

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI

Centre d'Orsay

Mémoire

présenté pour obtenir le diplôme d'

Habilitation à diriger des recherches

en sciences

Spécialité : Mathématiques

par

Ludovic Rifford

Sujet : Problème de Stabilisation et Géométrie Sous-Riemannienne

Soutenue le 24 octobre 2005 devant le jury composé de :

M. Hedy ATTOUCH	Président du jury
M. Bernard BONNARD	Rapporteur
M. Alberto BRESSAN	Rapporteur
M. Francis CLARKE	Examineur
M. Jean-Michel CORON	Rapporteur
M. Albert FATHI	Examineur
M. Pierre PANSU	Examineur

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à témoigner ma plus profonde gratitude à Francis Clarke et Jean-Michel Coron pour leur soutien constant depuis le début de ma carrière. Ces deux grands mathématiciens font pour moi figure de modèles, autant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Alberto Bressan a consenti à être rapporteur de mon habilitation, je lui en suis très reconnaissant. L'intérêt qu'il a porté à mes travaux depuis le début a été pour moi un encouragement et une source de motivation importants.

Bernard Bonnard a accepté d'être rapporteur de mon habilitation et me fait l'honneur de participer à ce jury, je lui en suis vivement reconnaissant.

La présence dans ce jury de Hedy Attouch, Albert Fathi et Pierre Pansu est à la fois un honneur et un plaisir. Je tiens à les en remercier chaleureusement.

Je tiens à adresser toute ma sympathie et mes remerciements les plus sincères aux membres de l'Institut Girard Desargues (aujourd'hui Institut Camille Jordan) de l'Université Lyon 1 et du Laboratoire de Mathématiques de l'Université d'Orsay au sein desquels j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Je voudrais remercier tout spécialement mon co-bureau, co-auteur et avant tout ami, Emmanuel Trélat, pour toute l'énergie qu'il dépense sans compter dans nos recherches, le séminaire et l'enseignement. Je ne saurais non plus oublier de remercier tout particulièrement Yacine Chitour, Stéphane Labbé, ainsi que tous les membres de l'équipe d'analyse numérique et EDP d'Orsay pour leur compagnie sympathique et chaleureuse.

Pour finir, j'ai une pensée particulière pour ma famille à qui ce travail doit beaucoup, celle-ci inclut deux raisons d'être, Stéphanie, et, celui ou celle à qui elle va donner le jour.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	7
1 Sur le problème de stabilisation en théorie du contrôle	9
1.1 Le problème de stabilisation	9
1.2 Résultats préliminaires	11
1.3 Fonctions de Lyapunov de commande semi-concaves	13
1.4 Feedbacks stabilisants au sens de Carathéodory	14
1.5 Une classification des singularités sur les surfaces	15
1.6 Feedbacks stabilisants de type GAQS	15
1.7 Feedbacks stabilisants répulsifs lisses	17
1.8 Extensions et projets de recherche	19
2 À propos de l'exponentielle et de la distance sous-riemanniennes	21
2.1 Préliminaires	21
2.2 Sur l'image de l'exponentielle sous-riemannienne	23
2.3 À propos des sphères riemanniennes et sous-riemanniennes	23
2.4 Extensions et projets de recherche	25
Bibliographie	27

Introduction

Les pages qui suivent présentent une partie des travaux que j'ai effectués depuis le début de mes recherches en 1997. Ils ont été menés tout d'abord à l'Institut Girard Desargues (aujourd'hui Institut Camille Jordan) de l'université Lyon 1 pendant ma thèse de 1997 à 2000, puis au département de mathématiques pures et appliquées de l'Université de Padoue de 2000 à 2001, puis à partir de septembre 2001 à l'Institut Girard Desargues en tant que maître de conférences, et enfin à partir de septembre 2004 au Laboratoire de Mathématiques de l'Université d'Orsay. Ces travaux sont regroupés en deux parties, la première traitant du problème de stabilisation en théorie du contrôle et la seconde de l'étude de certains problèmes de géométrie sous-riemannienne.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré au problème de stabilisation en théorie du contrôle. Dans un souci de clarté, nous avons choisi de nous restreindre au cas des systèmes commandés affines en la commande et sans dérive ; nous attirons donc l'attention du lecteur sur le fait que certains des résultats présentés ici restent valides dans des cadres beaucoup plus généraux. Après avoir fait quelques rappels fondamentaux portant sur les concepts de systèmes commandés globalement asymptotiquement commandables et de fonctions de Lyapunov, nous présentons à partir de la quatrième section une partie des résultats que nous avons obtenus dans les publications suivantes : [1],[3],[6],[7],[12],[15],[19],[20]. Ces résultats mettent en lumière l'importance de la notion de fonction de Lyapunov de commande semi-concave (voire semi-concave stratifiée) et aboutissent au théorème 9 qui établit l'existence locale d'un feedback stabilisant réplusif lisse pour des systèmes non-holonomes en dimension 3.

Le second chapitre de ce mémoire est consacré à l'étude de l'application exponentielle et de la fonction distance en géométrie sous-riemannienne. La première section de ce chapitre est dédiée à des rappels fondamentaux de géométrie sous-riemannienne. La deuxième section a pour objet l'étude de l'application exponentielle en géométrie sous-riemannienne, ou plus précisément de son image ; on y énonce des résultats obtenus en collaboration avec Emmanuel Trélat dans [11]. Enfin, la section 3 porte sur la régularité des sphères riemanniennes et sous-riemanniennes. On y explique comment un théorème de type Morse-Sard pour certaines fonctions lipschitziennes, dont la démonstration, donnée dans [10], repose sur des outils de géométrie algébrique réelle, permet d'aboutir au résultat démontré dans [14].

À la fin de chacun de ces deux chapitres, quelques projets de recherche sont présentés.

Chapitre 1

Sur le problème de stabilisation en théorie du contrôle

1.1 Le problème de stabilisation

1.1.1 Systèmes commandés GAC. Donnons-nous une variété M , connexe, de classe C^∞ , de dimension n , et un système commandé de la forme,

$$\dot{x} = f(x, u) := \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad (1.1)$$

où f_1, \dots, f_m sont des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M et où la commande (aussi appelée contrôle) $u = (u_1, \dots, u_m)$ appartient à $\overline{B_m}$, la boule unité fermée de \mathbb{R}^m . Rappelons que pour chaque point $x \in M$ et pour chaque contrôle $u(\cdot) \in L^\infty([0, \infty), \overline{B_m})$, le système commandé (1.1) donne lieu à une unique trajectoire maximale $x(\cdot) : [0, T) \rightarrow M$ (avec $T \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$), notée $x(\cdot; x, u(\cdot))$, solution du problème de Cauchy,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T), \quad x(0) = x.$$

Fixons un point privilégié $O \in M$. Le système commandé (1.1) est dit globalement asymptotiquement commandable au point $O \in M$ (que nous abrègerons par GAC par la suite) si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. **Attractivité :** Pour chaque $x \in M$, il existe un contrôle $u(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \overline{B_m}$ tel que la trajectoire $x(\cdot; x, u(\cdot))$ de (1.1) tend vers O quand t tend vers l'infini.
2. **Stabilité au sens de Lyapunov :** Pour chaque voisinage \mathcal{V} de O , il existe un voisinage \mathcal{U} de O tel que si $x \in \mathcal{U}$ alors le contrôle $u(\cdot)$ ci-dessus peut être choisi de manière à avoir $x(t; x, u(\cdot)) \in \mathcal{V}, \forall t \geq 0$.

1.1.2 Exemples. Voici trois exemples simples de systèmes commandés GAC dont nous reparlerons par la suite.

Exemple 1 : Dans le plan, le système commandé, appelé "systèmes des cercles d'Artstein", défini par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= u(2xy), \quad u \in [-1, 1], \end{aligned}$$

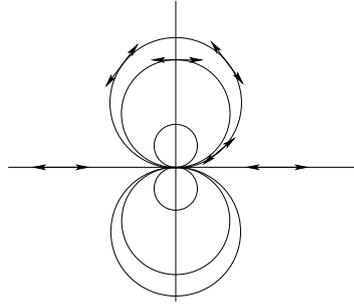


FIG. 1.1: Système des cercles d'Artstein

est GAC au point $(0,0)$. En effet, comme le montre la Figure 1.1, pour chaque $(x,y) \neq (0,0)$ dans le plan, l'ensemble $\{u(x^2 - y^2, 2xy) : u \in [-1, 1]\}$ correspond à l'intersection de la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 et de l'espace tangent en (x,y) au cercle centré sur l'axe des ordonnées et passant par (x,y) et $(0,0)$. La propriété "GAC en $(0,0)$ " devient donc évidente.

