Maths vs Aliens : Le défi

Ludovic Rifford

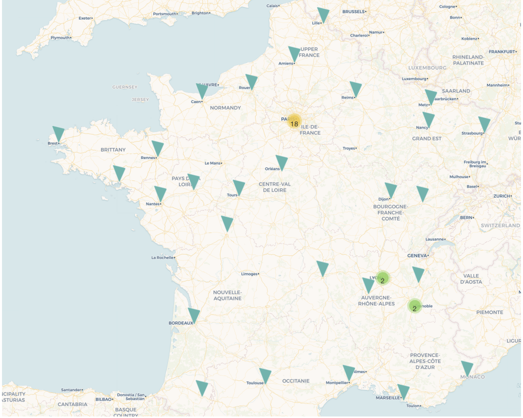
Université Côte d'Azur

MATh.en.JEANS

6 avril 2023

La Recherche mathématiques en France

La recherche mathématique en France, ce sont à peu près **3700 chercheurs ou enseignant-chercheurs** qui travaillent dans plus d'une **cinquantaine d'unités de recherche** réparties sur tout le territoire, en métropole et ou dans les outre-mers.



La Recherche mathématiques en France

Les laboratoires de mathématiques français sont localisés dans les **universités** et certaines **grandes écoles** (ENS, École Polytechnique..) et la plupart sont co-gérés par le **CNRS**.

Laboratoire J.A. Dieudonné (LJAD)
Université Côte d'Azur

La Recherche mathématiques en France

Les laboratoires de mathématiques français sont localisés dans les **universités** et certaines **grandes écoles** (ENS, École Polytechnique..) et la plupart sont co-gérés par le **CNRS**.

Laboratoire J.A. Dieudonné (LJAD)
Université Côte d'Azur

Plus d'informations sur les sites web suivants :

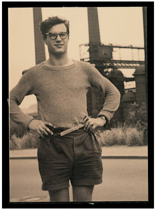
- Institut de mathématiques du CNRS (https ://www.insmi.cnrs.fr)
- Math in France (https ://france.math.cnrs.fr)

La Recherche en mathématiques

Les chercheuses et chercheurs en mathématiques travaillent au développement des mathématiques d'un point de vue théorique ou appliqué.

La Recherche en mathématiques

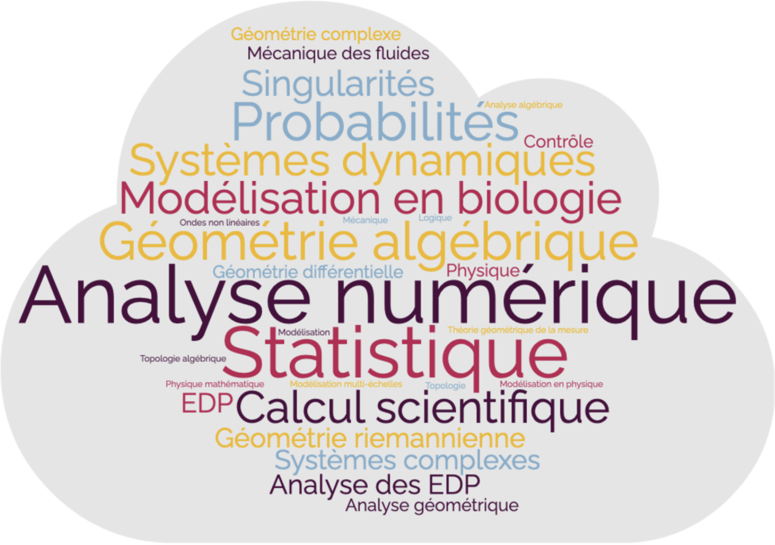
Les chercheuses et chercheurs en mathématiques travaillent au développement des mathématiques d'un point de vue théorique ou appliqué.



Alexandre Grothendieck
(1928-2014)
Médaille Fields 1966

« [Les mathématiciens] sont comme les héritiers d'une grande et belle maison toute installée, avec ses salles de séjour et ses cuisines et ses ateliers, et sa batterie de cuisine et un outillage à tout venant, avec lequel il y a, ma foi, de quoi cuisiner et bricoler.[...] Je me sens faire partie, quant à moi, de la lignée des mathématiciens dont la vocation spontanée et la joie est de construire sans cesse des maisons nouvelles. »

Domaines des mathématiques représentés au LJAD



Principe des tiroirs et nombres de Ramsey

Principe des tiroirs I

Situation n°1

Mélanie vient de passer une semaine à Nice où elle a logé chez son amie Noémie qui a trois enfants Léa, Léo et Zoé. Au moment de partir, Mélanie plonge la main dans son sac, en tire 4 pièces de deux euros et dit en les tendant à Noémie :
– Tiens, j'avais retrouvé ces 4 pièces, tu les donneras à tes enfants.

