À PROPOS DES SPHÈRES SOUS-RIEMANNIENNES

L. RIFFORD

Abstract. Nous démontrons qu'en l'absence de courbe minimisante singulilère, la fonction distance sous-riemannienne, localement lipschitzienne hors de la diagonale, vérifie un théorème de Sard. On en déduit que les sphères sous-riemanniennes sont des hypersurfaces lipschitziennes pour presque tout rayon dans $d_{SR}(q_0, Q)$.

Abstract. We prove that, in absence of singular minimizing curve, the sub-riemannian distance function is locally Lipschitz outside the diagonal and satisfies Sard's theorem. Hence we deduce that the spheres are Lipschitz hypersurfaces for almost every radius in $d_{SR}(q_0, Q)$.

1. Introduction

Nous avons démontré récemment dans [6] que pour toute variété riemannienne lisse et tout point fixé sur celle-ci, presque toutes les sphères géodésiques centrées en ce point sont des hypersurfaces lipschitziennes de la variété ; l'objectif de cette note est de montrer que, sous de bonnes hypothèses, ce résultat reste vrai dans le cas sous-riemannien.

2. Préliminaires

Pour tout complément sur les notions introduites dans ces préliminaires, on renvoie le lecteur aux deux textes [4] et [5].

2.1. **Structures sous-riemanniennes.** Soit Q une variété connexe C^∞ de dimension n. Une structure sous-riemannienne sur Q correspond à la donnée d'un couple $(\mathcal{D}, g)$, où $\mathcal{D}$ est une distribution satisfaisant la condition du rang, et où g est une métrique riemannienne sur $\mathcal{D}$.

On rappelle qu'une distribution sur Q est un sous-fibré vectoriel de classe C^∞ de TQ, et que celle-ci satisfait la condition du rang si, pour tout $q \in Q$,

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{D})[q] = T_q Q.$$

2.2. **Courbes horizontales.** Une courbe horizontale (sur $[0,1]$) est une courbe absolument continue $\gamma : [0,1] \to Q$ telle que pour presque tout $t \in [0,1], \dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}[\gamma(t)]$. Pour chaque point q_0 fixé dans Q, l'ensemble des courbes horizontales γ valant q_0 pour $t = 0$ et dont la norme L^2, définie par

$$\|\gamma\|_2^{g,q_0} := \sqrt{\int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt}$$

est finie, est une variété hilbertienne de classe C^∞ ; on la note Ω_{q_0}.

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France (Courriel: ludovic.rifford@math.u-psud.fr).

2.3. **L'application entrée-sortie $E^{q_0,1}$.** On appelle application entrée-sortie au point q_0 et en temps 1, l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} E^{q_0,1} : \Omega_{q_0} & \longrightarrow & Q \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(1). \end{array}$$

Cette application est de classe C^∞ sur Ω_{q_0}. Le théorème de Chow-Rashevsky peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 2.1. *Si $\mathcal{D}$ est une distribution satisfaisant la condition du rang, alors pour tout $q_0 \in Q$, l'application $E^{q_0,1}$ est ouverte.*

Il n'est pas difficile de déduire de ce résultat que si la distribution $\mathcal{D}$ satisfait la condition du rang, alors pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q, il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ telle que $\gamma(0) = q_0$ et $\gamma(1) = q_1$.

Une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ sera dite singulière s'il s'agit un point critique de l'application entrée-sortie $E^{q_0,1}$, c'est à dire si l'application linéaire $T_\gamma E^{q_0,1} : T_\gamma \Omega_{q_0} \to T_{\gamma(1)} Q$ n'est pas surjective.

