From the Poincaré "lignes de partage" to the convex earth theorem

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis
&
Institut Universitaire de France

The 1905 Poincaré paper in TAMS

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES CONVEXES*

PAR

HENRI POINCARÉ

§1. *Introduction.*

Dans mes *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* j'ai étudié les particularités des solutions du problème des trois corps et en particulier des solutions périodiques et asymptotiques. Il suffit de se reporter à ce que j'ai écrit à ce sujet pour comprendre l'extrême complexité de ce problème ; à côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où on rencontrerait cette difficulté principale, mais où on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique ; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle ; dans le problème des lignes géodésiques en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une des données de la question.

The 1905 Poincaré paper in TAMS

M. Hadamard l'a bien compris, et c'est ce qui l'a déterminé à étudier les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées ; il a donné une solution complète de ce problème dans un memoire du plus haut intérêt. Mais ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables, c'est au contraire aux géodésiques des surfaces convexes.

J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; malheureusement le problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par M. Hadamard. J'ai donc dû me borner à quelques resultats partiels, relatifs surtout aux géodésiques fermées qui jouent ici le rôle des solutions périodiques du problème des trois corps.

* Presented to the Society at the St. Louis meeting, September 17, 1904. Received for publication January 4, 1905.

ICAS 1904

Commemoration of the centennial of the Louisiana Purchase

International Congress of Arts and Sciences

St. Louis (MI), September 19-24, 1904

Plenary Speakers (Mathematics)

Maxime Bôcher (Harvard Univ.)
James P. Pierpont (Yale Univ.)
Émile Picard (La Sorbonne)
Heinrich Maschke (Univ. Chicago)
Gaston Darboux (Acad. Sci. Paris)
Edward Kasner (Columbia Univ.)
Ludwig Boltzmann (Univ. Vienna)
Henri Poincaré (La Sorbonne)

ICAS 1904

ÉLOGE HISTORIQUE DE

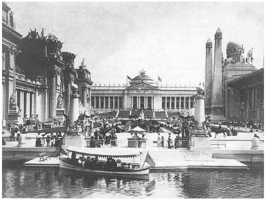
HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE
LU DANS LA SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 15 DÉCEMBRE 1913

PAR

M. GASTON DARBOUX

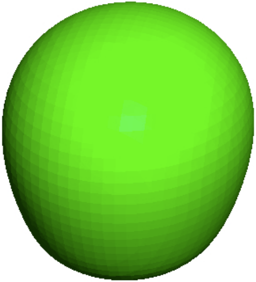
Mais de tous les appels que recevait Poincaré, les plus agréables sans aucun doute étaient ceux qui lui venaient de l'étranger. En 1903, Newcomb, notre illustre Associé étranger, se rendit à Paris pour inviter, au nom du Gouvernement américain, les Savants français à participer au Congrés international d'Art et Science, organisé sur le modèle de l'Institut de France ; ce Congrès devait se tenir à Saint-Louis, l'année suivante, pendant la durée de l'Exposition universelle destinée à célébrer le centenaire de la réunion de la Louisiane aux États-Unis. Plusieurs d'entre nous acceptèrent l'invitation qui leur étaient faite d'une manière si gracieuse. Poincaré fut du nombre et profita de l'occasion qui lui était offerte pour visiter les différentes régions des États-Unis. La Conférence qu'il lut, le 24 septembre 1904, devant le congrès, avait pour titre : L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique.



The 1905 Poincaré paper in TAMS

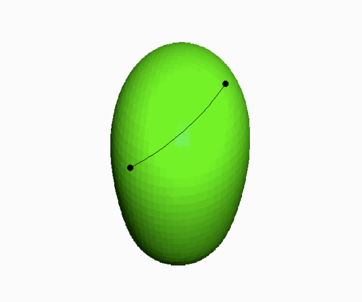
Poincaré is concerned with the "lignes géodésiques" on a **convex analytic surface** whose gaussian curvature κ satisfies

$$0 < L_1 < \kappa < L_2.$$



The 1905 Poincaré paper in TAMS

The **geodesic distance** between P and Q is defined as the minimum of the lengths of the curves (drawn on S) joining P to Q.