Principe des tiroirs I

Situation n°1

Mélanie vient de passer une semaine à Nice où elle a logé chez son amie Noémie qui a trois enfants Léa, Léo et Zoé. Au moment de partir, Mélanie plonge la main dans son sac, en tire 4 pièces de deux euros et dit en les tendant à Noémie :
– Tiens, j'avais retrouvé ces 4 pièces, tu les donneras à tes enfants.

Principe des tiroirs II

Données du problème : On se donne

- Un certain nombre de tiroirs que nous appelons M

- Un certain nombre d'objets que nous appelons N

Principe des tiroirs II

Données du problème : On se donne

- Un certain nombre de tiroirs que nous appelons M

- Un certain nombre d'objets que nous appelons N

Principe des tiroirs (Dirichlet, 1842)

Si on range chaque objet dans un des tiroirs et si $N > M$ alors au moins deux des objets appartiennent au même tiroir.

Johann Dirichlet
(1805-1859)

Un problème tiré par les cheveux

Situation n°2

Une personnalité invitée à une émission de télévision affirme la chose suivante :

– On peut trouver dans la ville de Nice au moins deux personnes qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Situation n°2

Une personnalité invitée à une émission de télévision affirme la chose suivante :
– On peut trouver dans la ville de Nice au moins deux personnes qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Que pensez-vous de cette affirmation ? Vrai ou Faux ?

Situation n°2

Une personnalité invitée à une émission de télévision affirme la chose suivante :
– On peut trouver dans la ville de Nice au moins deux personnes qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Que pensez-vous de cette affirmation ? Vrai ou Faux ?

Solution : Vrai

- Nombre d'habitants de Nice en 2020 : 343 477
- Une chevelure compte au plus 150 000 cheveux

Situation n°2

Une personnalité invitée à une émission de télévision affirme la chose suivante :
– On peut trouver dans la ville de Nice au moins deux personnes qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Que pensez-vous de cette affirmation ? Vrai ou Faux ?

Solution : Vrai

- Nombre d'habitants de Nice en 2020 : 343 477
- Une chevelure compte au plus 150 000 cheveux

On considère 150 001 tiroirs numérotés de 0 à 150 000 et on met dans le tiroir numéro n le nom des niçois qui ont exactement n cheveux sur la tête. On a plus de niçois que de tiroirs donc le Principe des tiroirs s'applique.

Un problème encore un peu plus tiré par les cheveux

Situation n°3

Un autre personne participant à l'émission de télévision dit alors :
– Je dirais même mieux, étant donné que la ville de Nice compte 343 477 habitants et qu'une personne a au plus 150 000 cheveux sur la tête, alors au moins trois habitants de Nice ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ! ! ! !

Un problème encore un peu plus tiré par les cheveux

Situation n°3

Un autre personne participant à l'émission de télévision dit alors :
– Je dirais même mieux, étant donné que la ville de Nice compte 343 477 habitants et qu'une personne a au plus 150 000 cheveux sur la tête, alors au moins trois habitants de Nice ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ! ! ! !

Que pensez-vous de cette affirmation ? Vrai ou Faux ?

Un problème encore un peu plus tiré par les cheveux

Situation n°3

Un autre personne participant à l'émission de télévision dit alors :
– Je dirais même mieux, étant donné que la ville de Nice compte 343 477 habitants et qu'une personne a au plus 150 000 cheveux sur la tête, alors au moins trois habitants de Nice ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ! ! ! !

Que pensez-vous de cette affirmation ? Vrai ou Faux ?

Solution : Vrai

En effet, si chacun des tiroirs considérés précédemment contient au plus deux noms alors on aurait au total

$$2 \times 150\,001 = 300\,002 \text{ noms},$$

ce qui est impossible car on a 343 477 noms répartis dans tous les tiroirs ! !

Données du problème : On se donne

- Un certain nombre de tiroirs que nous appelons M

- Un certain nombre d'objets que nous appelons N

- Un nombre entier $K \geq 2$

Données du problème : On se donne

- Un certain nombre de tiroirs que nous appelons M

- Un certain nombre d'objets que nous appelons N

- Un nombre entier $K \geq 2$

Principe des tiroirs généralisé

Si on range chaque objet dans un des tiroirs et si

$$N > (K - 1) \times M$$

alors au moins K objets distincts appartiennent à un même tiroir.