Exemple 2 : Dans \mathbb{R}^3 , le système classiquement appelé "nonholonomic integrator", et défini par,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \end{aligned}$$

est un exemple célèbre de système commandé GAC en tout point de l'espace.

Exemple 3 : Plus généralement, si les champs de vecteurs f_1, \dots, f_m satisfont la condition suivante, appelée condition du rang ou condition de Hörmander,

$$\forall x \in M, \quad \text{Lie} \{f_1, \dots, f_m\}(x) = T_x M,$$

alors un résultat classique de Chow-Rashevsky (voir [31] p. 15) implique que tout couple de points de M peut être relié par une trajectoire du système commandé (1.1). Par conséquent le système (1.1) est GAC en tout point de la variété.

1.1.3 Énoncé du problème. Étant donné un système commandé du type (1.1) qui est GAC au point O , le problème de stabilisation consiste à étudier l'existence d'une fonction continue $k(\cdot) : M \mapsto \overline{B_m}$, appelée feedback continu, qui rend le système bouclé,

$$\dot{x} = f(x, k(x)) = \sum_{i=1}^m k_i(x) f_i(x), \quad (1.2)$$

globalement asymptotiquement stable au point O (abrégé GAS par la suite), c'est à dire tel que toutes les trajectoires du système bouclé (1.2) convergent asymptotiquement vers O en satisfaisant la propriété de stabilité au sens de Lyapunov.

Retour à l'exemple 1 : Ainsi qu'il est démontré dans [57] pp. 561-562, le système commandé présenté dans l'exemple 1 n'admet pas de feedback stabilisant continu. Pour voir cela, il suffit de remarquer que chacun des cercles représentés dans la Figure 1 est invariant pour le système bouclé. De plus, par les deux propriétés d'attractivité et de stabilité au sens de Lyapunov du système bouclé, il est clair que si on considère un cercle centré sur l'axe des ordonnées strictement positives, alors autour de l'origine, tout feedback continu stabilisant doit prendre des

valeurs strictement positives (resp. négatives) sur la partie de ce cercle qui se trouve à gauche (resp. à droite) de l'origine. Par connexité du cercle ; on en déduit qu'un feedback stabilisant continu devrait avoir un équilibre sur ce cercle invariant, ce qui apporte une contradiction.

Comme nous allons le voir dans la section suivante, de nombreux systèmes GAC, comme celui de l'exemple 1, n'admettent pas de feedbacks stabilisants continus, même localement. Cette anomalie a conduit naturellement de nombreux auteurs à considérer d'autres types de feedbacks stabilisants ; on peut ainsi citer les contributions suivantes : celle de Sussmann, dans [59], qui définit un type de feedback stabilisant "discontinu" mais analytique par morceaux ; celle de Coron, dans [40] (voir aussi [41]), qui s'intéresse aux feedbacks stabilisants non-stationnaires lisses et périodiques ; celle de Clarke, Ledyev, Sontag et Subbotin, dans [38], qui introduisent le concept de "sampling solutions" associées à des feedbacks stabilisants "totalement discontinus" ; ou celle de Ancona et Bressan, dans [25], qui définissent la notion de "patchy feedback" comme "recollement" de "boucles ouvertes lisses stabilisantes". En ce qui concerne nos résultats, ils sont dans la lignée de ceux de Clarke, Ledyev, Sontag et Subbotin, dont la construction d'un feedback stabilisant discontinu repose sur l'existence d'un certain type de fonction de Lyapunov. Avant de présenter nos travaux sur le problème de stabilisation et d'en venir à la notion fondamentale de fonction de Lyapunov de commande semi-concave, on commence par rappeler quelques résultats préliminaires.

1.2 Résultats préliminaires

1.2.1 Méthode directe de Lyapunov et théorème de Kurzweil. Étant donné un champ de vecteur continu X sur la variété M qui possède un équilibre en un point O appartenant à M , on appelle fonction de Lyapunov pour le système dynamique $\dot{x} = X(x)$ au point O , toute fonction $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) V est de classe C^1 sur $M \setminus \{O\}$ et continue au point O ;
- (ii) $V \geq 0$, $V(x) = 0 \iff x = O$ et V est propre sur M ;
- (iii) $\forall x \in M \setminus \{O\}$, $(L_g V)_x < 0$.

La méthode directe de Lyapunov affirme que si le système $\dot{x} = X(x)$ possède une fonction de Lyapunov au point O , alors il est GAS au point O . Nos travaux sur le problème de stabilisation ont en quelque sorte pour point de départ le théorème de Kurzweil (voir [49]) qui affirme que le résultat ci-dessus admet une réciproque :

Théorème 1 *Soit X un champ de vecteur continu sur M . Si le système dynamique $\dot{x} = X(x)$ est GAS au point O sur la variété M , alors il admet une fonction de Lyapunov au point O .*

Si l'on se place dans le cadre du problème de stabilisation, ce premier théorème nous permet de faire l'observation suivante : Si le système commandé (1.1) admet un feedback stabilisant continu $k : M \rightarrow \overline{B_m}$, cela signifie que le système bouclé (1.2) est GAS au point O , ce qui implique que ce système admet une fonction de Lyapunov au point O . Ainsi, on obtient une fonction $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) V est de classe C^1 sur $M \setminus \{O\}$ et continue au point O ;
- (ii) $V \geq 0$, $V(x) = 0 \iff x = O$ et V est propre sur M ;
- (iii) $\forall x \in M \setminus \{O\}$, il existe $u \in \overline{B_m}$ tel que $(L_{f(\cdot, u)} V)_x < 0$.

Une telle fonction est appelée fonction de Lyapunov de commande "lisse" pour le système (1.1) au point O .

Retour à l'exemple 1 : Le théorème 1 nous permet de donner une autre preuve de la non-existence d'un feedback stabilisant continu pour le système commandé donné dans l'exemple 1. Si un tel feedback existait, alors le système en question admettrait une fonction de Lyapunov de commande à l'origine. Mais sur chacun des cercles décrits dans la Figure 1, une telle fonction aurait un maximum, c'est à dire un point différent de l'origine où le gradient de V serait orthogonal au cercle ; ce qui contredit la propriété (iii).

1.2.3 Le théorème d'Artstein. La notion de fonction de Lyapunov de commande "lisse" nous permet d'énoncer le premier résultat important de stabilisation :

Théorème 2 *Si le système commandé (1.1) admet une fonction de Lyapunov de commande "lisse" au point O , alors il possède un feedback de classe C^∞ qui stabilise (1.1) au point O .*

La démonstration de ce théorème (voir [28]) apporte une méthode de construction "par sélection (ou section)" de feedbacks stabilisants continus ; elle repose sur un théorème de sélection dû à Michael (voir [50]). Ce type d'approche est à la base de nos travaux.

1.2.4 Deux obstructions majeures à l'existence de feedbacks stabilisants continus.

1.2.4.1 Une obstruction locale : La condition de Brockett. Comme l'obstruction dont nous allons parler ici est locale, on peut supposer pour un moment qu'on travaille dans \mathbb{R}^n . Des considérations assez simples de topologies algébriques (voir [56]) permettent de montrer que si X est un champ de vecteur continu défini sur un voisinage de l'origine tel que le système $\dot{x} = X(x)$ est localement GAS à l'origine, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta B \subset X(\epsilon B)$ (ici, B désigne la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n). Dans le cadre du problème de stabilisation, cette propriété nous permet d'en déduire le résultat suivant :

Si il existe un feedback $k : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($k(O) = 0$) tel que le système bouclé (1.2) est localement GAS en O , alors le résultat ci-dessus s'applique au système $\dot{x} = f(x, k(x))$, et donc pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\exists \delta > 0 \text{ such that } \delta B \subset f(\epsilon B, \overline{B_m}).$$

Ceci nous donne donc une condition nécessaire, dite condition de Brockett (voir [33]), pour qu'un système commandé puisse éventuellement admettre un feedback stabilisant continu.