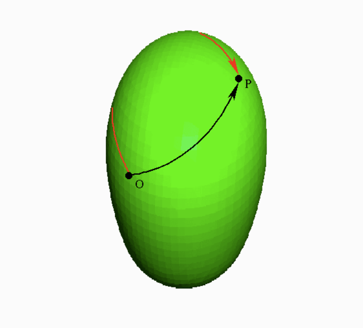


A minimizing curve γ between P and Q parametrized by arc-length is called a **geodesic**. It satisfies

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}S.$$

The 1905 Poincaré paper in TAMS

Soit OM une géodésique quelconque passant par O; on pourra trouver sur cette géodésique un point P, tel que le plus court chemin de O à un point Q situé sur la géodésique OM entre O et P, soit précisément l'arc OQ de cette géodésique OM, mais que cela ne soit plus vrai si le point Q est au delà de P. On dit alors que P est *l'extrémité* du plus court chemin OP.



Le lieu des points qui sont les extrémités de deux on plusieurs plus courts chemins forment un ensemble de lignes que l'on peut appeler *lignes de partage*,

The 1905 Poincaré paper in TAMS

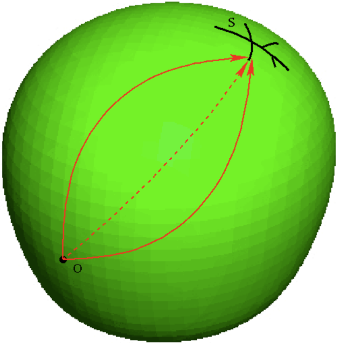
Si un point P partent seulement deux plus courts chemins, par le point P passe une seule ligne de partage dont la tangent est la bissectrice de l'angle formé par les tangentes aux deux plus courts chemins.

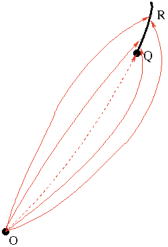
Si du point P partent plus de deux plus courts chemins, au point P aboutissent plusieurs lignes de partage, dont les tangentes sont les bissectrices des angles formés par les tangentes à deux plus courts chemins consécutifs.

L'ensemble des lignes de partage ne divise pas la surface S en deux régions, puisque l'on peut aller du point O à un point quelconque M de la surface sans traverser aucune ligne de partage ; il suffit pour cela d'aller de O en M par le plus court chemin.

L'ensemble des lignes de partage, ou une partie de ces lignes, ne peut donc jamais constituer un polygone fermé ; il formera une sorte de *système rameux*. où les bifurcations seront représentées par les points où aboutissent plus de deux plus courts chemins. Que représenteront alors les extrémités des rameaux ? Supposons que nous suivions une ligne de partage PQR et que le point R soit l'extrémité de cette ligne. Du point Q partiront deux plus courts chemins de même longueur ; quand le point Q ira de P en R, ces deux plus courts chemins varieront d'une manière continue. Au point R ils devront se confondre en un seul.

The 1905 Poincaré paper in TAMS





The cut locus

The **cut locus** from a point O on a given surface S is defined as the union of the Poincaré "lignes de partage" and their "ends", that is the points which are "Poincaré's "extrémité" and conjugate to 0. In other terms

$$\text{cut locus}(O) = \overline{\Big\{\text{lignes de partage}\Big\}}.$$

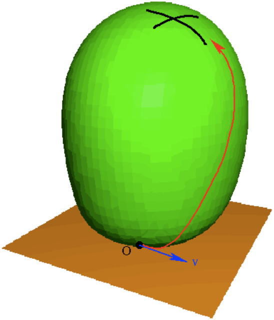
The cut locus has been introduced by Whitehead in 1935. The definition extends to any dimension.

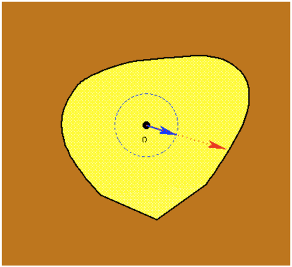
References

- Whitehead "On the covering of a complete space by the geodesics through a point" (1935)
- Myers "Connections between differential geometry and topology I & II" (1935)
- Klingenberg "Contributions to Riemannian geometry in the large" (1959)
- A. Weinstein "The cut locus and conjugate of a riemannian manifold" (1968)
- Thom "Sur le cut-locus d'une variété plongée" (1972)
- Gluck, Singer "The existence of nontriangulable cut loci" (1976)
- Buchner "Simplicial structure of the real analytic cut locus" (1977)
- Wall "Generic properties of generic differentiable manifolds" (1977)
- Yomdin "On the local structure of a generic central set" (1981)
- Mather "Distance from a submanifold in Euclidean space" (1983)
- Itoh, Tanaka "The Lipschitz continuity of the distance function to the cut locus" (2001)
- Itoh, Kiyohara "The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids " (2004)
- Li, Nirenberg "The distance function to the boundary, Finsler geometry, and .." (2005)

The distance to the cut locus

Using the exponential mapping, we can associate to each unit tangent vector its **distance to the cut locus**.