2.4. **La distance sous-riemannienne $d_{SR}(\cdot,\cdot)$.** La longueur d'une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ est donnée par

$$\mathrm{long}_{SR}(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt \quad (\leq \|\gamma\|_2^{g,q_0} < \infty).$$

Pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q, on définit la distance sous-riemannienne de q_0 à q_1 comme étant l'infimum des longueurs des courbes horizontales appartenant à Ω_{q_0} et valant q_1 pour $t = 1$; on la note $d_{SR}(q_0, q_1)$. D'après le théorème de Chow-Rashevsky, si la distribution $\mathcal{D}$ satisfait la condition du rang, alors la distance est bien-définie et continue sur $Q \times Q$. Dans ce cas, la topologie définie par la distance sous-riemannienne sur Q coincide avec la topologie de départ sur Q. De plus, si Q munie de cette distance définit un espace complet, alors pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{q_0}$ reliant q_0 à q_1 telle que $\mathrm{long}_{SR}(\gamma) = d_{SR}(q_0, q_1)$; une telle courbe est dite minimisante.

On suppose à partir de maintenant que la variété Q est munie d'une structure sous-riemannienne $(\mathcal{D}, g)$, qu'elle est complète pour la distance sous-riemanienne associée, et qu'aucune courbe minimisante non triviale n'est singulière.

2.5. **L'application exponentielle $\exp_{q_0}$.** En fait, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les courbes minimisantes paramétrées par la longueur sont exactement les courbes qui minimisent la norme L^2. Donc si, pour tout couple de points (q_0, q_1) dans Q, on note par $e_{SR}(q_0, q_1)$ l'infimum des carrés des normes L^2 des courbes horizontales reliant q_0 et q_1, on a $d_{SR}(\cdot,\cdot) = \sqrt{e_{SR}(\cdot,\cdot)}$.

Comme on suppose qu'il n'y a pas de singulière minimisante, toute courbe minimisant la norme L^2 est la projection d'une extrémale du champ hamiltonien $\overrightarrow{H}$ de $H = \frac{1}{2} g^*$, où g^* est la cométrique de g. Ainsi il existe un ouvert $\mathcal{P}$ de $T^*_{q_0} Q$ tel que pour tout $p_0 \in \mathcal{P}$ l'extrémale du champ hamiltonien $\overrightarrow{H}$ avec condition initiale (q_0, p_0) est définie sur $[0, 1]$ et tel que si l'on note γ_{p_0}

la projection de cette extrémale sur Q, alors on a

$$\forall q \in Q, \quad d_{SR}(q_0, q) = \min \left\{ \|\gamma_{p_0}\|_2^{g,q_0} \text{ pour } p_0 \in \mathcal{P} \right\}.$$

L'application exponentielle $\exp_{q_0} : \mathcal{P} \to Q$ est définie comme étant l'application qui à $p_0 \in \mathcal{P}$ associe $exp_{q_0}(p_0) := \gamma_{p_0}(1)$.

3. Un théorème de Sard pour la distance sous-riemannienne

3.1. **Gradients généralisés de Clarke.** Soit $f : Q \to \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne sur Q. D'après le théorème de Rademacher une telle fonction est presque partout différentiable sur Q, notons D_f l'ensemble des points de Q où f est différentiable. Pour tout $q \in Q$, le gradient généralisé de Clarke de f au point q, noté $\partial f(q)$, est défini de la manière suivante :

$$\partial f(q) := \mathrm{conv} \left\{ \lim_{q' \to q} T_{q'} f \text{ où } q' \in D_f \right\}.$$

Par construction, pour tout $q \in Q$, l'ensemble $\partial f(q)$ est un convexe compact non-vide de $T_q^* Q$. On appelle point critique de f tout point de Q tel que $0 \in \partial f(q)$ et on note C_f l'ensemble des points critiques de f dans Q. D'après le théorème des fonctions implicites "non-lisse", si q n'est pas un point critique de f alors l'ensemble de niveau $\{q' \in Q \text{ tel que } f(q') = f(q)\}$ est localement une hypersurface lipschizienne de Q. On renvoie le lecteur au livre [3] pour une étude détaillee du gradient généralisé de Clarke.

Pour finir, nous dirons que $f : Q \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne vérifie le théorème de Sard si l'ensemble $f(C_f)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$.

