 9^i}$. Consequently $(r-b_i)^2 \geq \left(\frac{10^i}{3\times 9^i}\right)^2 (r-b_i)^2$ and $r^2(x_3 - 2\sigma b_i)^2 \geq \left(\frac{10^i}{3\times 9^i}\right)^2 (x_3 - 2\sigma b_i)^2$.
Therefore

$$\Delta \leq -\frac{10^i}{3\times 9^i}\gamma_i \nu = -\frac{b_i \gamma_i \nu}{3}.$$

We obtain

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta \frac{b_i \gamma_i \nu}{6(\sqrt{5} + \gamma_{i+1})},$$

for $\delta \in [0, \frac{b_i \gamma_i}{3\nu(1+r^2)}]$.

Fourth Case: in this case, the projection is

$$\left(\frac{x_1 b_i}{r}, \frac{x_2 b_i}{r}, x_3\right).$$

We have

$$\begin{aligned} &\langle x - s(x), f(x, k_i(x))\rangle \\ = \; & -\nu \langle \left(x_1 - \frac{x_1 b_i}{r}, x_2 - \frac{x_2 b_i}{r}, 0\right)^T, (\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{2x_1 x_2}{r})^T\rangle \\ = \; & -\frac{\nu}{r^2}\left[x_1^2(r - b_i) + x_2^2(r - b_i)\right] = -\nu(r - b_i). \end{aligned}$$

It is easy to see that $r - b_i = \frac{d_{S_i}(x)}{\sqrt{2}} \geq \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}}$, then we have

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta \frac{\gamma_i \nu}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} + \gamma_{i+1})},$$

for $\delta \in [0, \frac{\gamma_i}{\sqrt{2}\nu(1+r^2)}]$.

Now let us define

$$\delta_i(x) := \min\left\{\frac{\gamma_i}{\sqrt{2}\nu(1+r^2)}, \frac{\gamma_i b_i}{3\nu(1+r^2)}\right\}.$$

We have finally that

$$d_{S_i}(x + \delta f(x, k_i(x))) - d_{S_i}(x) \leq -\delta w_i(x) \quad \forall \delta \in [0, \delta_i(x)],$$

with $w_i(x) := \frac{\nu}{2(\sqrt{5}+\gamma_{i+1})} \min\left\{\frac{\gamma_i}{\sqrt{2}}, \frac{b_i \gamma_i}{3}\right\}$.

CHAPITRE VII

Generalized tracking Lemma and Mayer Problem

1. Introduction

Let us consider a control system

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.1}$$

where (open loop) controls $u(\cdot)$ are Lebesgue measurable functions u from $\mathbb{R}^n$ into U a compact subset of $\mathbb{R}^m$. The dynamics $f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ will be assumed to satisfy the following standard hypotheses (where $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm):

(F1) f is continuous and locally Lipschitz in the state variable x; that is, for each bounded subset Γ of $\mathbb{R}^n$, there exists $L = L_\Gamma > 0$ such that

$$\|f(x,u) - f(y,u)\| \leq L\|x-y\|,$$

whenever (x,u) and (y,u) are in $\Gamma \times U$.

(F2)

$$K := \sup_{\mathbb{R}^n \times U} \|f\| < +\infty.$$

(F3) The velocity set $f(x,U)$ is convex for all $x \in \mathbb{R}^n$.

These conditions guarantee that for every initial phase $(\tau,\alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ and any control function $u(\cdot)$, there exists a unique solution $x(t) = x(t;\tau,\alpha,u(\cdot))$ of (1.1) on the interval $[\tau,\infty)$ such that $x(\tau) = \alpha$.

Suppose that $S \subset \mathbb{R}^n$ is a closed set which is *weakly invariant* (or in alternate terminology, *viable* or *holdable*); that is, for any $(\tau,\alpha) \in \mathbb{R}\times S$ there exists a control $u(\cdot)$ such that $x(t) = x(t;\tau,\alpha,u(\cdot)) \in S$ for all $t \geq \tau$. Let $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be locally Lipschitz, and let $T \in \mathbb{R}$ be fixed. For an initial phase $(\tau,\alpha) \in (-\infty,T] \times S$, consider the following Mayer problem $P(\tau,\alpha)$ with state constraint S:

minimize $l(x(T))$
subject to
$\dot{x} = f(x,u), \quad x(\tau) = \alpha, \quad x(t) \in S \quad \forall t \in [\tau,T].$

By standard "sequential compactness of trajectories" arguments, valid under (F1)-(F3), the following facts are easily verified:

- The minimum in $P(\tau,\alpha)$ is attained; we denote this minimum by $V(\tau,\alpha)$, and refer to $V : (-\infty,T] \to \mathbb{R}$ as the value function.
- The value function is lower semicontinuous on $(-\infty,T] \times S$.

Remark 1.1. The function V will be locally Lipschitz (resp. continuous if l is only continuous) in the absence of a state constraint (i.e. when $S = \mathbb{R}^n$). Essentially this is due to the Hausdorff Lipschitz property of the attainability map as a function of the initial phase (τ, α), a property which in turn follows from a "tracking" property for trajectories, akin to Lipschitz continuity of solutions with respect to initial data in the classical theory of ordinary differential equations; see e.g. Clarke et al. [**24**]. On the other hand, when a state constraint is present, simple cases show that only lower semicontinuity of V holds in general. Consider for example the problem with $f(x_1, x_2, u) = (0, u), U = [0, 1]$,

$$S = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 0\},$$

and where the cost is $l(x(1)) = x_2(1)$. Then S is obviously weakly invariant (since one can always apply the control $u = (0, 0)$). If $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$, the minimum value in the problem is -1, but for any other start point of the x_1 axis, the minimum is 0.

Our aim is to find some conditions on the set S for obtaining some regularity properties on the value function V. That's why we give some additional geometric assumptions on the state constraint set S:

(S1) S is compact.

(S2) S is *wedged* (or in alternate terminology, *epi-Lipschitz*). This means that at each point $x \in S$, the Clarke normal cone $N_S^C(x)$ is pointed.

(S3) The following strict inwardness condition holds:

$$\forall x \in \partial S, \forall \zeta \in N_S^C(x) \setminus \{0\}, \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x, u) \rangle < 0. \tag{1.2}$$

This is expressible as

$$\max_{\zeta \in N_S^C(x) \setminus \{0\}} \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x, u) \rangle < 0. \tag{1.3}$$

Remark 1.2. A set is also said to be wedged if it is locally the epigraph of a lipschitz function.

Remark 1.3.

