Courbes auto-contractantes dans les variétés riemanniennes

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis
&
Institut Universitaire de France

10ème Rencontre d'Analyse Mathématique et Applications
Ouargla, Algérie, Février 2015

Champ de gradients

Soit $M = \mathbb{R}^n$ et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ supposée propre ($\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$). On s'intéresse aux orbites positives du champs $-\nabla f$ c'est à dire aux solutions de

$$\dot\gamma(t) = -\nabla f\big(\gamma(t)\big) \qquad t \geq 0.$$

On a pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\left\{f\big(\gamma(t)\big)\right\} = \left\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \dot\gamma(t)\right\rangle = -\left|\nabla f\big(\gamma(t)\big)\right|^2$$

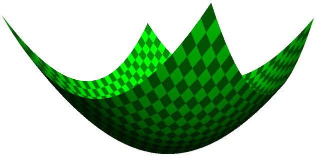
Soit

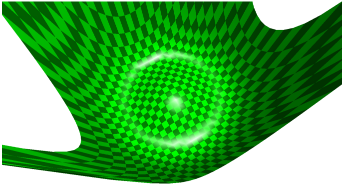
$$\mathcal{E} := \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \nabla f(x) = 0\right\}.$$

Théorème (La Salle)

$$\lim_{t\to+\infty} d\big(\gamma(t), \mathcal{E}\big) = 0.$$

Exemples





Problèmes :

- Limite ?
- Longueur de la courbe $\Gamma = \gamma([0, +\infty))$ finie ou infinie ?

Théorème de Łojasiewicz

Théorème (Łojasiewicz, 1962)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction* **analytique** *telle que* $f(0) = 0$, *si il existe une suite* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tendant vers* $+\infty$ *telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} \gamma(t_k) = 0,$$

alors la courbe $\Gamma = \gamma([0,+\infty[)$ *est de longueur finie et* $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0$.

Conjecture du Gradient de Thom

La limite $\displaystyle \lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ *existe.*

Démontrée par Kurdyka, Mostowski et Parusinski (2000)

Inégalité de Łojasiewicz

Théorème (Inégalité de Łojasiewicz)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$, alors il existe $c > 0$, $\rho \in]0,1[$ et U un voisinage de 0 tel que

$$|\nabla f(x)| \geq c\,|f(x)|^\rho \qquad \forall x \in U.$$

Preuve de long$(\Gamma) < \infty$ **:**

$$\frac{d}{dt}\left\{f\big(\gamma(t)\big)\right\} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle = -\left|\nabla f(\gamma(t))\right|^2$$

Donc si $\gamma(t) \in U$, alors on a

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left\{f\big(\gamma(t)\big)\right\} \leq -c\,\left|\nabla f\big(\gamma(t)\big)\right|\,\left|f(\gamma(t))\right|^\rho$$

$$\Longrightarrow \quad \left|\nabla f\big(\gamma(t)\big)\right| \leq \frac{-1}{c(1-\rho)}\,\frac{d}{dt}\left\{f\big(\gamma(t)\big)^{1-\rho}\right\}$$

Preuve (suite)

Donc on a pour tout $T \geq t_k$ tel que $\gamma([t_k, T]) \in U$,

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^{T} \left|\nabla f\left(\gamma(t)\right)\right| \, dt &\leq \frac{1}{c(1-\rho)} \left[f\left(\gamma(t_k)\right)^{1-\rho} - f\left(\gamma(T)\right)^{1-\rho} \right] \\ &\leq \frac{1}{c(1-\rho)} f(\gamma(t_k))^{1-\rho}.\end{aligned}$$

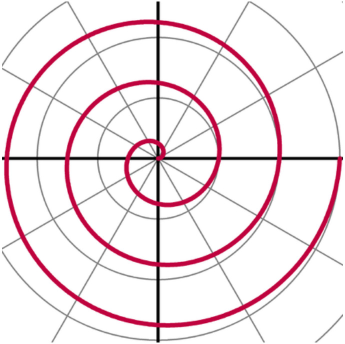
En conclusion:

- Si $\gamma(t_k)$ est très proche de 0 alors on ne pourra pas ressortir de U ;
- La courbe Γ est de longueur finie ;
- $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$.