3.2. **Énoncé du théorème.**

Théorème 3.1. *Soit Q une variété connexe C^∞ de dimension n munie d'une structure sous-riemannienne $(\mathcal{D}, g)$ pour laquelle elle est complète, et q_0 un point fixé dans Q. Si aucune courbe minimisante issue de q_0 n'est singulière, alors la fonction $d_{SR}(q_0, \cdot)$ est localement lipschitzienne sur $Q \setminus \{q_0\}$ et vérifie le théorème de Sard.*

Par le théorème des fonctions implicites cité plus haut on obtient comme corollaire que, sous les mêmes hypothèses, pour presque tout $r \in d_{SR}(q_0, Q)$ la sphère sous-riemannienne $S_{SR}(q_0, r)$ (c'est à dire l'ensemble des $q \in Q$ tels que $d_{SR}(q_0, q) = r$) est une hypersurface lipschitzienne de Q.

3.3. **Preuve du théorème 3.1.** Le théorème 3.1 est en fait la conséquence du résultat suivant, corollaire de [6, Theorem 3].

Lemme 3.2. *Soit $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (resp. de $\mathbb{R}^n$). Soit $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ une submersion de classe C^∞ et $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Soit $\Phi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathcal{W}, \quad \Phi(x) := \inf \left\{ g(v) \text{ avec } v \in \mathcal{V} \text{ tel que } f(v) = x \right\}.$$

Si pour tout $x \in \mathcal{W}$ il existe un voisinage $\mathcal{W}_x$ de x (dans $\mathcal{W}$) et un compact K_x de $\mathcal{V}$ tel que pour tout $x' \in \mathcal{W}_x$ l'infimum dans la définition de $\Phi(x')$ est atteint sur K_x, alors l'application Φ est localement lipschitzienne sur $\mathcal{W}$ et vérifie le théorème de Sard.

Soit K un sous-ensemble compact de $Q \setminus \{q_0\}$. Appelons $\mathcal{K}$ l'ensemble des $p_0 \in \mathcal{P}$ tels que $\exp_{q_0}(p_0) = q$ et $\|\gamma_{p_0}\|_2^{g,q_0} = d_{SR}(q_0,q)$ pour un certain q dans K. Sous les hypothèses du théorème, il est facile de démontrer que l'ensemble $\mathcal{K}$ est un compact non-vide (voir par exemple [7]).

Quitte à restreindre l'ensemble K et à passer en coordonnées locales le long de chaque courbe minimisante joignant q_0 à un point de K, on peut supposer qu'il existe m champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$ tels que $\mathcal{D}[q] = \mathrm{vect}\{X_1(q), \cdots, X_m(q)\}$ pour tout $q \in Q$. En outre, on peut également supposer que la famille $\{X_1, \cdots, X_m\}$ est orthonormée pour la métrique g et que chaque champ X_i est complet. Ainsi chaque courbe horizontale $\gamma \in \Omega_{q_0}$ s'associe de manière unique à un contrôle $u \in L^2([0,1];\mathbb{R}^m)$ tel que $\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)X_i(t)$ pour presque tout $t \in [0,1]$; ce qui nous permet dorénavant de confondre courbes horizontales et contrôles L^2.
Soit $p_0 \in \mathcal{K}$; appelons u^{p_0} le contrôle associé à la courbe horizontale γ_{p_0}. Par hypothèse, il existe $v_1^{p_0}, \cdots, v_n^{p_0}$ dans L^2 tels que l'application linéaire $T_{u^{p_0}}E^{q_0,1} : \mathrm{Vect}\{v_1^{p_0}, \cdots, v_n^{p_0}\} \to T_{\exp_{q_0}(p_0)}Q$ est surjective. De plus, comme l'application $E^{q_0,1}$ est de classe C^1, il existe $\epsilon_{p_0} > 0$ tel que $T_uE^{q_0,1} : \mathrm{Vect}\{v_1^{p_0}, \cdots, v_n^{p_0}\} \to T_{E^{q_0,1}(u)}Q$ est surjective pour tout $u \in L^2$ vérifiant $\|u - u^{p_0}\|_2 < \epsilon_{p_0}$. Par ailleurs, comme l'application $p_0 \mapsto u^{p_0}$ est continue, il existe $\mu_{p_0} > 0$ tel que $\|u^{p_0'} - u^{p_0}\|_2 < \epsilon_{p_0}/2$, pour tout $p_0' \in B(p_0, \mu_{p_0})\mathcal{P}$. Par compacité de $\mathcal{K}$, il existe un entier N et $p_0^1, \cdots, p_0^N \in \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{K} \subset \cup_{k=1}^N B(p_0^k, \mu_{p_0^k})$. Posons $\mathcal{Z} := (\mathbb{R}^n)^N \times \mathcal{P}$ et définissons l'application $U : \mathcal{Z} \to L^2$ par