1. The condition (S3) implies the weak invariance of S (see [**24**]).
2. Due to the minimax theorem, the set S being wedged, (S3) is equivalent to

$$\forall x \in \partial S, \min_{u \in U} \max_{\zeta \in N_S^C(x) \setminus \{0\}}, \langle \zeta, f(x, a) \rangle < 0. \tag{1.4}$$

Now we give the main result of this chapter; our hypotheses (F1)-(F3) on the dynamics are still in effect.

Theorem 1.4. When (S1)-(S3) hold, the value function is locally Lipschitz on $(-\infty, T] \times S$.

We postpone the proof of this theorem to the last section; we present beforehand a technical lemma essential for the proof.

2. The generalized tracking lemma

We shall require the following state constrainted "tracking lemma". Our proof generalizes one due to Soner [**70**] (see also Bardi and Capuzzo-Dolcetta [**11**]), where S was assumed to have C^2-smooth boundary.

Lemma 2.1. Let (S1)-(S3) hold. Then there exists positive constants $C > 0$ and $t^* > 0$ such that the following holds: Given any $\alpha \in S$ and any control $u(\cdot)$, there exists a control $\bar{u}(\cdot)$ such that

$$x(t; 0, \alpha, \bar{u}(\cdot)) \in S \quad \forall t \in [0, t^*], \tag{2.1}$$

and

$$\|x(t; 0, \alpha, u(\cdot)) - x(t; 0, \alpha, \bar{u}(\cdot))\| \leq C \max_{t \in [0,t^*]} d_S(x(t; 0, \alpha, u(\cdot))). \tag{2.2}$$

Proof. We define the following signed distance function $\Delta_S(\cdot)$:

$$\Delta_S(x) := d_S(x) - d_{\mathbb{R}^n \setminus S}(x).$$

This function is Lipschitz function of rank 2, and the wedgedness of the set S enables us to relate the C-gradients of $\Delta_S(\cdot)$ to the Clarke normal cones $N_S^C(x)$ (see [**?**] or [**20**]). Specifically, for every $x \in \partial S$, one has $0 \notin \partial_C \Delta_S(x)$ and

$$\partial_C \Delta_S(x) \subset \mathrm{co}[N_S^C(x) \bigcap S^{n-1}],$$

where S^{n-1} denotes the unit sphere of $\mathbb{R}^n$.
Consequently, by (1.4) and the fact that the multivalued mapping $x \mapsto \partial_C f(x)$ has closed graph, we have the following: For each $x \in \partial S$, there exists $\mu_x > 0$, U_x an open set of $\mathbb{R}^n$ and a point $w_x \in U$ such that

$$\langle \zeta, f(z, w_x) \rangle \leq -\mu_x \quad \forall \zeta \in \partial_C \Delta_S(y), \forall y, z \in U_x. \tag{2.3}$$

Therefore, we can choose a finite covering $\{U_{x_i}\}_i$ and $\{\psi_i\}_i$ a subordinated C^∞ partition of unity. By definition, for each i the support $Supp(\psi_i)$ of ψ_i is included in U_{x_i}; hence we can define r and μ as follows:

$$\mu := \min_i \{\mu_{x_i}\} > 0,$$

$$r := \min_i \min_{x \in Supp(\psi_i)} d_{\mathbb{R}^n \setminus U_{x_i}}(x) > 0.$$

We define a function $w : \partial S \to U$ as follows. For every $x \in \partial S$, we pick $i = i(x)$ such that $x \in Supp(\psi_i)$, and we set $w(x) := w_{x_i}$.
On the other hand by the assumption (F2), for any control function $u(\cdot)$:

$$\|x(t; 0, x, u(\cdot)) - x\| \leq Kt \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Given a control $u(\cdot)$ and initial phase $(0, x)$ with $x \in S$, we denote by $t_x(u(\cdot))$ the exit time of the associated trajectory from $\mathrm{int}(S)$; that is

$$t_x(u(\cdot)) := \begin{cases} \infty \text{if } x(t; 0, x, u(\cdot)) \in \mathrm{int}(S) \forall t \\ \min\{t \geq 0 : x(t; 0, x, u(\cdot)) \in \partial S\} \text{otherwise} \end{cases}$$

We want to determine two constants $t^*, k^* > 0$ such that for any $x \in S$ and any control function $u(\cdot)$, if we set

$$t_0 := \min\{t^*, t_x(u(\cdot))\},$$

$$z := x(t_0; 0, x, u(\cdot)),$$

$$\epsilon := \sup_{t \in [0,t^*]} d_S(x(t; 0, x, u(\cdot))),$$

and define

$$\begin{cases} \bar{u}(t) \equiv u(t) \text{if } t_0 = t^*, \\ \bar{u}(t) := u(t)\chi_{[0,t_0)} + w(x_{i(z)})\chi_{[t_0,t_0+k^*\epsilon]} + u(t - k^*\epsilon)\chi_{(t_0+k^*\epsilon,\infty)}, \end{cases}$$

otherwise, then $x(t; 0, x, \bar{u}(\cdot)) \in S$ for all $t \in [0, t^*]$.
For brevity, we denote

$$x(t) := x(t; 0, x, u(\cdot)), \quad \bar{x}(t) = x(t; 0, x, \bar{u}(\cdot)).$$

Note that for $\Delta_S(x) \le -\frac{\mu}{2}$, we can choose $t^* < \frac{\mu}{2K}$; we then obtain from (2.4) that $x(t) \in S$ for all $t \in [0, t^*]$.
Now suppose $\Delta_S(x) > -\frac{\mu}{2}$ and $t_0 = t_x(\alpha) < t^* < \frac{r}{2K}$. Then $\bar{x}(t)$ and $y(t)$ remain in $U_{x_{i(z)}}$ by (2.4) (and by the definition of r), where $z = y(t_0) = x(t_0) = \bar{x}(t_0) \in \partial S$.
We set

$$p := \bar{x}(t_0 + k^*\epsilon) - z = \int_{t_0}^{t_0+k^*\epsilon} f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))ds.$$

Let $y \in U_{x_{i(z)}}$ and $\zeta \in \partial_C \Delta_S(y)$. Then by definition of $w(z)$ and by (2.3) one has

$$\begin{aligned} \langle \zeta, p \rangle &= \langle \zeta, \int_{t_0}^{t_0+k^*\epsilon} f(\bar{x}(s), w(x_i))ds \rangle \\ &= \int_{t_0}^{t_0+k^*\epsilon} \langle \zeta, f(\bar{x}(s), w(x_i)) \rangle ds \\ &\le -\mu k^*\epsilon. \end{aligned} \tag{2.5}$$

A straightforward argument using the Gronwall inequality yields that for all $t > t_0 + k^*\epsilon$, one has