$\square$

Le cas lisse

Le théorème de Łojasiewicz est faux dans le cas C^∞ !!
On part d'une spirale de longueur infinie ($r = g(\theta)$)



Par le théorème d'extension de Whitney, on trouve une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que la spirale est une orbite de $-\alpha(x)\nabla f(x)$ ($\alpha > 0$).

Le cas convexe

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, **convexe**, propre.
L'inégalité de Łojasiewicz est fausse pour les fonctions convexes (ainsi que la conjecture de Thom).
Soit $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ une solution de

$$\dot{\gamma}(t) = -\nabla f\big(\gamma(t)\big) \qquad t \geq 0.$$

Lemma

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $s \in [0, t] \mapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$ est décroissante.

Preuve du lemme : On a pour tous $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} |\gamma(s) - \gamma(t)|^2 &= 2\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) - \gamma(t) \rangle \\ &= \langle \nabla f\big(\gamma(s)\big), \gamma(t) - \gamma(s) \rangle. \end{aligned}$$

Courbes auto-contractantes

Si $s \in [0,t]$, $\gamma(t)$ appartient au sous-ensemble de niveau $\{f \leq f(\gamma(s))\}$ et par convexité :

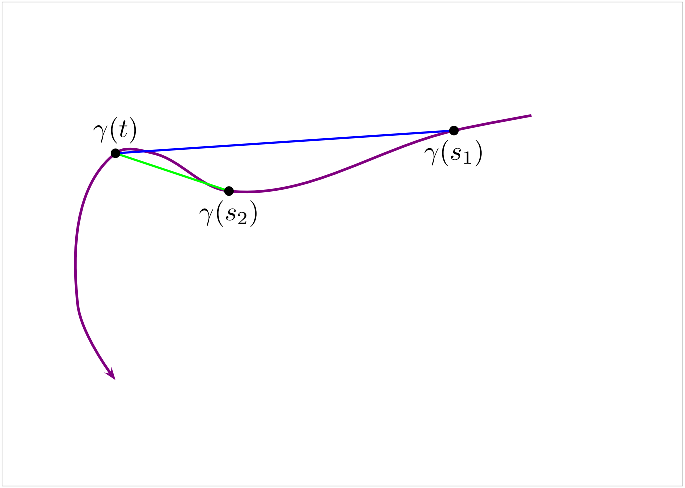
Definition (Daniilidis, Ley, Sabourau)

Soit $I = [0,b) \subset \mathbb{R}$, une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est dite auto-contractante si pour tout $t \in I$, la fonction

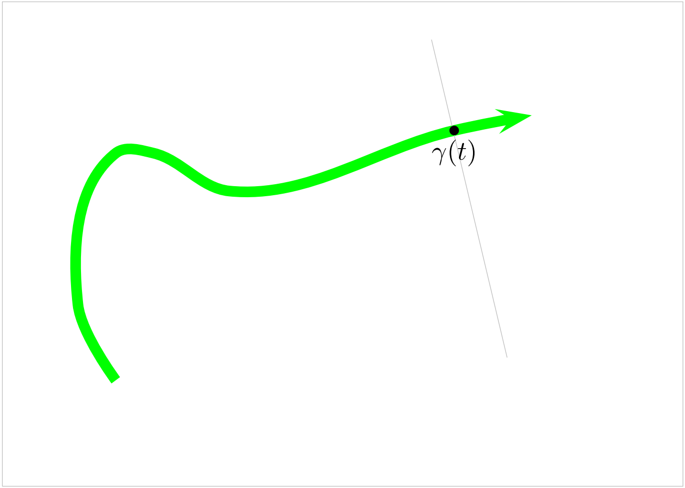
$$s \in [0,t] \longmapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$$

est décroissante.

Courbes auto-contractantes



Serpent à lunettes auto-phobique



Courbes auto-contractantes

Remarque

Toute courbe associée à une fonction quasiconvexe lisse ou a un feuilletage convexe lisse est auto-contractante.

Remarque

Une courbe auto-contractante n'est pas forcément continue.