Retour à l'exemple 2 : Le système "nonholonomic integrator" ne vérifie pas la condition nécessaire de Brockett. En effet, aucun vecteur de la forme $(0, 0, \epsilon)$ (avec $\epsilon \in \mathbb{R}$) n'appartient à l'ensemble $f(x, \overline{B_2})$ pour x dans un voisinage de l'origine.

Retour à l'exemple 3 : Plus généralement, si les vecteurs tangents $f_1(O), \dots, f_m(O)$ de l'exemple 3 sont indépendants dans $T_O M$ (avec $m < n$), alors le système commandé (1.1) ne vérifie pas la condition de Brockett.

1.2.4.2 Une obstruction globale et structurelle. On sait que si le système (1.1) possède un feedback stabilisant continu, alors il admet une fonction de Lyapunov de commande "lisse". Cette fonction constitue en fait une fonction de Morse topologique sur M avec un unique point

critique (pouvant être dégénéré) au point O . Par un résultat classique (voir [51] page 168 et [32]), si une variété M possède une telle fonction de Morse, alors elle est homéomorphe à \mathbb{R}^n . Par conséquent, pour que le système commandé puisse éventuellement admettre un feedback stabilisant continu, il faut au moins que M soit homéomorphe à \mathbb{R}^n .

1.2.4.3 Conséquences. Les deux obstructions ci-dessus réduisent à néant notre espoir de construire pour chaque système commandé GAC un feedback stabilisant continu (même localement). Ceci nous amène donc naturellement à considérer d'autres types de feedbacks stabilisants et aussi d'autres type de fonctions de Lyapunov de commande. Dans le but de simplifier la présentation de nos résultats, on suppose à partir de maintenant que $M = \mathbb{R}^n$; bien-sûr, tous les résultats présentés restent vrais sur une variété connexe sans bord de classe C^∞ .

1.3 Fonctions de Lyapunov de commande semi-concaves

1.4.1 Fonctions semi-concaves. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-concave sur Ω si elle est continue sur Ω , et si pour tout $x_0 \in \Omega$ il existe des constantes $\rho, C > 0$ telles que

$$\frac{1}{2}(g(x) + g(y)) - g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq C\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in x_0 + \rho B.$$

En d'autres termes, la propriété ci-dessus signifie que la fonction g peut s'écrire localement comme somme d'une fonction concave et d'une fonction lisse (quadratique) :

$$g(x) = [g(x) - 4C\|x\|^2] + 4C\|x\|^2, \quad \forall x \in x_0 + \rho B.$$

On observe que toute fonction de classe C^2 est semi-concave. D'autres types de fonctions semi-concaves sont également donnés par les exemples suivants : si S est un sous-ensemble fermé \mathbb{R}^n , alors la fonction distance à l'ensemble S est semi-concave sur $\mathbb{R}^n \setminus S$; si $\phi_1, \dots, \phi_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une famille finie de fonctions de classe C^2 , alors la fonction définie par $g(x) := \min\{\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)\}$ est semi-concave sur Ω .

On remarque par ailleurs que toute fonction semi-concave est localement lipschitzienne sur son domaine de définition. Donc d'après le théorème de Rademacher, cela implique qu'elle est différentiable presque partout sur son domaine. Si $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-concave sur Ω , on désignera par $D_g \subset \Omega$ l'ensemble des points où g est différentiable, et par $\Sigma(g) := \Omega \setminus D_g$ son complémentaire, appelé ensemble singulier de g . De plus, on appellera sous-différentiel limite de g au point $x \in \Omega$ l'ensemble compact non-vide défini de la manière suivante :

$$\partial_L g(x) := \left\{ \lim_k \nabla g(x_k) \mid x_k \rightarrow x \text{ et } x_k \in D_g \right\}.$$

On fait remarquer que la définition qu'on donne ici peut sembler plutôt correspondre à celle d'ensemble de gradients atteignables définie dans [34], mais en fait, dans le cas semi-concave, ces deux notions coïncident.

1.4.2 Fonctions de Lyapunov de commande "non-lisses". Introduisons maintenant la notion de fonction de Lyapunov de commande "non-lisse". Une fonction continue $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction de Lyapunov de commande "non-lisse" pour le système commandé (1.1) au

point O , si elle est définie positive, propre, et si c'est une sur-solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\max_{u \in \overline{B_m}} \{-\langle f(x, u), DV(x) \rangle\} - V(x) \geq 0, \quad \forall x \in M \setminus \{O\}.$$

Sontag a montré dans [55] que tout système GAC admet une fonction de Lyapunov de commande "non-lisse", laissant en suspend l'existence d'une fonction de Lyapunov de commande "non-lisse" localement lipschitzienne sur M . Dans [3], nous avons résolu cette question, et en outre démontré l'existence d'une fonction de Lyapunov de commande semi-concave :

Théorème 3 *Si le système commandé (1.1) est GAC au point O , alors il admet une fonction de Lyapunov de commande "non-lisse" au point O qui est semi-concave sur $M \setminus \{O\}$. Une telle fonction est appelée fonction de Lyapunov de commande semi-concave au point O pour le système (1.1).*

La réciproque de ce résultat est vraie. De plus, on fait remarquer que lorsqu'une fonction $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur M et semi-concave sur $M \setminus \{O\}$, alors c'est une fonction de Lyapunov de commande semi-concave pour le système (1.1) au point O ssi on a,

$$\min_{u \in \overline{B_m}} \langle \nabla V(x), f(x, u) \rangle \leq -V(x),$$

pour tout $x \in D_V \setminus \{O\}$, ou de manière équivalente ssi la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x \in M \setminus \{O\}, \forall \zeta \in \partial_L V(x), \quad \min_{u \in \overline{B_m}} \langle \nabla \zeta, f(x, u) \rangle \leq -V(x).$$

1.4 Feedbacks stabilisants au sens de Carathéodory

Clarke, Ledyaev, Sontag et Subbotin ont démontré dans [38] que tout système commandé GAC peut être stabilisé par un certain type de feedback discontinu. Voici comment une fonction de Lyapunov de commande semi-concave (au point O) V peut générer de manière très simple ce type de feedback stabilisant :

Soit $x \in M$: si $x = O$, alors on pose $k(O) := 0$; sinon, on considère un élément ζ de $\partial_L V(x)$, on choisit un contrôle $u \in \overline{B_m}$ tel que $\langle \nabla \zeta, f(x, u) \rangle \leq -V(x)$, et on pose $k(x) := u$.

On a montré dans [6] que tout feedback construit de cette manière stabilise le système (1.1) au point O dans le sens donné par Clarke, Ledyaev, Sontag et Subbotin. En revanche, ce type de feedback construit "point par point" n'a aucune raison d'être continu ; dans le même papier, on a montré comment la semi-concavité de V peut permettre d'affiner la construction de k et d'améliorer ses propriétés de stabilisabilité.

Par la suite, on dira qu'un feedback $k : M \rightarrow \overline{B_m}$ est stabilisant au sens de Carathéodory si pour chaque $x \in M$, au moins une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t))) \text{ p.p. } t \in [0, \infty), \quad x(0) = x$$

existe, et si toutes ses solutions convergent asymptotiquement vers O en satisfaisant la propriété de stabilité au sens de Lyapunov. Dans cette situation, on dira aussi que le système bouclé (1.2) est GAS au point O . Le théorème suivant est démontré dans [6] (on précise que ce résultat fut initialement démontré par Ancona et Bressan dans [25] sans faire appel à la notion de fonction de Lyapunov de commande) :

Théorème 4 *Si le système commandé (1.1) est GAC au point O , alors il existe un ensemble \mathcal{D} : subset M , et un feedback $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que :*

- (i) *l'ensemble \mathcal{D} est ouvert et dense dans M , de plus son complémentaire a une dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n - 1$;*
- (i) *k est de classe C^∞ sur \mathcal{D} ;*
- (ii) *le système bouclé (1.2) est GAS pour les solutions de Carathéodory au point O .*

Ce résultat repose en partie sur un article de Alberti, Ambrosio et Cannarsa (voir [24]) qui étudie en détail l'ensemble singulier d'une fonction semi-concave. L'ensemble \mathcal{D} du théorème 4 correspond en fait au complémentaire d'un certain sous-ensemble de $\Sigma(V)$. Quant au feedback k , sa construction se fait "à la Artstein" sur l'ouvert \mathcal{D} , alors qu'elle suit la construction "point par point" donnée plus haut hors de celui-ci. Ainsi les points de discontinuités de k (que nous appellerons aussi singularités) correspondent plus ou moins aux points singuliers de la fonction de Lyapunov V . En fait, comme les propriétés de régularités de l'ensemble singulier d'une fonction semi-concave mises à jour dans [24] ne sont que très partielles, la construction du feedback stabilisant que nous venons d'esquisser ici ne nous permet pas de contrôler la dynamique du système bouclé au voisinage de ses singularités ; tous du moins en dimension supérieure à deux.