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(s) - x(s - k^*\epsilon)\| &\le \|\bar{x}(t_0 + k^*\epsilon) - z\| e^{L(s-t_0-k^*\epsilon)} \\ &\le Kk^*\epsilon e^{L(s-t_0-k^*\epsilon)} \quad \text{for } s > t_0 + k^*\epsilon. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Here L is a Lipschitz constant as in (F1), with $\Gamma = S$.
We fix now t such that $t_0 + k^*\epsilon \le t \le t^*$. We compute

$$\begin{array}{rcl} \bar{x}(t) & = & z + p + \displaystyle\int_{t_0+k^*\epsilon}^{t} f(\bar{x}(s), \bar{u}(s))ds \\ & = & z + p + \displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} f(\bar{x}(s+k^*\epsilon), u(s))ds \\ & = & z + p + \displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} f(x(s), u(s))ds \\ \cdots & + & \displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} \left[f(\bar{x}(s+k^*\epsilon), u(s)) - f(x(s), u(s))\right] ds \\ & = & x(t-k^*\epsilon) + p \\ \cdots & + & \displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} \left[f(\bar{x}(s+k^*\epsilon), u(s)) - f(x(s), u(s))\right] ds \end{array}$$

Now we define the function

$$g : s \in [0,1] \longmapsto \Delta_S(x(t-k^*\epsilon) + sp).$$

By Lebourg's mean value theorem (see [**16**], [**24**]), there exist $s \in [0,1]$ and $\zeta \in \partial_C \Delta_S(x(t-k^*\epsilon) + sp)$ such that

$$g(1) - g(0) \le \langle \zeta, p \rangle.$$

Then by (2.5) we obtain

$$\begin{array}{rcl} \Delta_S(x(t-k^*\epsilon) + p) & \le & \Delta_S(0) - \mu k^*\epsilon \\ & \le & \epsilon(1 - \mu k^*), \end{array}$$

because $\sup_{0\le t\le t^*} d_S(x(t;0,x,u(\cdot))) = \epsilon$. We then deduce from the inequalities above that

$$\begin{array}{rl} & \Delta_S(\bar{x}(t)) \\ \le & \Delta_S(x(t-k^*\epsilon) + p) + [\Delta_S(\bar{x}(t)) - \Delta_S(x(t-k^*\epsilon) + p)] \\ \le & \epsilon(1-\mu k^*) + 2\|\bar{x}(t) - p - x(t-k^*\epsilon)\| \\ \le & \epsilon(1-\mu k^*) + 2\|\displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} \left[f(\bar{x}(s+k^*\epsilon), u(s)) - f(x(s), u(s))\right] ds\| \\ \le & \epsilon(1-\mu k^*) + 2\displaystyle\int_{t_0}^{t-k^*\epsilon} LKk^*\epsilon e^{L(s-t_0)} ds \\ \le & \epsilon(1-\mu k^*) + 2Kk^*\epsilon[e^{L(t-t_0-k^*\epsilon)} - 1]. \end{array}$$

Consequently, $\Delta_S(\bar{x}(t)) \le -\frac{\epsilon}{2}$ for all $t \in [0, t^*]$ when we choose $k^* := \frac{2}{\mu}$ and

$$t^* := \min\left\{\frac{\mu}{2K}, \frac{r}{2K}, \frac{1}{L}\log(1 + \frac{\mu}{8K})\right\},$$

□

3. Proof of Theorem 1.4

This section is entirely devoted to the proof of the main result of the chapter; we finish by a useful counter-example when the condition (S3) does not hold.

Proof. First, we show that when we fix α, the function $\tau \mapsto V(\tau, \alpha)$ is locally Lipschitz on $(-\infty, T]$. So, we fix α and $\tau_0 < T$. Consider an initial time $\tau \in (\tau_0, T]$, and let $u(\cdot)$ be a control such that $x(t) := x(t; \tau, \alpha, u(\cdot)) \in S$ on the interval $[\tau, T]$.
First consider an initial phase $(\hat{\tau}, \alpha)$, where $\tau_0 \leq \hat{\tau} \leq \tau$, and define the control

$$\hat{u}(t) := \begin{cases} u(t + \tau - \hat{\tau}) & \text{if } t \in [\hat{\tau}, T - \tau + \hat{\tau}] \\ \tilde{u}(t) & \text{if } t \in [T - \tau + \tilde{\tau}], \end{cases}$$

where $\tilde{u}(\cdot)$ is a control such that

$$x(t; T - \tau + \hat{\tau}, x(T - \tau + \hat{\tau})\tilde{u}(\cdot)) \in S \quad \forall t \in [T - \tau + \hat{\tau}, T].$$

Then $\hat{x}(t) := x(t; \hat{\tau}, \alpha, \hat{u}(\cdot))$ remains in S on the interval $[\hat{\tau}, T]$, and

$$\|x(T) - \hat{x}(T)\| \leq Q\|\tau - \hat{\tau}\|, \tag{3.1}$$

where Q is a norm bound on the set $f(S, U)$.
Now consider the easier case $\tau \leq \hat{\tau} \leq T$. We simply define $\hat{u}(t) := u(t - \hat{\tau} + \tau)$ on $[\hat{\tau}, T]$. Then $\hat{x}(t) \in S$ on that interval, and again we obtain (3.1). Hence in either case,

$$\|l(x(T) - l(\hat{x}(T))\| \leq WQ\|\tau - \hat{\tau}\|, \tag{3.2}$$

where W is a Lipschitz constant for $l(\cdot)$ on S. From this it easily follows that for α fixed, the function $\tau \mapsto V(\tau, \alpha)$ is Lipschitz of rank WQ on the interval $(\tau_0, T]$.
We prove now the Lipschitz property in α. We will make use of the tracking lemma. Fix $\tau \in (-\infty, T]$, let $\alpha \in S$, and let $u(\cdot)$ be an optimal control on $[\tau, T]$; that is, the trajectory $x(t) := x(t; \tau, \alpha, u(\cdot))$ is optimal and in particular, remains in S on $[\tau, T]$. In order to explain our interval-by-interval construction, let us suppose that $T - \tau \geq 2t^*$. (The case where $T - \tau \leq 2t^*$ is easier and left to the reader.) Consider an initial phase $(\tau, \hat{\alpha})$ with $\hat{\alpha} \in S$, and apply the same control $u(\cdot)$ on the interval $[\tau, \tau + t^*]$. By Gronwall's lemma,

$$\|x(t; \tau, \alpha, u(\cdot)) - x(t; \tau, \hat{\alpha}, u(\cdot))\| \leq \tilde{L}\|\alpha - \hat{\alpha}\| \quad \forall t \in [\tau, \tau + t^*], \tag{3.3}$$

with $\tilde{L} := e^{L(T-\tau)}$, where L is a Lipschitz constant as in (F1) (with $\Gamma = S$). Therefore