Théorème (David, Daniilidis, Durand-Cartagena, Lemenant)

Soit $I=[0,b) \subset \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ contenue dans une boule de rayon $R>0$. Alors

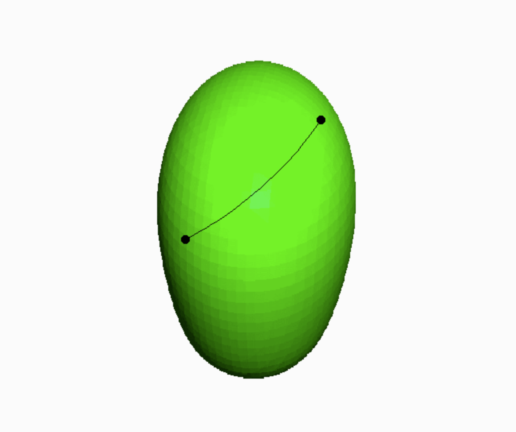
$$long(\Gamma) \leq C_n \, R,$$

(où C_n est une constante ne dépendant que de la dimension n).

D'après une idée de Manselli-Pucci (1991).

Le cas riemannien

Soit M une variété lisse connexe de dimension n équipée d'une métrique riemannienne g (complète). Pour tout $x, y \in M$, on définit la **distance géodésique** entre x et y, notée $d^g(x, y)$, comme le minimum des longueurs des courbes joignant x à y.



Le théorème riemannien

Definition

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$, une courbe $\gamma : I \to M$ est dite auto-contractante si pour tout $t \in I$, la fonction

$$s \in [0, t] \longmapsto d^g\big(\gamma(s), \gamma(t)\big)$$

est décroissante.

Théorème (Daniilidis, Deville, Durand-Cartagena, R)

Soit $I = [0, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{K} \subset M$ un ensemble compact et $\gamma : I \to \mathcal{K}$ une courbe auto-contractante, alors l'ensemble $\Gamma = \gamma(I)$ est rectifiable de longueur finie.

Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ une courbe auto-contractante contenue dans la boule $B(0,R)$ **supposée lisse**.
On définit pour tout $t \geq 0$,

$$\Gamma(t) := \{\gamma(s) \,|\, s \geq t\}.$$

Lemma

Pour tout $t \geq 0$, pour tous $z, z' \in \Gamma(t)$, on a

$$\langle z - \gamma(t), z' - \gamma(t) \rangle \geq 0.$$

Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$

Preuve du lemme : On a par hypothèse ($z' > z$)

$$|z - z'|^2 \leq |\gamma(t) - z'|^2 .$$

Par conséquent

$$|z - \gamma(t)|^2 + |\gamma(t) - z'|^2 + 2\langle z - \gamma(t), \gamma(t) - z'\rangle \leq |\gamma(t) - z'|^2$$

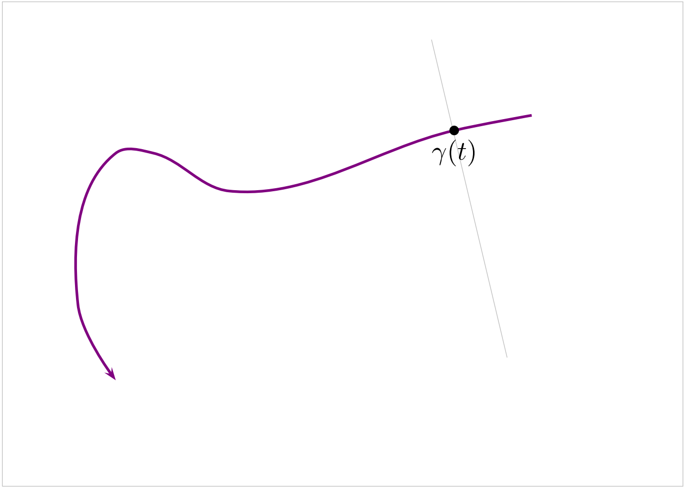
$$\Longrightarrow \quad 2\langle \gamma(t) - z, \gamma(t) - z'\rangle \geq |z - \gamma(t)|^2 \geq 0.$$