1.5 Une classification des singularités sur les surfaces

Dans [7], nous avons montré que lorsque on travaille en dimension deux, la nature des singularités d'un feedback stabilisant donné par le théorème 4 peuvent être décrites très précisément. Dans ce cas, nous avons remarqué qu'un certain sous-ensemble de l'ensemble singulier d'une fonction semiconcave peut être stratifié par des sous-variétés lipschitziennes de dimension 1 et par des points isolés. Ceci nous a permis d'aboutir au résultat suivant (et ainsi de répondre affirmativement à une conjecture d'Alberto Bressan) :

Théorème 5 *Si M est une variété de classe C^∞ et de dimension 2, et si le système commandé (1.1) est GAC au point $O \in M$, alors il existe un feedback $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui stabilise le système au sens de Carathéodory au point O dont les seules singularités possibles sont celles apparaissant sur la figure 2.*

Malheureusement, la stratification naturelle des fonctions semi-concaves qui apparaît en dimension deux ne demeure pas en dimension plus grande. Donc si l'on veut pouvoir contrôler la dynamique du système bouclé au voisinage de ses singularités, il faut passer par des fonctions de Lyapunov de commande plus régulières.

1.6 Feedbacks stabilisants de type GAQS

1.5.1 Fonctions de Lyapunov de commande semi-concave stratifiées. Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-concave sur Ω ; pour tout $x \in \Omega$, on appelle gradient généralisé de Clarke de g au point x , noté $\partial g(x)$, l'ensemble convexe compact non-vide défini comme l'enveloppe convexe de $\partial_L g(x)$. Cette notation permet de voir l'ensemble singulier $\Sigma(g)$ comme l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que $\dim(\partial g(x)) \geq 1$ (où la dimension prise ici signifie "dimension de l'ensemble convexe $\partial g(x)$), et d'exhiber une partition naturelle de celui-ci. En effet, comme l'ont fait initialement Alberti, Ambrosio et Cannarsa dans [24] (voir aussi [26]), l'ensemble $\Sigma(g)$ peut s'écrire comme l'union de n ensembles disjoints $\Sigma^k(g)$ (avec $k \in \{1, \dots, n\}$) définis par,

$$\Sigma^k(g) := \{x \in \Omega : \dim(\partial g(x)) = k\}.$$

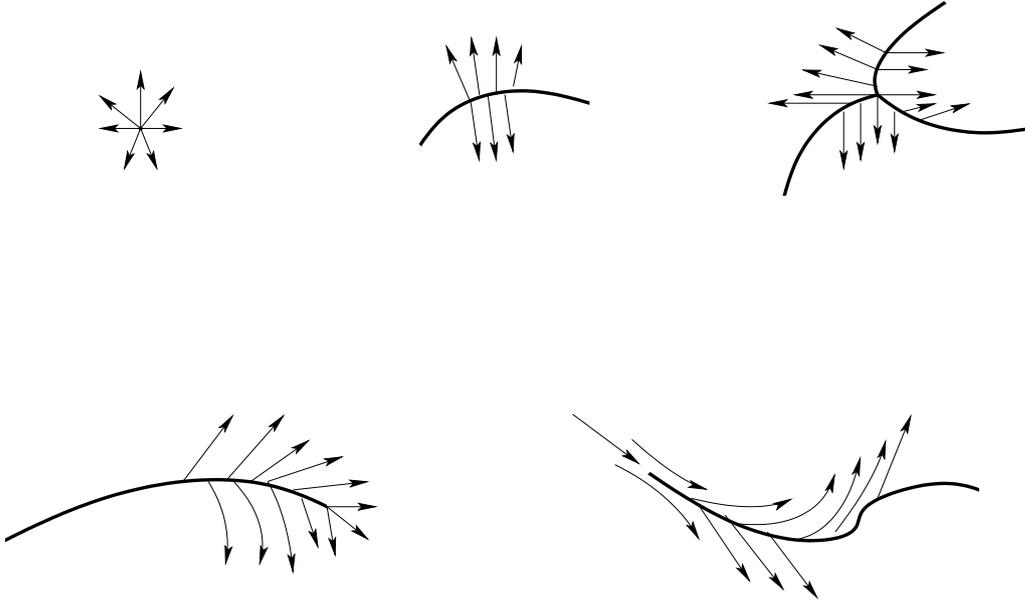


FIG. 1.2: Différents types de singularités sur les surfaces

Alberti et ses co-auteurs ont démontré que pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, l'ensemble $\Sigma^k(u)$ est \mathcal{H}^{n-k} -rectifiable, c'est à dire qu'il est contenu, modulo un ensemble \mathcal{H}^{n-k} -négligeable, dans une union dénombrable d'hypersurfaces de classe C^1 et de dimension $n - k$. Ce type de régularité très partielle ne nous permet pas vraiment de contrôler la construction de nos feedbacks stabilisants ; ceci nous force donc à considérer des fonctions de Lyapunov de commande semi-concave plus régulières, c'est à dire dont on contrôle mieux l'ensemble singulier. Dans ce but, nous avons introduit dans [12] la notion de fonction de Lyapunov de commande semi-concave stratifiée.

La fonction semi-concave $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite semi-concave stratifiée sur Ω si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) l'ensemble $\Sigma(g)$ est une stratification de Whitney stratification (voir [12] ou [43]) dont les feuilles de dimension $n - k$ sont exactement les composantes connexes de $\Sigma^k(g)$;
- (ii) pour chaque feuille S de $\Sigma(g)$, l'ensemble \bar{S} est une sous-variété à bord de classe C^∞ de Ω ;
- (iii) pour chaque feuille S de $\Sigma(g)$, la fonction g est de classe C^∞ sur \bar{S} ;
- (iv) pour chaque $x \in \Sigma^k(g)$, l'ensemble $\partial g(x)$ est un ensemble compact convexe de dimension k ayant exactement $k + 1$ points extrémaux $\zeta_1(x), \dots, \zeta_{k+1}(x)$. De plus, chacune des applications $\zeta_1(\cdot), \dots, \zeta_{k+1}(\cdot)$ est de classe C^∞ sur $\Sigma^k(g)$, et peut être étendu en une application C^∞ sur l'adhérence de chaque feuille de $\Sigma^k(g)$.

Le premier exemple de fonction semi-concave stratifiée est donné par un minimum de fonctions affines. En effet, si $(h_i)_{i \in I}$ désigne une famille finie de fonctions affines sur \mathbb{R}^n , alors la fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$u := \min_{i \in I} \{h_i\},$$

est une fonction semi-concave stratifiée sur \mathbb{R}^n qui vérifie en outre les propriétés suivantes :

- (i) pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, l'ensemble $\Sigma^k(u)$ une union disjointe de polyèdres convexes ouverts de dimension $n - k$;
- (ii) pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, l'application multi-valuée $x \mapsto \partial u(x) = \partial^P u(x)$ est constante sur chacune des composantes connexes de $\Sigma^k(u)$.

Dans [12], par des techniques de transversalité, nous avons montré que chaque fonction semi-concave sur un ouvert peut être approximée globalement par une fonction semi-concave stratifiée de telle manière que les sous-différentiels limite des deux fonctions restent proches. Ceci nous a permis de démontrer le résultat suivant :

Théorème 6 *Si le système commandé (1.1) est GAC au point O , alors il admet une fonction de Lyapunov de commande au point O stratifiée sur $M \setminus \{O\}$.*

Ce théorème est l'élément crucial dans la construction de ce que l'on a appelé les feedbacks globalement asymptotiquement quasi stabilisants, que l'on abrègera GAQS dans la suite.