$$\max_{t \in [\tau, \tau + t^*]} d_S(x(t; \tau, \hat{\alpha}, u(\cdot))) \leq \tilde{L}\|\alpha - \hat{\alpha}\|, \tag{3.4}$$

and the tracking lemma implies that there exists a control $\bar{u}(\cdot)$ on $[\tau, \tau + t^*]$ such that

$$x(t; \tau, \hat{\alpha}, \bar{u}(\cdot)) \in S \quad \forall t \in [\tau, \tau + t^*], \tag{3.5}$$

and

$$\|x(t;\tau,\hat{\alpha},u(\cdot)) - x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot))\| \le C\tilde{L}\|\alpha - \hat{\alpha}\| \tag{3.6}$$

for all $t \in [\tau, \tau + t^*]$.
Then

$$\|x(t;\tau,\alpha,u(\cdot)) - x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot))\| \le (\tilde{L} + C\tilde{L})\|\alpha - \hat{\alpha}\| \tag{3.7}$$

for all $t \in [\tau, \tau + t^*]$.
This procedure is now repeated, with $x(\tau + t^*; \tau, \alpha, u(\cdot))$ and $x(\tau + t^*; \tau, \hat{\alpha}, \bar{u}(\cdot))$ taking over the roles played by α and $\hat{\alpha}$, respectively. We extend the control $\bar{u}(\cdot)$ to the interval $[\tau + t^*, \tau + 2t^*]$, and obtain

$$x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot)) \in S$$

for all $t \in [\tau + t^*, \tau + 2t^*]$, and

$$\|x(t;\tau,\alpha,u(\cdot)) - x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot))\| \le (\tilde{L} + C\tilde{L})^2\|\alpha - \hat{\alpha}\|$$

for all $t \in [\tau + t^*, \tau + 2t^*]$.
Continuing in this way, we finally obtain

$$x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot)) \in S \forall t \in [\tau, T],$$

and

$$\|x(t;\tau,\alpha,u(\cdot)) - x(t;\tau,\hat{\alpha},\bar{u}(\cdot))\| \le (\tilde{L} + C\tilde{L})^{\tilde{m}}\|\alpha - \hat{\alpha}\|$$

for all $\forall t \in [\tau, T]$, where $\tilde{m}$ denotes the smallest positive integer m such that $t^* \ge \frac{T-\tau}{m}$. It readily follows that (for the τ we have fixed), the function $\alpha \mapsto V(\tau, \alpha)$ is Lipschitz of rank $W(\tilde{L} + C\tilde{L})^{\tilde{m}}$ on S. ☐

Remark 3.1.

1. It is an open problem to find conditions weaker than (S1)-(S3) which guarantee mere continuity of V on $(-\infty, T] \times S$.
2. We have already seen an example where the continuity of V in a state constrained problem can fail, in Remark 1.1; there both (S2) and (S3) were violated. The following example is more subtle. The state constraint set is now

$$S = \{(x_1, x_2) : |x_1| + x_2 \ge 0\} \cap \overline{B}_2,$$

and the dynamics are given by

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, \quad U = [-2, 2] \\ \dot{x}_2 &= -1. \end{aligned}$$

It is readily checked that (S1) and (S2) hold, and that (S3) fails only at $(0, 0)$. We take the cost functional to be $l(x(1)) = x_1(1)$. For $i = 1, 2, \cdots$, denote $\alpha_1 = (-\frac{1}{i}, -\frac{1}{i})$ and $\bar{\alpha}_i = (\frac{1}{i}, -\frac{1}{i})$. For each initial phase $(0, \alpha_i)$, the optimal control is $u(t) \equiv -2$, and so $V(0, \alpha_i) = -\frac{1}{i} - 2$. On the other hand, for initial phases $(0, \bar{\alpha}_i)$, the optimal control is $u(t) \equiv 2$, and we obtain $V(0, \bar{\alpha}_i) = \alpha_i + 2$. Upon letting $i \to \infty$, we see that V is discontinuous at $(0, 0)$.
The reason for the discontinuity is that the tracking lemma, and

(2.2) in particular, fails in this example. To see why this is so, consider an initial phase $(0, \bar{\alpha}_i)$ and apply the control $u(t) \equiv -2$. The resulting trajectory $(\frac{1}{i}-2t, -t)$ immediatly exits S, and then re-enters S later. As $i \to \infty$, the amount of time the trajectory is exterior to S decreases to zero, as does the maximal distance from S of any point along the trajectory, during an initial time interval. Upon considering the nature of trajectories emanating from $\bar{\alpha}_i$ which remain in S (they necessarly move "down and to the right"), one easily concludes that no constants C and t^* as in (2.2) exist.

CHAPITRE VIII

Commentaires et perspectives

A la lecture de ces travaux, on se rend bien compte qu'il est possible d'étendre les résultats présentés à un cadre un peu plus général ; nous avons en fait déjà évoqué ce type de perspectives dans le chapitre 2. Au lieu de stabiliser les systèmes à l'origine, on pourrait être intéressé par une stabilisation vers un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Posons rapidement quelques définitions adaptées au cas de la stabilisation vers un compact.

Etant donné le système commandé

$$\dot{x} = f(x, u),$$

nous dirons qu'il est globalement asymptotiquement commandable pour le compact $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^n$, si les propriétés d'attractivité et de stabilité Lyapunov adaptées au cas de la convergence vers l'ensemble $\mathcal{T}$ (i.e. $d_{\mathcal{T}}(x(t)) \to 0$, quand $t \to 0$) énoncées dans l'introduction demeurent.

Par ailleurs, nous dirons que la fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction Lyapunov de commande associée au système ci-dessus pour le compact $\mathcal{T}$, si elle est continue, définie positive pour $\mathcal{T}$ (i.e. $V(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{T}$ et $V > 0$ hors de $\mathcal{T}$), propre et s'il existe une fonction $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive pour $\mathcal{T}$ telle que :

$$\forall x \notin \mathcal{A}, \forall \zeta \in \partial_P V(x), \min_{u \in U} \langle \zeta, f(x, u) \rangle \leq -W(x).$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $\mathcal{T}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\dot{x} = f(x, u)$ un système commandé GAC pour cet ensemble ; alors il existe une fonction Lyapunov de commande semi-concave sur $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$ associée à l'ensemble $\mathcal{T}$ et de plus, il existe un retour d'état stabilisant vers $\mathcal{T}$ au sens des solutions Euler. Ce feedback possède en outre les propriétés de robustesse faible présentées dans le chapitre 3.