$$U(q_1^{p_0^1}, \cdots, q_n^{p_0^1}, \cdots, q_1^{p_0^N}, \cdots, q_n^{p_0^N}, p_0) := \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n q_j^{p_0^k} v_j^{p_0^k} + u^{p_0}.$$

Par construction, on a

$$e_{SR}(q_0,q) = \inf\{\|U(Z)\|_2^2 \text{ avec } Z \in \mathcal{Z} \text{ tel que } E^{q_0,1}(U(Z)) = q\}.$$

Quitte à changer les $v_j^{p_0^k}$ (par exemple de manière à ce qu'il existe des temps distincts $t_{j,k}$ dans $[0,1]$ tels que chaque $v_j^{p_0^k}$ est C^∞ sur $[0,1] \setminus \{t_{j,k}\}$ et non différentiable en $t_{j,k}$), on a que pour tout $q \in K$ l'infimum dans la formule ci-dessus est forcément atteint pour $Z \in \{0_{nN}\} \times \mathcal{K}$. Donc si l'on pose

$$V := \max\left\{\|v_j^{p_0^k}\|_2 \text{ pour } j = 1, \cdots, n \text{ et } k = 1, \cdots, N\right\} \text{ et } \epsilon := \min_{k=1,\cdots,N} \epsilon_{p_0^k},$$

et si l'on note par $\mathcal{V}$ l'ouvert de $\mathcal{Z}$ constitué des couples (q, p_0) tels que $|q_j^{p_0^k}| < \frac{\epsilon}{2nNV}$ pour tout $j = 1, \cdots, n$ et $k = 1, \cdots, N$, et tels que $p_0 \in \cup_{k=1}^N B(p_0^k, \mu_{p_0^k})$, alors l'application $E^{q_0,1} \circ U$ est une submersion de classe C^∞ sur $\mathcal{V}$ qui contient l'ensemble $\{0_{nN}\} \times \mathcal{K}$. On peut donc appliquer le lemme 3.2.

4. Remarques

En fait, Baryshnikov a demontré (sous des hypothèses un peu plus fortes) dans [1] que les petites sphères sous-riemaniennes sont homéomorphes à la sphere euclidienne de dimension n. Par ailleurs, le résultat obtenu ici dans le cas de la fonction distance peut très bien se démontré pour d'autres types de fonctions valeurs (voir [2]).

References

[1] Yu. Baryshnikov. On small Carnot-Carathéodory spheres. *Geom. Funct. Anal.*, 10(2):259–265, 2000.

[2] P. Cannarsa and L. Rifford. Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls. En préparation.

[3] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, and P.R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 178. Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] I. Kupka. Géométrie sous-riemannienne. *Astérisque*, (241):Exp. No. 817, 5, 351–380, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.

[5] R. Montgomery, A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications, Math. Surveys and Monographs 91, American Math. Soc., Providence, 2002.

[6] L. Rifford. A Morse-Sard theorem for the distance function on Riemannian manifolds. *Manuscripta Math.*, 113:251–265, 2004.

[7] E. Trélat. Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost. *J. Dynam. Control Systems*, 6(4):511–541, 2000.