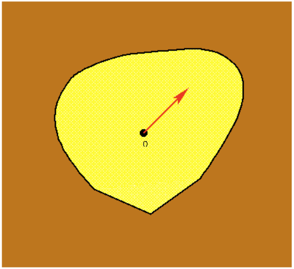


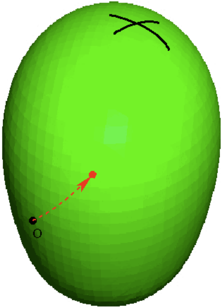


In that way, we define the so-called **injectivity domain** whose boundary is the **tangent cut locus**.

Polar coordinates

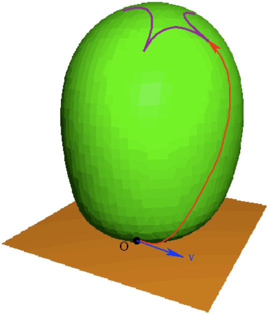
Soit O un point fixe de la surface S. Envisageons une géodésique OM passant par le point O, soit OH une autre géodésique fixe passant par ce même point O, soit v l'angle sous lequel ces deux géodésiques se coupent en O, soit u l'arc OM compté sur le géodésique. Ces deux quantités u et v peuvent être regardées comme des coordonnées définissant la position du point M sur la surface ; ce sont, en quelque sorte, des coordonnées polaires, le point O jouant le rôle du pôle, et la géodésique OH celui de l'axe polaire. Le carré de l'élément

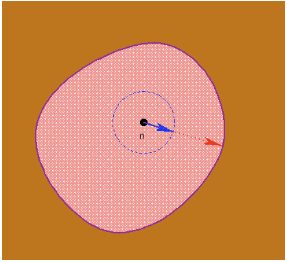




The distance to the conjugate locus

Again, using the exponential mapping, we can associate to each unit tangent vector its **distance to the conjugate locus**.



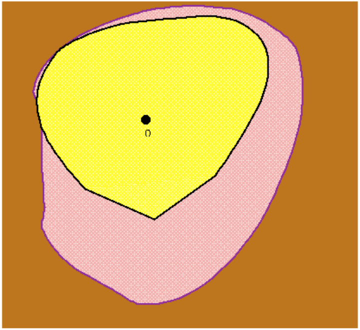


In that way, we define the so-called **nonfocal domain** whose boundary is the **tangent conjugate locus**.