Le lecteur comprendra aisément la signification de la stabilisation au sens des solutions Euler vers le compact $\mathcal{T}$. Par ailleurs, il est clair à la vue du chapitre 5 que la fonction W correspondant à la fonction Lyapunov donnée par le théorème ci-dessus peut être prise égale à V. Pour démontrer le théorème alors présenté, il suffit de reprendre les preuves effectuées dans le chapitre 4 et de substituer à l'origine l'ensemble $\mathcal{T}$; notre compact jouera alors exactement le rôle que jouait le point origine dans nos différents lemmes, nous aboutirons alors au théorème énoncé ci-dessus.

Arrétons-nous un instant sur le problème de la stabilisation vers un compact. Lorsque l'on stabilise vers l'origine, la principale obstruction (locale) à l'existence de retours d'état suffisamment réguliers est constituée par la condition de Brockett. Dans le problème considéré maintenant, il existe un nouvel obstacle à l'existence de tels feedbacks, mais il est, lui, structurel. Considérons par exemple le problème de stabilisation vers un cercle pris dans le plan; il est clair qu'aucun champ de vecteur continu dans le plan ne sera globalement asymptotiquement stable pour cet ensemble, et ceci en vertu du théorème de Brouwer, ou plus précisément parce qu'il n'existe pas de rétraction continue du disque sur le cercle ; un tel feedback obligerait le flot à se déchirer à l'intérieur du disque. De manière plus général, Sontag démontre dans [**73**] qu'un ensemble attractif pour un champ de vecteurs continu est obligatoirement contractible. Ce résultat constitue une motivation supplémentaire à l'utilisation de retours d'états discontinus tels que ceux présentés dans cette thèse. Nous sommes forçés d'avoir recours aux π-trajectoires ou aux solutions Euler pour stabiliser un système commandé (sur tout $\mathbb{R}^n$) vers un ensemble qui n'est pas contractible, tel le cercle, la sphère...

Il est peut-être plus intéressant encore d'étudier les problèmes de stabilisation de systèmes commandés définis sur des variétés, ou plus simplement en se plongeant dans l'espace euclidien, de systèmes fortement invariants pour des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$. Encore une fois, des obstructions structurelles vont faire barrage à l'existence de retours d'état suffisamment réguliers (continus ou de type Krasovskii ou Filippov). En effet, supposons avoir démontré le théorème suivant :

Théorème 2. Soit S un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ fortement invariant pour le système

$$\dot{x} = f(x, u(x)),$$

où u est une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans U. Si le système est GAS pour un point équilibre x_{eq} appartenant à S, alors il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse, définie positive pour le point x_{eq} et propre telle que

$$\forall x \in S \setminus \{x_{eq}\}, \langle \nabla V(x), f(x, u(x)) \rangle < 0.$$

Ce résultat n'est pas surprenant, on peut le démontrer par exemple en combinant les techniques utilisées dans les chapitres 2 et 4 ; nous invitons également le lecteur à aller consulter un article récent de Sontag [**76**]. Appliquons ce théorème dans le cas où S est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la fonction Lyapunov atteint son maximum sur S et en ce point on a inévitablement

$$\langle \nabla V(x), f(x, u(x)) \rangle = 0 \quad !$$

Ceci nous prouve que dans certains cas, il n'existe pas de retours d'état suffisamment réguliers qui vont stabiliser notre système à l'équilibre. Encore une fois, toutes ces considérations nous poussent à étendre les résultats présentés dans cette thèse à un cadre plus général dans lequel ils trouveront toutes les raisons de s'exprimer.

Nous voudrions en outre soulever un problème intéressant toujours lié au problème de stabilisation par des retours d'états discontinus. Il s'agit du cas de la stabilisation d'un système commandé homogène. Afin de bien poser le problème, définissons formellement la notion de système commandé homogène.

Définition 1. Soit f une application localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, elle est dite homogène si il existe des constantes

$$(r_1, \cdots, r_n, \delta_1, \cdots, \delta_m) \in]0, +\infty[^{n+m} \text{ et } \tau \in \mathbb{R}$$

telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :
$\forall x = (x_i)_{i=1,n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall u = (u_i)_{1,m} \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \forall j = 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned} & f_j(t^{r_1} x_1, \cdots, t^{r_p} x_p, t^{\delta_1} u_1, \cdots, t^{\delta_m} u_m) \\ = \quad & t^{\tau + r_j} f_j(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

En outre, nous dirons qu'un système commandé est homogène si son application associée f est homogène.

La notion d'homogénéité correspond en quelque sorte à une généralisation de la propriété de linéarité. De la même manière que dans le cas des systèmes linéaires, l'homogénéité d'un système implique l'équivalence entre ses propriétés de commandabilité asymptotique locale et de commandabilité asymptotique globale. Nous savons que dans le cas d'un système linéaire commandable à l'origine, il existe des retours d'état linéaires qui le stabilisent. Le cas homogène est beaucoup plus complexe. Rosier exhibe par exemple dans sa thèse [**68**] l'exemple d'un système homogène qui possède un retour d'état stabilisant continu mais qui n'admet pas de retour d'état stabilisant continu homogène. En d'autres termes, ce système possède une fonction Lyapunov de commande lisse, mais elle n'est pas homogène. Une manière de combler cette lacune serait de toujours pouvoir associer à un système GAC un retour d'état discontinu, mais homogène. Nous sommes donc tenter de conjecturer le résultat suivant :

Théorème 3. Si le système est localement asymptotiquement commandable alors il existe une fonction Lyapunov de commande $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semi-concave sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et homogène, c'est-à-dire

$$\forall x = (x_i)_{i=1,n} \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, V(t^{r_1} x_1, \cdots, t^{r_n} x_n) = t^k V(x),$$

où k est un nombre réel. Et par conséquent, il existe un retour d'état homogène qui stabilise le système au sens des solutions Euler.

Appendice : La condition de Brockett

Nous proposons maintenant une démonstration du résultat de Ryan [**69**] cité à plusieurs reprises dans les sections précédentes; il s'agit du résultat suivant.

Théorème 0.1. *Soit F une application multivaluée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'hypothèse (H) ; si le système $\dot{x} \in F(x)$ est GAS à l'origine, alors la condition de Brockett est vérifiée :*
Pour tout $\gamma > 0$, il existe $\Delta > 0$ tel que

$$\Delta B \subset F(\gamma B). \tag{0.8}$$

Notre preuve est principalement basée sur un théorème de point fixe. Nous dirons qu'un ensemble vérifie la propriété du point fixe si il est compact et vérifie la propriété suivante :
Pour toute application continue $f : S \to S$, il existe $x \in S$ tel que

$$f(x) = x.$$

En particulier, par le théorème de Brouwer, les boules de dimension finie vérifie la propriété du point fixe. Et par suite, tout rétract d'une boule de $\mathbb{R}^n$ la vérifie également. Avant de démontrer le théorème 0.1, nous donnons un théorème et un lemme.