1.5.2 Feedbacks globalement asymptotiquement quasi-stabilisants. Un système dynamique $\dot{x} = X(x)$ de classe C^∞ est dit globalement asymptotiquement quasi stable, ou GAQS, au point O si les deux propriétés suivantes sont satisfaites (nous précisons que cette propriété fut introduite par Rantzer dans [54]) :

1. Quasi attractivité : Pour presque chaque $x \in M$ au sens de Lebesgue, la solution de $\dot{x} = X(x)$ telle que $x(0) = x$ tend vers O quand t tend vers l'infini.
2. Stabilité au sens de Lyapunov : Pour chaque voisinage \mathcal{V} de O , il existe un voisinage \mathcal{U} de O tel que si $x \in \mathcal{U}$ alors la solution de $\dot{x} = X(x)$ commençant en x satisfait $x(t) \in \mathcal{V}, \forall t \geq 0$.

Le type de fonction de Lyapunov de commande semi-concave très régulière fourni par le théorème 6 nous permet de complètement contrôler la construction d'un feedback stabilisant au sens de Carathéodory. Ceci nous donne en particulier la possibilité de stratifier l'ensemble singulier de ce feedback, et même de le scinder en parties stables et parties répulsives. Ce genre de considérations nous amène au résultat suivant :

Théorème 7 *Si le système commandé (1.1) est GAC au point O , alors il existe un feedback $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui est continu sur M , de classe C^∞ sur $M \setminus O$, et tel que le système bouclé (1.2) est GAQS au point O .*

Ce théorème, satisfaisant du point de vue de la régularité du feedback, ne stabilise pas tous les points de la variété. De plus, l'ensemble des points qui ne sont pas stabilisés n'a pas forcément de bonnes propriétés de répulsivité. En fait, l'étude de nombreux systèmes GAC suggère qu'il est souvent possible de construire des feedbacks stabilisants qui stabilisent tous les points de M et avec de très bonnes propriétés de régularité.

1.7 Feedbacks stabilisants répulsifs lisses

1.6.1 Définition. Un feedback $k : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sera dit stabilisant répulsif lisse au point O (abrégé SRL) si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. Il existe un ensemble $\mathcal{S} \subset M$ fermé et de mesure nulle ;
2. le feedback k est de classe C^∞ sur l'ouvert $M \setminus \mathcal{S}$;

3. le système bouclé (1.2) est GAS au sens de Carathéodory au point O ;
4. pour tout $t > 0$, les trajectoires du système bouclé n'appartiennent pas à l'ensemble \mathcal{S} .

Nous précisons immédiatement que tous les systèmes commandés GAC du type (1.1) n'admettent pas forcément de feedbacks SRL. Ainsi il n'est pas difficile de construire des systèmes GAC du plan qui ne possèdent pas de tels feedback. En revanche, il semble que de nombreux systèmes non-holonomes en possèdent. Par exemple, nous avons démontré dans [18] que c'est toujours le cas en dimension deux. Ce qui revient à dire que si M est une variété connexe de classe C^∞ et de dimension deux, alors tout système vérifiant la condition de Hörmander sur M (voir l'exemple 3) possède un feedback stabilisant au sens de Carathéodory dont les seules singularités sont celles apparaissant sur la figure 2 sauf les points dits "de bifurcation" (en bas à droite de la figure). Nous avons montré par ailleurs que des feedbacks SRL existent sous certaines hypothèses dans le cas sous-riemannien, et également de manière locale en dimension trois.

1.6.2 Stabilisation des distributions non-holonomes. Dans [20], nous avons montré que lorsqu'une hypothèse classique de géométrie sous-riemannienne est vérifiée, alors il est possible de construire des feedbacks de type SRL. Ce travail étant fait dans le cadre sous-riemannien, les systèmes commandés deviennent donc ici des distributions sur M et les feedbacks des sections ; nous renvoyons le lecteur au second chapitre de ce mémoire pour les définitions des différents concepts utilisés ici. Voici donc le premier résultat démontré dans [20] :

Théorème 8 *Soit M une variété connexe, compacte sans bord, de classe C^∞ , de dimension n , soit Δ une distribution non-holonome (c'est à dire satisfaisant la condition du rang) sur M de rang $m \leq n$, et soit \bar{x} un point fixé sur M . Si il existe une métrique sous-riemannienne g sur Δ pour laquelle il n'existe pas de courbe minimisante singulière, alors il existe une section de Δ de type SRL.*

Ce théorème se base sur des résultats successifs de Strichartz (voir [58]), Ge (voir [42]), Agrachev (voir [22]) ou Trélat (voir [61]). Nous remarquons que l'hypothèse faite sur la distribution Δ dans l'énoncé du théorème 8 est vérifiée génériquement pour des distributions de rang supérieur ou égal à trois dans \mathbb{R}^n (pour $n \geq 3$) (voir [35]) ; cela signifie en particulier que ce résultat s'applique pour "la plupart" des distributions de rang supérieur à trois.

1.6.3 Un résultat local en dimension trois. En combinant notre classification des singularités sur les surfaces obtenue dans [7] à des techniques d'homogénéisation déjà utilisées dans le cadre "lisse" (voir par exemple les travaux de Hermes dans [44] et [45]), on a pu démontrer le résultat suivant :

Théorème 9 *Si $M = \mathbb{R}^3$ et si le système commandé (1.1) vérifie la condition de Hörmander à l'origine,*

$$\text{Lie} \{f_1, \dots, f_m\}(0) = \mathbb{R}^3,$$

alors il existe un feedback SRL dans un voisinage de l'origine.

Comme on l'a dit, la démonstration de ce théorème repose fortement, via une technique d'homogénéisation des systèmes non-holonomes, sur des résultats spécifiques à la dimension deux, tels que notre théorème de classification et le théorème de Poincaré-Bendixon. Elle ne s'adapte donc pas pour montrer le même type de résultat en dimension supérieure.

1.8 Extensions et projets de recherche

Un projet de recherche naturel est de chercher à supprimer l'hypothèse de non-existence de courbe minimisante singulière dans le théorème 8. Ce problème pose directement la question de la présence éventuelle de telles minimisantes. Comme nous l'avons dit plus haut, par des travaux de Chitour, Jean et Trélat (voir [35], voir aussi [23]), génériquement (sur le couple (Δ, g)), les distributions de rang supérieur ou égal à trois n'admettent pas de singulières minimisantes. Par ailleurs, à côté de cela, il existe de nombreux systèmes qui, quelque soit la métrique considérée, posséderont toujours des singulières minimisantes (voir par exemple [52] ou [60]). Il faudrait développer une méthode qui permette aussi de stabiliser correctement de tels systèmes et donc de passer outre la présence de singulières minimisantes. Il serait également intéressant de voir si ces mêmes techniques pourraient permettre d'étendre le théorème 9 en dimension supérieure à trois.

Chapitre 2

À propos de l'exponentielle et de la distance sous-riemanniennes

2.1 Préliminaires

Pour tout complément sur les notions introduites dans ces préliminaires, on renvoie le lecteur aux deux textes [48] et [53].

2.1.1 Structures sous-riemanniennes. Soit M une variété connexe de classe C^∞ et de dimension n . Une structure sous-riemannienne sur M correspond à la donnée d'un couple (Δ, g) , où Δ est une distribution satisfaisant la condition du rang, et où g est une métrique riemannienne sur Δ . On rappelle qu'une distribution sur M est un sous-fibré vectoriel de classe C^∞ de TM , et que celle-ci satisfait la condition du rang si, pour tout $x \in M$,

$$\text{Lie}(\Delta)[x] = T_x M.$$

D'autre part, une métrique riemannienne g sur Δ correspond à la donnée d'une fonction de classe C^∞ , $g : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, dont la restriction à chaque fibre de Δ est une forme quadratique définie positive.

2.1.2 Courbes horizontales. Une courbe horizontale (sur $[0, 1]$) est une courbe absolument continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ telle que pour presque tout $t \in [0, 1]$, $\dot{\gamma}(t) \in \Delta[\gamma(t)]$. Pour chaque point x_0 fixé dans M , l'ensemble des courbes horizontales γ valant x_0 pour $t = 0$ et dont la norme L^2 , définie par,

$$\|\gamma\|_2^{g, x_0} := \sqrt{\int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt}$$

est finie, est une variété hilbertienne de classe C^∞ ; on la note Ω_{x_0} .