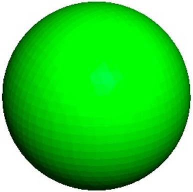
Back to Poincaré

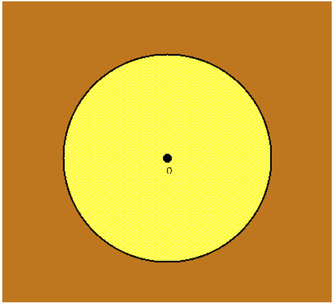
The following inclusion holds

$$\text{injectivity domain} \subset \text{nonfocal domain}.$$

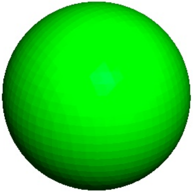


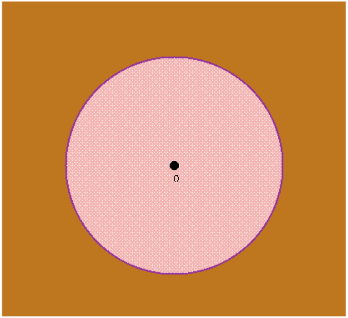
Examples 1: The sphere



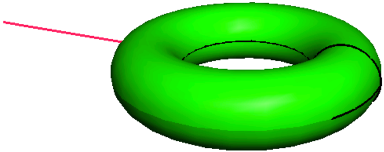


Examples 1: The sphere

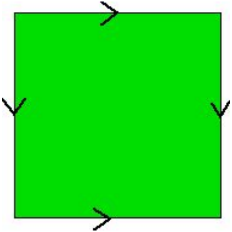


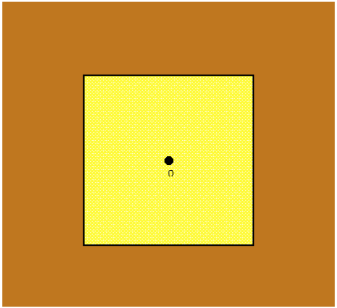


Examples 2: Torus of revolution

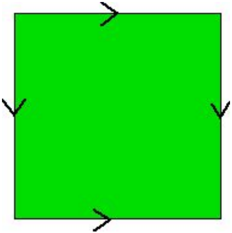


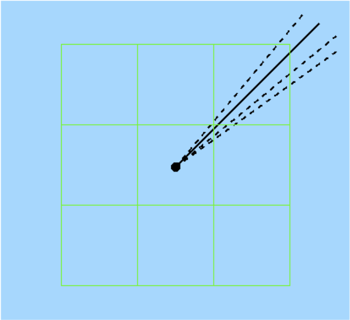
Examples 3: Flat tori





Examples 3: Flat tori





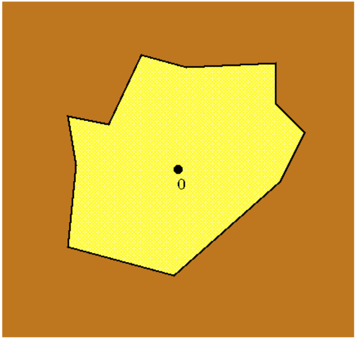
Problems:

- Computation of cut loci
- Size of the cut locus
- Regularity of the cut locus
- Stability under small perturbation

Size and regularity of the cut locus

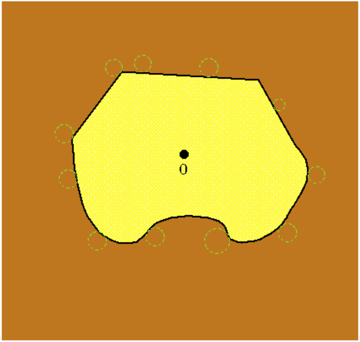
Theorem (Itoh-Tanaka (2001), Li-Nirenberg (2005))

Injectivity domains have Lipschitz boundaries.



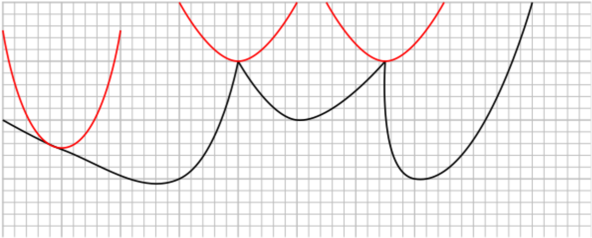
Size and regularity of the cut locus..

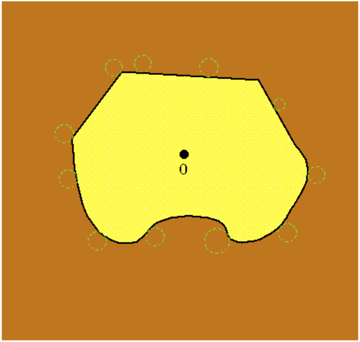
Do cut loci enjoy more regularity properties ?
Curvature bounded from below ?



What happens far from focalization phenomenon

Absence of focalization phenomenon





Good news and bad news

Theorem (Weinstein (1968))

Let M be a compact smooth manifold, not diffeomorphic to $\mathbb{S}^2$, then there is a Riemannian metric on M and a point $p \in M$ for which the tangent conjugate locus and the tangent cut-locus are disjoints.

Theorem (Klingenberg (1961))

Let M be an even-dimensional compact smooth Riemannian manifold with positive sectional curvature. Then there is a point $p \in M$ for which the tangent cut-locus and the tangent conjugate locus intersect.

The result on $\mathbb{S}^2$ goes back to Poincaré.

The convex earth theorem

Thank you for your attention !!