Théorème 0.2. *Soit S un ensemble compact possédant la propriété du point fixe et f une application localement lipschitzienne rendant S invariant pour la dynamique $\dot{x} = f(x)$, alors sous ces conditions, il existe $\bar{x} \in S$ tel que*

$$f(\bar{x}) = 0.$$

Preuve. Posons $h > 0$ et considérons le flot $\phi(h, x)$ associé à $\dot{x} = f(x)$. Comme l'ensemble est invariant sous l'action de notre dynamique, l'application

$$\psi : x \mapsto \phi(h, x)$$

est une application continue de S dans S. Par application du théorème de point fixe, il existe $x_h \in S$ tel que $\psi(x_h) = x_h$.
Maintenant, en faisant cette construction pour $h_n \downarrow 0$ et en prenant une suite extraite (par compacité de S) on obtient une suite $(x_{h_n})_n$ de points de S convergeant vers un certain $\bar{x} \in S$. Or par passage à la

limite, il est clair que

$$0 = \frac{\phi(h_m, x_{h_n}) - x_{h_n}}{h_n} \to f(\bar{x}).$$

Le théorème est alors démontré. □

Nous avons utilisé ci-dessus la propriété d'invariance (forte) de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$. Clarke, Ledyaev, Stern et Wolenski donnent dans [**24**] une condition nécessaire et suffisante d'invariance forte; dans notre cas (très simple), leur résultat peut se résumer de la manière suivante :
L'équation différentielle est fortement invariante si et seulement si

$$\forall x \in S, \forall \zeta \in N_S^C(x), \langle \zeta, f(x) \rangle \leq 0.$$

Donnons maintenant le lemme sur lequel reposera la démonstration du théorème 0.1.

Lemme 0.3. *Soit S un compact de $\mathbb{R}^n$ possédant la propriété du point fixe et F une application multivaluée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'hypothèse (H). Supposons de plus qu'il existe $\mu > 0$ tel que*

$$\forall x \in S, \forall \zeta \in N_S^C(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v \rangle \leq -\mu \|\zeta\|. \tag{0.9}$$

Alors F possède un zéro dans S.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Comme F est semi-continue supérieurement, pour tout $x \in S$, il existe $0 < \delta_x < \epsilon$ tel que

$$\forall y \in B(x, \delta_x), F(y) \subset F(x) + \epsilon B. \tag{0.10}$$

Par ailleurs d'après l'inégalité (0.9), il apparaît que l'ensemble S est épi-Lipschitz (voir [**24**]), on en conclut donc que l'application multivoque $x \mapsto N_S^C(x)$ est semi-continue supérieurement, et qu'on peut choisir δ_x de manière à ce que

$$\forall y \in B(x, \delta_x), N_S^C(y) \subset N_S^C(x) + \lambda(\epsilon) B, \tag{0.11}$$

où $\lambda(\epsilon)$ est un réel positif dépendant de ϵ et de μ.
La famille d'ouverts $\{B(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in S}$ recouvre S. Ainsi comme cet ensemble est compact, il existe un sous-recouvrement fini $\{B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})\}_{i \in I}$ de S. Choisissons par ailleurs une partition localement lipschitzienne de l'unité associée à ce recouvrement, c'est à dire des applications f_i s'annulant hors de $B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ et telles que

$$\forall x \in S, \sum_{i \in I} f_i(x) = 1.$$

Choisissons pour tout i un $v_i \in F(x_i)$ et définissons l'application $f_\epsilon : S \to \mathbb{R}^n$ par

$$f_\epsilon(x) := \sum_{i \in I} f_i(x) v_i.$$

Cette application est localement Lipschitzienne, démontrons la propriété suivante :

$$\forall x \in \partial S, \forall \zeta \in N_S^C(x), \langle \zeta, f_\epsilon(x)\rangle \leq -\frac{\mu}{2}\|\zeta\|. \tag{0.12}$$

Soit x fixé dans ∂S le bord de S, nous noterons $I(x)$ l'ensemble des indices i pour lesquels $f_i(x) \neq 0$. Considérons également $\zeta \in N_S^C(x) \cap S^n$ (où S^n désigne la sphère de dimension n), nous pouvons alors calculer

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, f_\epsilon(x)\rangle &= \langle \zeta, \sum_{i\in I(x)} f_i(x) v_i\rangle \\
&= \sum_{i\in I(x)} f_i(x)\langle \zeta, v_i\rangle \\
&= \sum_{i\in I(x)} f_i(x)[\langle \zeta_i, v_i\rangle + \langle \zeta - \zeta_i, v_i]\rangle, \qquad (0.13)
\end{aligned}$$

où ζ_i est pris pour tout i dans $N_S^C(x_i)$ tel que

$$\zeta = \zeta_i + \lambda(\epsilon)u,$$

avec $\|u\| < 1$, tout ceci d'après (0.11). D'autre part, par l'hypothèse du lemme, on a

$$\langle \zeta_i, v_i\rangle \leq -\mu\|\zeta_i\|.$$

Par conséquent, en reprenant (0.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \zeta, f_\epsilon(x)\rangle &\leq \sum_{i\in I(x)} [-\mu\|\zeta_i\| + \|\zeta - \zeta_i\|\|v_i\|] \\
&\leq \sum_{i\in I(x)} [-\mu(\|\zeta\| - \lambda(\epsilon)) + M\lambda(\epsilon)] \\
&\leq -\mu + \mu\lambda(\epsilon) + M\lambda(\epsilon).
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant une bonne constante $\lambda(\epsilon)$, on peut supposer que la propriété (0.12) est vérifiée.
Maintenant par le résultat d'invariance de Clarke, Ledyaev, Stern et Wolenski cité plus haut, le système $\dot{x} = f_\epsilon(x)$ rend S invariant et donc le théorème 0.2 implique l'existence d'un $x_\epsilon \in S$ tel que $f_\epsilon(x_\epsilon) = 0$.

Par ailleurs, par construction des f_i, on a pour tout $x \in S$ que si i et j sont dans $I(x)$, alors

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - x\| + \|x - x_j\| \leq \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_j}{2}.$$

Donc si on fixe $k \in I(x)$ tel que

$$\delta_k = \max_{i\in I(x)} \delta_i,$$

on obtient

$$\forall i \in I(x), x_i \in B(x_k, \delta_k).$$

Par conséquent, d'après la propriété (0.10) :

$$v_i \in F(x_i) \subset F(B(x_k, \delta_k)) \subset F(x_k) + \epsilon B.$$

On en déduit finalement, par convéxité de $F(x_k) + \epsilon B$, que

$$f_\epsilon(x) \in F(x_k) + \epsilon B.$$

Finalement, on a construit pour chaque ϵ, un élément x_ϵ de S pour lequel il existe $y_\epsilon \in S$ tel que

$$\|x_\epsilon - y_\epsilon\| \leq \epsilon \text{ et } 0 = f_\epsilon(x_\epsilon) \in F(y_\epsilon) + \epsilon B.$$

On conclut par compacité de S. □

Passons à la preuve du théorème principal.