Un principe des tiroirs plus élaboré

Données du problème : On se donne

- Un certain nombre de tiroirs que nous appelons M

- Un certain nombre d'objets que nous appelons N

- Un nombre entier $K \geq 2$

Principe des tiroirs généralisé

Si on range chaque objet dans un des tiroirs et si

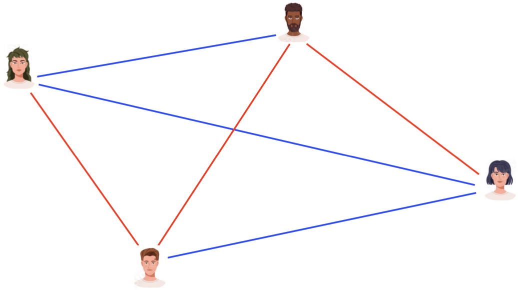
$$N > (K-1) \times M$$

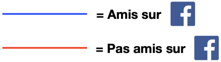
alors au moins K objets distincts appartiennent à un même tiroir.

Ce type de résultat est à la base de la théorie de Ramsey.

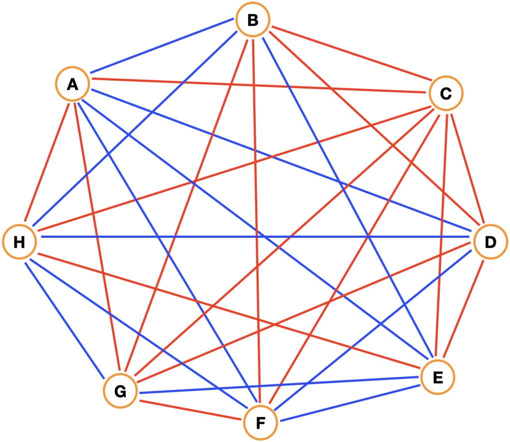
Situation n°4

Étant donné un groupe de personnes, on construit un graphe en mettant un trait entre chacune des personnes et en colorant ce trait en bleu si les deux personnes reliées par ce trait sont amis sur Facebook et en rouge sinon.

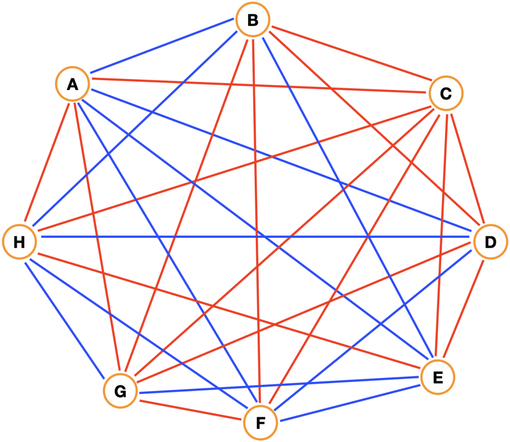




Un Graphe Facebook de 8 personnes

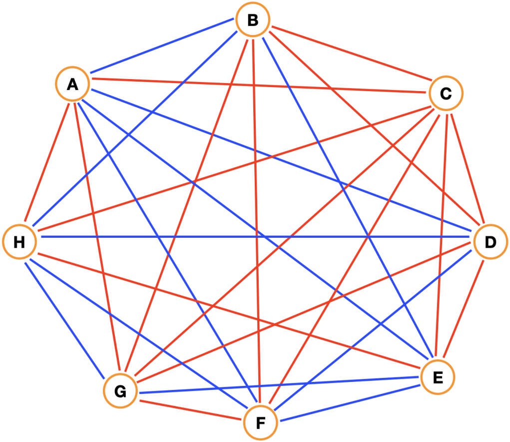


Un Graphe Facebook de 8 personnes



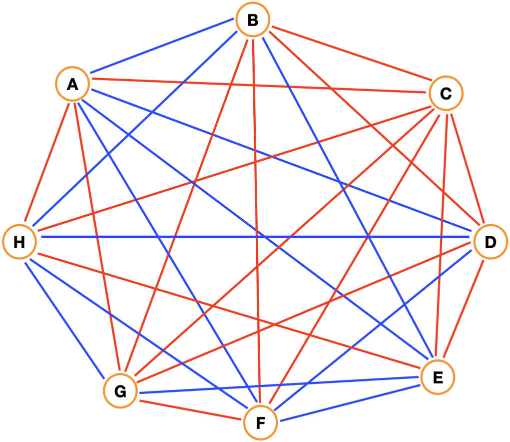
On a ici 28 traits coloriés en bleu ou rouge.