2.1.3 L'application entrée-sortie. Pour chaque $x_0 \in M$, on appelle application entrée-sortie au point x_0 et en temps 1, l'application définie par :

$$\begin{aligned} E^{x_0, 1} : \Omega_{x_0} &\longrightarrow M \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

Cette application est de classe C^∞ sur Ω_{x_0} muni de la norme $\|\cdot\|_2^{g, x_0}$. Le célèbre théorème de Chow-Rashevsky (voir [31] p. 15) peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 10 *Si Δ est une distribution satisfaisant la condition du rang, alors pour tout $x_0 \in M$, l'application $E^{x_0,1}$ est ouverte.*

Il n'est pas difficile de déduire de ce résultat que si la distribution Δ satisfait la condition du rang, alors pour tout couple de points (x_0, x_1) dans M , il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{x_0}$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Dans la suite, une courbe $\gamma \in \Omega_{x_0}$ sera dite singulière s'il s'agit d'un point critique de l'application entrée-sortie $E^{x_0,1}$, c'est à dire si l'application linéaire $T_\gamma E^{x_0,1} : T_\gamma \Omega_{x_0} \rightarrow T_{\gamma(1)} M$ n'est pas surjective.

2.1.4 La distance sous-riemannienne. La longueur d'une courbe $\gamma \in \Omega_{x_0}$ est donnée par

$$\text{long}_{SR}(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (\leq \|\gamma\|_2^{g, x_0} < \infty).$$

Pour tout couple de points (x_0, x_1) dans M , on définit la distance sous-riemannienne de x_0 à x_1 comme étant l'infimum des longueurs des courbes horizontales appartenant à Ω_{x_0} et valant x_1 pour $t = 1$; on la note $d_{SR}(x_0, x_1)$. D'après le théorème de Chow-Rashevsky, si la distribution Δ satisfait la condition du rang, alors la distance est bien-définie et est continue sur $M \times M$. Dans ce cas, la topologie définie par la distance sous-riemannienne sur M coïncide avec la topologie de départ sur M . De plus, si M munie de cette distance définit un espace complet, alors pour tout couple de points (x_0, x_1) dans M il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{x_0}$ reliant x_0 à x_1 telle que $\text{long}_{SR}(\gamma) = d_{SR}(x_0, x_1)$; une telle courbe est dite minimisante.

2.1.5 Courbes minimisantes et géodésiques. En fait, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les courbes minimisantes paramétrées par la longueur sont exactement les courbes qui minimisent la norme L^2 . Donc si, pour tout couple de points (x_0, x_1) dans M , on désigne par $e_{SR}(x_0, x_1)$ l'infimum des carrés des normes L^2 des courbes horizontales reliant x_0 et x_1 , on a $d_{SR}(\cdot, \cdot) = \sqrt{e_{SR}(\cdot, \cdot)}$. Le calcul des variations montre qu'il existe deux classes de courbes minimisant l'énergie, c'est à dire le carré de la norme L^2 . La première, la plus commune, généralise le cas riemannien : ce sont les courbes qui sont projections de trajectoires du champ hamiltonien \vec{H} de $H := \frac{1}{2}g^*$ pour la structure symplectique canonique sur T^*M (où g^* est la cométrique de g). La deuxième classe, plus subtile, n'a été découverte que récemment par Montgomery (voir [52]); il s'agit des courbes minimisantes qui sont projections de courbes caractéristiques contenues dans $\Delta^\perp \setminus \{0\}$. Ces dernières étant définies comme étant les courbes absolument continues $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$ vérifiant $\dot{\psi}(t) \in \ker \bar{\omega}(\psi(t))$ pour presque tout $t \in [0, 1]$, où $\bar{\omega}$ désigne la restriction de la forme symplectique canonique ω sur T^*M à l'annihilateur de Δ noté Δ^\perp . Cette caractérisation permet en fait de démontrer que la deuxième classe correspond aux courbes minimisantes $\gamma \in \Omega_{x_0}$ qui sont singulières pour $E^{x_0,1}$. On remarque par ailleurs que l'intersection des deux classes de courbes minimisantes n'est pas vide : une courbe minimisante $\gamma \in \Omega_{x_0}$ peut très bien être singulière tout en ayant un relèvement $\psi : [0, 1] \rightarrow T^*M$ qui correspond à une trajectoire de \vec{H} .

2.1.6 L'application exponentielle. Fixons x_0 dans M . Il existe un sous-ensemble ouvert maximal U de $T_{x_0}^*M$ tel que pour tout $(x_0, p_0) \in U$, la trajectoire ψ_{p_0} (unique) du champ hamiltonien \vec{H} commençant en (x_0, p_0) est défini sur l'intervalle $[0, 1]$. L'exponentielle au point x_0 associée à notre structure sous-riemannienne est l'application de classe C^∞ définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \exp_{x_0} : U &\longrightarrow M \\ p_0 &\longmapsto \pi^*(\psi_{p_0}(1)), \end{aligned}$$

où π^* désigne la projection canonique de T^*M sur M . Dans la suite, nous dirons qu'un point x appartenant à M est conjugué à x_0 si il existe $p_0 \in U$ tel que $\exp_{x_0}(p_0) = x$ et tel que la différentielle de \exp_{x_0} en p_0 est singulière. Par ailleurs, on remarque que si on suppose que pour tout x dans M , aucune courbe minimisante reliant x_0 à x n'est singulière, alors on a :

$$\forall x \in M, \quad d_{SR}(x_0, x) = \min \{ \|\gamma_{x_0}\|_2^{g, x_0} \text{ pour } p_0 \in U \}.$$

2.2 Sur l'image de l'exponentielle sous-riemannienne

Fixons un point x_0 dans M et notons par, $d_{SR}^{x_0} := d_{SR}(x_0, \cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction distance au point x_0 dans M . La fonction $d_{SR}^{x_0}$ étant continue sur M , elle admet sur un sous-ensemble dense de M des sous-différentiels proximaux non-vides (nous renvoyons le lecteur au texte [39] pour une étude détaillée des sous-différentiels proximaux et limite). Dans un article écrit en collaboration avec Emmanuel Trélat (voir [11]), nous avons montré que l'existence d'un sous-gradient proximal en un point x de M implique l'unicité d'une courbe minimisante reliant x_0 à x , et l'existence d'une courbe minimisante dite "normale". Ceci nous a conduit au résultat suivant :

Théorème 11 *Il existe un ensemble N_1 dense dans M tel que pour tout point $x \in N_1$, il existe une unique courbe minimisante joignant x_0 à x ; de plus cette courbe admet un relèvement qui correspond à une trajectoire de \vec{H} . En particulier, l'image $\exp_{x_0}(U)$ de l'application exponentielle est dense dans M .*

Ensuite, des considérations de théorie de la mesure nous ont permis de montrer que le sous-différentiel limite de la fonction $d_{SR}^{x_0}$ est non-vide sur un ensemble de mesure pleine dans M , ce qui conduit cette fois au résultat suivant :

Théorème 12 *Si la distribution Δ est de co-rang 1, alors il existe un sous-ensemble N_2 de M , dont le complémentaire dans M est de mesure de Lebesgue nulle, tel que pour tout $x \in N_2$, il existe une courbe minimisante joignant x_0 à x qui admet un relèvement correspondant à une trajectoire de \vec{H} . De plus cette trajectoire est non-singulière, et x n'est pas conjugué à x_0 . En particulier, l'ensemble $\exp_{x_0}(U)$ est de mesure de Lebesgue pleine dans M , c'est à dire $\mu(M \setminus \exp_{x_0}(U)) = 0$.*

Dans le cadre analytique réel, ce théorème permet de retrouver une des conséquences des travaux de Agrachev et Sarychev qui affirme que toute courbe minimisante singulière sans aucun relèvement correspondant à une trajectoire de \vec{H} est de Goh. Pour plus de détail sur ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [27].