Preuve. D'après la remarque 4.2 du chapitre 2, on peut associer une fonction de Lyapunov lisse à l'inclusion différentielle $\dot{x} \in F(x)$. Ainsi, on obtient une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive, propre, C^∞ et qui vérifie

$$\forall x \neq 0, \forall v \in F(x), \langle \nabla V(x), v \rangle < 0. \tag{0.14}$$

Posons maintenant

$$m_\gamma := \min_{x \notin \gamma B} \{V(x)\}.$$

On peut considérer l'ensemble de niveau

$$S = S_V(\frac{m_\gamma}{2}) := \left\{ x : V(x) \leq \frac{m_\gamma}{2} \right\};$$

cet ensemble est contenu dans la boule γB. Par ailleurs, comme le gradient de V ne s'annule jamais hors de l'origine, le théorème de Lyapunov implique que l'équation différentielle $\dot{x} = -\nabla V(x)$ est GAS. Ainsi, on peut démontrer en considérant le flot de cette dynamique, que l'ensemble S est un rétract de la boule de $\mathbb{R}^n$ et donc qu'il vérifie la propriété du point fixe. En outre, comme le gradient de V coïncide avec le cône normal de Clarke au bord de l'ensemble (le bord est en fait une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$), la propriété (0.14) implique que

$$\forall x \in S, \forall \zeta \in N_S^C(x), \forall v \in F(x), \langle \zeta, v \rangle \leq -\mu \|\zeta\|, \tag{0.15}$$

pour un certain $\mu > 0$.
Maintenant, si l'on considère l'application multivaluée F_p définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, F_p(x) := F(x) - p,$$

où p est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|p\| \leq \frac{\mu}{2}$, elle vérifie la propriété (0.15) avec $\mu = \frac{\mu}{2}$. Par conséquent, en appliquant le lemme, pour tout $p \in \frac{\mu}{2} B$, il existe $x_p \in S$ tel que

$$F_p(x_p) = F(x_p) - p = 0.$$

Le théorème 0.1 est démontré. □

Remarque 0.4. Nous invitons le lecteur à aller consulter l'article de Wilson [**85**] pour une étude détaillée et intéressante des ensembles de niveau des fonctions de Lyapunov lisses.

Bibliographie

[1] G. Alberti, L. Ambrosio, and P. Cannarsa. On the singularities of convex functions. *Manuscripta Math.*, 76(3-4):421–435, 1992.

[2] F. Ancona and A. Bressan. Patchy vector fields and asymptotic stabilization. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4:445–471 (electronic), 1999.

[3] L. Ambrosio, P. Cannarsa, and H. M. Soner. On the propagation of singularities of semi-convex functions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 20(4):597–616, 1993.

[4] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis TMA*, 7:1163–1173, 1983.

[5] A. Astolfi. Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems Control Lett.*, 27(1):37–45, 1996.

[6] J-P. Aubin. *Viability theory*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.

[7] J.P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, 1984.

[8] J.P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Birkhäuser, 1990.

[9] A. Bacciotti. *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*. World Scientific, 1992.

[10] A. Bacciotti and L. Rosier. Lyapunov and Lagrange stability: inverse theorems for discontinuous systems. *Math. Control Signals Systems*, 11:101–128, 1998.

[11] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[12] A.M. Bloch and S. Drakunov. Stabilization and tracking in the nonholonomic integrator via sliding modes. *Systems Control Lett.*, 29(2):91–99, 1996.

[13] R.W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhäuser, Boston, 1983.

[14] C.I. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems Control Lett.*, 12(5):437–442, 1989.

[15] P. Cannarsa and C. Sinestrari. Convexity properties of the minimum time function. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 3(3):273–298, 1995.

[16] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1983. Republished as vol.5 of *Classics in Applied Mathematics*, SIAM, 1990.

[17] F.H. Clarke and Yu.S. Ledyaev. Mean value inequalities in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 344:307–324, 1994.

[18] F. H. Clarke and Yu. S. Ledyaev. Mean value inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(4):1075–1083, 1994.

[19] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, L. Rifford, and R.J. Stern. Feedback stabilization and Lyapunov functions. To appear in SIAM J. Control and Optim.

[20] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, and R. J. Stern. Complements, approximations, smoothings and invariance properties. *J. Convex Anal.*, 4(2):189–219, 1997.

[21] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, and A.I. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *I.E.E.E. Trans. Aut. Control*, 42:1394–1407, 1997.

[22] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, and R.J. Stern. Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *J. Differential Equations*, 149:69–114, 1998.

[23] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. Qualitative properties of trajectories of control systems: a survey. *J. Dyn. Control Sys.*, 1:1–48, 1995.

[24] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 178. Springer-Verlag, New York, 1998.

[25] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, and A.I. Subbotin. The synthesis of universal pursuit strategies in differential games. *SIAM J. Control and Optim.*, 35:552–561, 1997.

[26] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, and P. R. Wolenski. Proximal analysis and minimization principles. *J. Math. Anal. Appl.*, 196(2):722–735, 1995.

[27] F.H. Clarke, L. Rifford, and R.J. Stern. Feedback in state constrained control problems. En préparation.

[28] J-M. Coron. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Cont. Sig. Sys.*, 5:295–312, 1992.

[29] J-M. Coron. Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws. *SIAM J. Control and Optim.*, 33:804–833, 1995.

[30] J-M. Coron. On the stabilization of some nonlinear control systems: results, tools, and applications. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 307–367. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[31] J-M. Coron. Some open problems in control theory. In *Differential geometry and control (Boulder, CO, 1997)*, pages 149–162. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[32] J-M. Coron and L. Rosier. A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization. *J. Math. Syst., Estimation, Control*, 4:67–84, 1994.

[33] J.M. Coron, L. Praly, and A. Teel. Feedback stabilization of nonlinear systems: Sufficient conditions and Lyapunov and input-output techniques. In A. Isidori, editor, *Trends in Control.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[34] J. M. Danskin. *The theory of max-min and its application to weapons allocation problems.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967. Econometrics and Operations Research, Vol. V.

[35] K. Deimling. *Multivalued Differential Equations.* de Gruyter, Berlin, 1992.