$\square$

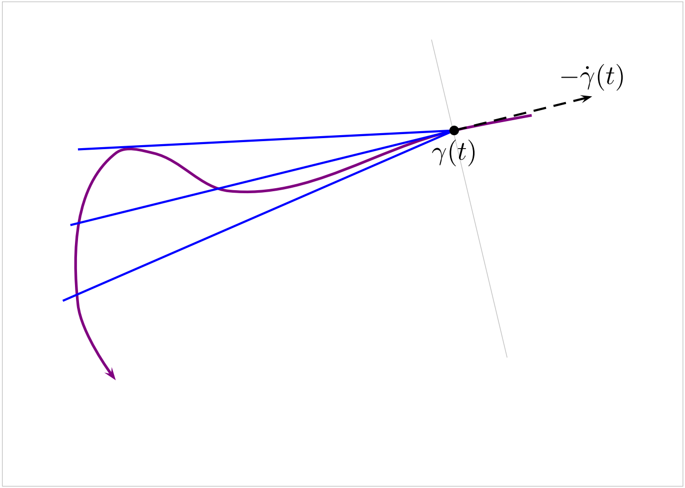
Remarque

Si un cône dans $\mathbb{R}^n$ contient des vitesses ayant deux à deux un produit scalaire ≥ 0, alors il est pointu !!!

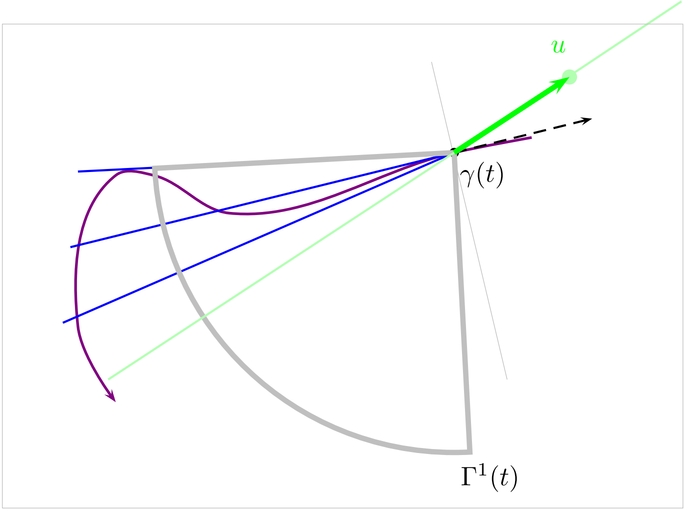
Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$



Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$



Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$



Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$

- Pour tout $t \geq 0$, il existe $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que
$$\langle u, -\dot{\gamma}(t)\rangle \geq 1/10 \quad \text{et} \quad \langle u, \Gamma^1(t)\rangle \leq -1/10.$$
- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe fixé. Pour tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ la **projection orthogonale** $P_u(K)$ de K sur la droite $\mathbb{R}u$ est intervalle compact de longueur $\mathcal{L}^1\big(P_u(K)\big)$.
- Par conséquent, la fonction **largeur moyenne** de $\overline{\Gamma(t)}$ définie par
$$W(t) = \frac{1}{\sigma_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{L}^1\left(P_u\left(\overline{\Gamma(t)}\right)\right)\, du.$$
a une dérivée $\leq -c < 0$.
- Mais $W > 0$ et $W(+\infty) < R$!!!!

Idée de preuve dans $\mathbb{R}^n$

- Pour tout $t \geq 0$, il existe $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que
$$\langle u, -\dot{\gamma}(t)\rangle \geq 1/10 \quad \text{et} \quad \langle u, \Gamma^1(t)\rangle \leq -1/10.$$
- Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe fixé. Pour tout vecteur unitaire $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ la **projection orthogonale** $P_u(K)$ de K sur la droite $\mathbb{R}u$ est intervalle compact de longueur $\mathcal{L}^1\big(P_u(K)\big)$.
- Par conséquent, la fonction **largeur moyenne** de $\overline{\Gamma(t)}$ définie par
$$W(t) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{L}^1\left(P_u\left(\overline{\Gamma(t)}\right)\right)\, du.$$
a une dérivée $\leq -c < 0$.
- Mais $W \geq 0$ et $W(+\infty) < R$!!!!

Le cas riemannien

- On a passé sous le tapis de nombreux détails techniques.
- Dans (M, g), on ne peut pas adapter la notion de largeur moyenne. **Il faut localiser !!!**
- Celà revient à étudier des serpents auto-phobiques sans lunettes avec oeillères.

Merci pour votre attention !!