2.3 À propos des sphères riemanniennes et sous-riemanniennes

2.3.1 Gradients généralisés de Clarke. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipshitzienne sur M . D'après le théorème de Rademacher une telle fonction est presque partout différentiable sur M ; notons D_f l'ensemble des points de M où f est différentiable. Pour tout $x \in M$, le gradient généralisé de Clarke de f au point x , introduit dans [36] et [37], et noté $\partial f(x)$, est défini de la manière suivante :

$$\partial f(x) := \text{conv} \left\{ \lim_{x' \rightarrow x} T_{x'} f \text{ où } x' \in D_f \right\}.$$

Par construction, pour tout $x \in M$, l'ensemble $\partial f(x)$ est un sous-ensemble convexe compact non-vide de T_x^*M . On appelle point critique de f tout point x de M tel que $0 \in \partial f(x)$ et on note C_f l'ensemble des points critiques de f dans M . D'après le théorème des fonctions implicites "non-lisse", si x n'est pas un point critique de f alors l'ensemble des points x' appartenant à M tels que $f(x') = f(x)$ est localement une hypersurface lipschitzienne de M . On renvoie le lecteur au livre [39] pour une étude détaillée du gradient généralisé de Clarke.

Pour finir, nous dirons que $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ localement lipschitzienne vérifie le théorème de Sard si l'ensemble $f(C_f)$ est de mesure nulle dans \mathbb{R} .

2.3.2 Un théorème de Sard pour certains types de fonctions lipschitziennes. Par des considérations de géométrie algébrique réelle inspirées par les travaux de Yomdin (voir [62] et [63]), nous avons démontré dans [10] le résultat suivant :

Théorème 13 *Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^n , N une variété compacte de classe C^k et de dimension d , et $\phi : \mathcal{U} \times N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k . Si $k > 2n + 2d(n+1)$, alors la fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) := \min_{q \in N} \{\phi(x, q)\},$$

vérifie le théorème de Sard.

Comme nous l'avons dit, la preuve de ce théorème se base sur des résultats algébriques, mais aussi fortement sur le fait que lorsqu'une fonction localement lipschitzienne, comme f , est définie comme le minimum de fonctions lisses sur un ensemble compact, alors son gradient généralisé peut s'écrire de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \partial f(x) = \text{conv} \{\nabla_x \phi(x, q) | q \in \text{argmin}(f(x))\},$$

où $\nabla_x \phi(x, q)$ désigne la différentielle de ϕ par rapport à x et $\text{argmin}(f(x))$ désigne l'ensemble des q appartenant à N tels que $f(x) = \phi(x, q)$. Par ailleurs, nous faisons remarquer que le théorème 13 conduit sans problème au résultat suivant :

Corollaire 1 *Soit \mathcal{V} (resp. \mathcal{W}) un ouvert de \mathbb{R}^N (resp. de \mathbb{R}^n). Soit $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ une submersion de classe C^∞ et $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Soit $\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathcal{W}, \quad \Phi(x) := \inf \{g(v) \text{ avec } v \in \mathcal{V} \text{ tel que } f(v) = x\}.$$

Si pour tout $x \in \mathcal{W}$ il existe un voisinage \mathcal{W}_x de x (dans \mathcal{W}) et un compact K_x de \mathcal{V} tel que pour tout $x' \in \mathcal{W}_x$ l'infimum dans la définition de $\Phi(x')$ est atteint sur K_x , alors l'application Φ est localement lipschitzienne sur \mathcal{W} et vérifie le théorème de Sard.

2.3.3 Sur la régularité des sphères sous-riemanniennes. Dans [14], nous avons montré comment le théorème 13 permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 14 *Soit M une variété connexe C^∞ de dimension n munie d'une structure sous-riemannienne (Δ, g) pour laquelle elle est complète, et x_0 un point fixé dans M . Si aucune courbe minimisante issue de x_0 n'est singulière, alors la fonction $d_{SR}^{x_0}(\cdot) : M \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne sur $M \setminus \{x_0\}$ et vérifie le théorème de Sard.*

La preuve du théorème ci-dessus repose sur le fait que, comme nous l'avons remarqué dans la section 2.1.6, lorsqu'aucune courbe minimisante reliant x_0 aux points de M n'est singulière, alors

la fonction distance sous-riemannienne au point x_0 peut s'exprimer pour tout x appartenant à M de la manière suivante :

$$d_{SR}(x_0, x) = \min \{ \|\gamma_{x_0}\|_2^{g, x_0} \text{ pour } p_0 \in U \}.$$

Ce fait, combiné avec la compacité de l'ensemble des p_0 dans U pour lequel le minimum est atteint et le corollaire 1 permettent de conclure.

Si en se plaçant sous les hypothèses du théorème 14, on pose $R := \max_{x \in M} \{d_{SR}^{x_0}(x)\}$, et si on définit pour tout $r \in [0, R]$ la sphère centrée en x_0 de rayon r par,

$$S_{SR}(x_0, r) := \{x \in M \text{ tel que } d_{SR}(x_0, x) = r\},$$

alors le théorème des fonctions implicites cité plus haut nous conduit au résultat suivant :

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème 14, pour presque tout $r \in [0, R]$, la sphère sous-riemannienne $S_{SR}(x_0, r)$ est une hypersurface lipschitzienne de M .*

En fait, Baryshnikov a démontré (sous des hypothèses un peu plus fortes) dans [29] que les petites sphères sous-riemanniennes sont homéomorphes à la sphere euclidienne de dimension n .

2.3.4 Le cas riemannien. Itoh et Tanaka ont démontré dans [46] que si on se place sur une variété riemannienne M de dimension ≤ 4 et si on considère une sous-variété N de celle-ci, alors la fonction distance à N satisfait au théorème de Sard (toutes les variétés considérées étant lisses) ; le cas de dimension ≥ 5 restant ouvert. Le théorème 13 énoncé plus haut nous a permis de montrer dans [10] que le résultat de Itoh et Tanaka est en fait vrai en toute dimension.

Théorème 15 *Soit N une sous-variété compacte sans bord de classe C^∞ d'une variété riemannienne M complète et de classe C^∞ . Alors l'ensemble des valeurs critiques de la fonction distance à N est de mesure de Lebesgue nulle.*

Comme on peut l'imaginer, ce résultat peut s'affiner dans le cas d'une variété et d'une sous-variété de classe C^k .

2.4 Extensions et projets de recherche

Un des problèmes majeurs de la géométrie sous-riemannienne est la conjecture dite de Sard. Celle-ci affirme que pour tout point x_0 sur la variété M , l'application entrée-sortie $E^{x_0, 1}$ doit vérifier le théorème de Sard, c'est à dire que l'ensemble de ses valeurs singulières doit être de mesure de Lebesgue nulle dans M . Comme on l'a dit dans les préliminaires, l'application entrée-sortie est une application de classe C^∞ , définie sur une variété hilbertienne, et à valeurs dans M . Or il existe de nombreux exemples de fonctions de classes C^∞ (voir [47], et aussi [30] pour un contre-exemple "polynomial") de L^2 dans \mathbb{R} qui ne vérifient pas le théorème de Sard. Cela voudrait donc signifier que l'application entrée-sortie devrait avoir des spécificités telles, que dans son cas particulier, le théorème de Sard pourrait être vérifié. Un premier pas vers la conjecture de Sard serait de chercher à étendre le théorème 12 au cas de distribution de rang quelconque, et donc d'étudier de très près les sous-gradients proximaux et limites de la fonction distance. En cas de succès, cela produirait un résultat du type "conjecture de Sard" pour les singulières minimisantes.

Un autre problème intéressant de géométrie sous-riemannienne est celui-ci qui concerne la topologie des petites sphères. Comme on l'a dit plus haut, Baryshnikov a démontré que, sous des hypothèses très fortes, les petites sphères sous-riemanniennes sont homéomorphes aux sphères euclidiennes. En fait, on fait remarquer que notre corollaire 2 semble même indiquer que celles-ci sont mêmes bi-lipschitz homéomorphes aux sphères euclidiennes. Il serait intéressant de voir si une étude détaillée de la fonction distance comme solution de viscosité d'une certaine équation de Hamilton-Jacobi permet d'obtenir des résultats sur la topologie des sphères.