[36] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides.* Kluwer Academic Publishers, 1988.

[37] R. Freeman and P.V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design. State-Space and Lyapunov Techniques.* Birkhäuser, 1996.

[38] O. Hájek. Discontinuous differential equations. I, II. *J. Differential Equations*, 32(2):149–170, 171–185, 1979.

[39] H. Hermes. Discontinuous vector fields and feedback control. In J.K. Hale and J.P. LaSalle, editors, *Differential Equations and Dynamic Systems.* Academic Press, New York, 1967.

[40] H. Hermes. Resonance, stabilizing feedback controls, and regularity of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Math. Control Signals Systems*, 9:59–72, 1996.

[41] J-B. Hiriart-Urruty. Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes: l'état de la situation vu via l'analyse convexe non lisse. Ann. Sci. Math. Québec, 22(1):47–62, 1998.

[42] J-B. Hiriart-Urruty and C. Imbert. Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(11):1275–1278, 1998.

[43] L. Hörmander. *Notions of convexity.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[44] A. Isidori. *Nonlinear control systems.* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.

[45] N. N. Krasovskiĭ. *Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay.* Stanford University Press, Stanford, Calif., 1963. Translated by J. L. Brenner.

[46] N. N. Krasovskiĭ and A. I. Subbotin. *Game-theoretical control problems.* Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the Russian by Samuel Kotz.

[47] N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin. *Game-theoretical control problems.* Springer-Verlag, New York, 1988.

[48] S. N. Kružkov. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations of eikonal type I. *Math. USSR-Sb*, 27:406–446, 1975.

[49] J. Kurzweil. On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 24:19–77, 1956.

[50] V. Lakshmikantham, S. Leela, and A. Martynyuk. *Practical Stability of Nonlinear Systems.* World Scientific, Singapore, 1990.

[51] Yu.S. Ledyaev. Discontinuous feedback in nonlinear control. to be submitted, 1999.

[52] Yu.S. Ledyaev and L. Rifford. Robust stabilization of nonholonomic integrator. En préparation.

[53] Yu.S. Ledyaev and E.D. Sontag. A notion of discontinuous feedback. in *Control Using Logic-Based Switching* (A.S. Morse, ed.), pp. 97-103, Springer-Verlag, London, 1997.

[54] Yu.S. Ledyaev and E.D. Sontag. Robust hybrid controllers for stabilization of general asymptotically controllable systems. To appear; preliminary version: A remark on robust stabilization of general asymptotically controllable systems, in *Proc. Conf. on Info. Sciences & Systems (CISS 97)*, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, March 1997, pp. 246-251.

[55] Yu.S. Ledyaev and E.D. Sontag. A Lyapunov characterization of robust stabilization. *Nonlinear Anal.*, 37(7, Ser. A: Theory Methods):813–840, 1999.

[56] G. Leitmann. One approach to the control of uncertain dynamical systems. *Appl. Math. Comput.*, 70:261 –272, 1995.

[57] Y. Lin, E.D. Sontag, and Y. Wang. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. *SIAM J. Control and Optim.*, 34:124–160, 1996.

[58] P-L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.

[59] J.L. Massera. Contributions to stability theory. *Ann. of Math. (2)*, 64:182–206, 1956.

[60] E. Michael. Continuous selections. I. *Ann. of Math. (2)*, 63:361–382, 1956.

[61] F. Morgan. *Geometric measure theory.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988. A beginner's guide.

[62] P. Morin, C. Samson, J.-B. Pomet, and Z.-P. Jiang. Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Systems Control Lett.*, 25(5):375–385, 1995.

[63] J-B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems Control Lett.*, 18(2):147–158, 1992.

[64] B. N. Pshenichnyi. *Necessary conditions for an extremum.* Marcel Dekker Inc., New York, 1971. Translated from the Russian by Karol Makowski. Translation edited by Lucien W. Neustadt. Pure and Applied Mathematics, 4.

[65] L. Rifford. Existence of lipschitz and semiconcave control-Lyapunov functions. A paraître dans SIAM J. Control and Optim.

[66] L. Rifford. Stabilisation des systèmes globalement asymptotiquement commandables. A paraître dans les Compte-Rendus de l'Académie des Sciences.

[67] L. Rifford. Théorème d'Artstein non-lisse; application au problème intégrateur. Soumis.

[68] L. Rosier. *Étude de quelques problèmes de stabilisation.* PhD thesis, ENS de Cachan, 1993.

[69] E.P. Ryan. On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback. *S.I.A.M. J. Control Optim.*, 32:1597 –1604, 1994.

[70] H.M. Soner. Optimal control problems with state-space constraints I and II. *S.I.A.M. J. Control Optim.*, 24:551 –561 and 1110 –1122, 1986.

[71] E. D. Sontag. A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems Control Lett.*, 13(2):117–123, 1989.

[72] E.D. Sontag. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. *SIAM J. Control and Optim.*, 21:462–471, 1983.

[73] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory.* Texts in Applied Mathematics, vol.6. Springer-Verlag, New York, 1990. (Second Edition, 1998).

[74] E.D. Sontag. Control of systems without drift via generic loops. *I.E.E.E. Trans. Autom. Control.*, 40:1210 –1219, 1995.

[75] E.D. Sontag. Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances. In *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 551–598. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[76] E.D. Sontag. Clocks and Insensitivity to small measurement errors. Preprint.

[77] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Remarks on continuous feedback. In *Proc. I.E.E.E. Conf. Decision and Control, Albuquerque*, pages 916–921, Piscataway, 1980. IEEE Publications.

[78] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Nonsmooth control-Lyapunov functions. In *Proc. I.E.E.E. Conf. Decision and Control, New Orleans*, pages 61–81, Boston, 1990. Birkhäuser.

[79] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Nonsmooth control-Lyapunov functions. In *Proc. I.E.E.E. Conf. Decision and Control, New Orleans.* IEEE Publications, 1995.

[80] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. General classes of control-Lyapunov functions. In *Stability theory (Ascona, 1995)*, pages 87–96. Birkhäuser, Basel, 1996.

[81] A.I. Subbotin. *Generalized Solutions of First-Order PDEs.* Birkhäuser, Boston, 1995.

[82] H. J. Sussmann. Subanalytic sets and feedback control. *J. Differential Equations*, 31(1):31–52, 1979.

[83] J. Tsinias. A Lyapunov description of stability in control systems. *Nonlinear Analysis TMA*, 13:3–74, 1989.

[84] J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. *Math. Control Signals Systems*, 2(4):343–357, 1989.

[85] F.W. Wilson, Jr. The structure of the level surfaces of a Lyapunov function. *J. Differential Equations*, 3:323–329, 1967.