Bibliographie

Articles de journaux

- [1] L. Rifford. Stabilisation des systèmes globalement asymptotiquement commandables. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(3) : 211-216, 2000.
- [2] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, L. Rifford et R.J. Stern. Feedback stabilization and Lyapunov functions. *SIAM J. Control Optim.*, 39(1) : 25-48, 2000.
- [3] L. Rifford. Existence of Lipschitz and semiconcave control-Lyapunov functions. *SIAM J. Control Optim.*, 39(4) : 1043-1064, 2000.
- [4] L. Rifford. On the existence of nonsmooth control-lyapunov functions in the sense of generalized gradients. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6(6) : 593-611, 2001.
- [5] F.H. Clarke, L. Rifford et R.J. Stern. Feedback in state constrained optimal control. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 7 : 97-133, 2002.
- [6] L. Rifford. Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks. *SIAM J. Control Optim.*, 41(3) : 659-681, 2002.
- [7] L. Rifford. Singularities of viscosity solutions and the stabilization problem in the plane. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(5) : 1373-1396, 2003.
- [8] L. Rifford. Range of the gradient of a smooth bump in finite dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(10) : 3063-3066, 2003.
- [9] M. Malisoff, L. Rifford et E.D. Sontag. Asymptotic controllability implies input to state stability. *SIAM J. Control Optim.*, 42(6) : 2221-2238, 2004.
- [10] L. Rifford. A Morse-Sard theorem for the distance function on Riemannian manifolds. *Manuscripta Math.*, 113(2) : 251-265, 2004.
- [11] L. Rifford et E. Trélat. Morse-Sard type results in sub-riemannian geometry. *Math. Ann.*, 332(1) : 145-159, 2005.
- [12] L. Rifford. Stratified semiconcave control-Lyapunov functions and the stabilization problem. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 22(3) : 343-384, 2005.
- [13] M.-O. Czarnecki et L. Rifford. Approximation and regularization of Lipschitz functions : convergence of the gradients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
- [14] L. Rifford. À propos des sphères sous-riemanniennes. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, à paraître.
- [15] L. Rifford. On the existence of local smooth repulsive stabilizing feedbacks in dimension three. *J. Differential Equations*, à paraître.

Actes de colloques

- [16] M. Malisoff, L. Rifford et E.D. Sontag. Remark on input to state stabilization. Dans Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control (Maui, HI, December 2003), pages 1053-1058.
- [17] L. Rifford. The stabilization problem : AGAS and SRS feedbacks. Dans *Optimal Control, Stabilization, and Nonsmooth Analysis*, Lectures Notes in Control and Information Sciences Vol. 301, Springer-Verlag, Heidelberg, pages 173-184, 2004.
- [18] L. Rifford. The stabilization problem on surfaces. *Rend. Semin. Mat. Torino*, à paraître.

Articles en préparation

- [19] P. Cannarsa et L. Rifford. Semiconcavity results for optimal control problems admitting no singular minimizing controls. En préparation.
- [20] L. Rifford et E. Trélat. On the stabilization problem in sub-Riemannian geometry. En préparation.

Thèse de doctorat

- [21] L. Rifford. *Problèmes de stabilisation en théorie du contrôle*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2000.

Autres références

- [22] A. Agrachev. Compactness for Sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity. Control theory and its applications (Grado, 1998), *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 56(4) :1-12, 2001.
- [23] A. Agrachev et J.-P. Gauthier. On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(3) : 359-382, 2001.
- [24] G. Alberti, L. Ambrosio et P. Cannarsa. On the singularities of convex functions. *Manuscripta Math.*, 76(3-4) : 421-435, 1992.
- [25] F. Ancona et A. Bressan. Patchy vector fields and asymptotic stabilization. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4 : 445-471, 1999.
- [26] L. Ambrosio, P. Cannarsa et H.M. Soner. On the propagation of singularities of semi-convex functions. *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. (4)*, 20(4) : 597-616, 1993.
- [27] A. Agrachev et A. Sarychev. Sub-Riemannian metrics : minimality of abnormal geodesics versus subanalyticity. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 4 : 377-403, 1999.
- [28] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis TMA*, 7 : 1163-1173, 1983.

- [29] Yu. Baryshnikov. On small Carnot-Carathéodory spheres. *Geom. Funct. Anal.*, 10(2) : 259-265, 2000.
- [30] S. M. Bates et C. G. Moreira. De nouvelles perspectives sur le théorème de Morse-Sard. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(1) : 13-17, 2001.
- [31] A. Bellaïche. The tangent space in sub-Riemannian geometry. Dans *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, pages 1-78, 1996.
- [32] M. Brown. The monotone union of open n -cells is an open n -cell. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 : 812-814, 1961.
- [33] R.W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. Dans R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181-191. Birkhäuser, Boston, 1983.
- [34] P. Cannarsa et C. Sinestrari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [35] Y. Chitour, F. Jean and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J. Differential Geom.*, à paraître.
- [36] F.H. Clarke. *Necessary conditions for nonsmooth problems in optimal control and the calculus of variations*. Thèse de doctorat, Université de Washington, 1973.
- [37] F.H. Clarke. Generalized gradients and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 : 247-262, 1975.
- [38] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, et A.I. Subbotin. Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *I.E.E.E. Trans. Aut. Control*, 42 : 1394-1407, 1997.
- [39] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, et P.R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 178. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [40] J.-M. Coron. Global Asymptotic stabilization of controllable systems without drift. *Math. Cont. Sign. Sys.*, 5 : 295-312, 1992.
- [41] J.-M. Coron. Linearized control systems and application to smooth stabilization. *SIAM J. Control Optim.*, 32(2) : 358-386, 1994.
- [42] Z. Ge. Horizontal path spaces and Carnot-Carathéodory metrics. *Pacific J. Math.*, 161(2) : 255-286, 1993.
- [43] M. Goresky et R. MacPherson. *Stratified Morse theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [44] H. Hermes. Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Rev.*, 33(2) : 238-264, 1991.
- [45] H. Hermes. Asymptotically stabilizing feedback controls. *J. Differential Equations*, 92, 76-89, 1991.
- [46] J. Itoh et M. Tanaka. A Sard theorem for the distance function. *Math. Ann.*, 320(1) : 1-10, 2001.
- [47] I. Kupka. Counterexample to the Morse-Sard theorem in the case of infinite-dimensional manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 : 954-957, 1965.
- [48] I. Kupka. Géométrie sous-riemannienne. *Astérisque*, (241) : Exp. No. 817, 5, pages 351-380, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.

- [49] J. Kurzweil. On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 24 : 406-446, 1956.
- [50] E. Michael. Continuous selections. I. *Ann. of Math. (2)*, 63 : 361-382, 1956.
- [51] J. Milnor. Differential topology. Dans *Lectures on Modern Mathematics, Vol. II*, pages 165-183. Wiley, New York, 1964.
- [52] R. Montgomery. A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry. *J. Dynam. Control Systems*, 1(1) : 49-90, 1995.
- [53] R. Montgomery. A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications. *Math. Surveys and Monographs* 91, American Math. Soc., Providence, 2002.
- [54] A. Rantzer. A dual to Lyapunov stability theorem. *Systems Control Lett.*, 42(3) : 161-168, 2000.
- [55] E.D. Sontag. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 21 : 462-471, 1983.
- [56] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Texts in Applied Mathematics, vol.6. Springer-Verlag, New York, 1990. (Second Edition, 1998).
- [57] E.D. Sontag. Stability and stabilization : discontinuities and the effect of disturbances. Dans *Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998)*, pages 307-367. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [58] R. S. Strichartz. Sub-Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 24(2) : 221-263, 1986.
- [59] H.J. Sussmann. Subanalytic sets and feedback control. *J. Differential Equations*, 31(1) : 31-52, 1979.
- [60] H.J. Sussmann. A cornucopia of four-dimensional abnormal sub-Riemannian minimizers. Dans *Sub-Riemannian Geometry, Birkhäuser*, pages 341-364, 1996.
- [61] E. Trélat. Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost. *J. Dynam. Control Systems*, 6(4) : 511-541, 2000.
- [62] Y. Yomdin. The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings. *Math. Ann.*, 264(4) : 495-515, 1983.
- [63] Y. Yomdin. Metric properties of semialgebraic sets and mappings and their applications in smooth analysis. Dans *Géométrie algébrique et applications, III (La Rábida, 1984)*, volume 24 de Travaux en Cours, pages 165-183. Hermann, Paris, 1987.