Un Graphe Facebook de 8 personnes



On a ici 28 traits coloriés en bleu ou rouge.
On note que pris deux par deux, A, B et E sont amis Facebook et même chose pour ADF, AEF, DFH.

Un Graphe Facebook de 8 personnes

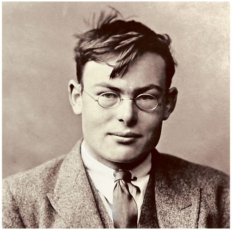


On a ici 28 traits coloriés en bleu ou rouge.
On note que pris deux par deux, A, B et E sont amis Facebook et même chose pour ADF, AEF, DFH.
On note qu'on a aussi beaucoup de triangle de personnes qui ne sont pas amis.

Théorie de Ramsey

La théorie de Ramsey prévoit qu'on peut trouver un nombre R pour lequel les propriétés suivantes sont vérifiées :

- On peut imaginer un graphe Facebook de $R-1$ personnes tel que trois d'entre elles ne sont jamais soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.
- Tout graphe Facebook de R personnes contient un sous-groupe de 3 personnes qui sont soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.

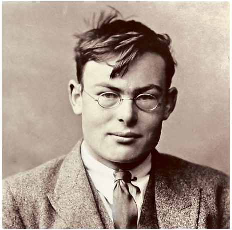


Frank Ramsey
(1903-1930)

Théorie de Ramsey

La théorie de Ramsey prévoit qu'on peut trouver un nombre R pour lequel les propriétés suivantes sont vérifiées :

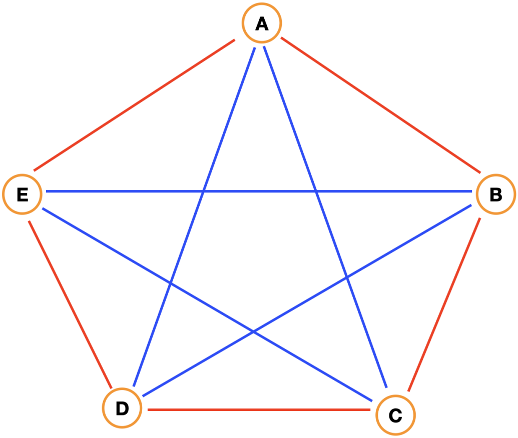
- On peut imaginer un graphe Facebook de $R-1$ personnes tel que trois d'entre elles ne sont jamais soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.
- Tout graphe Facebook de R personnes contient un sous-groupe de 3 personnes qui sont soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.



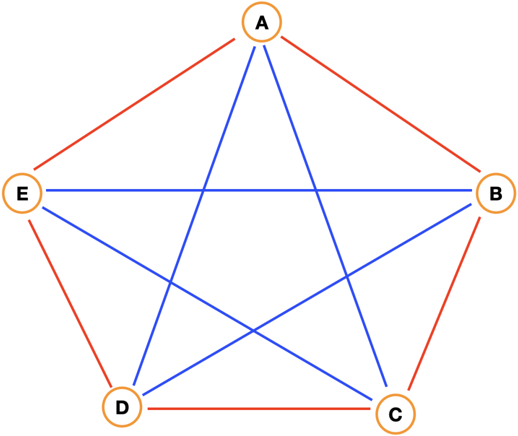
Frank Ramsey
(1903-1930)

Voyons ce qu'il en est pour $R=6$.

Un Graphe Facebook de 5 personnes



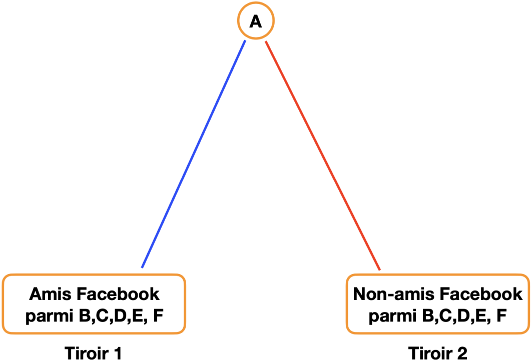
Un Graphe Facebook de 5 personnes



On ne trouve aucun triangle bleu ou rouge, c'est à dire qu'il n'existe pas de sous-groupe de 3 personnes qui sont toutes amis Facebook ou toutes pas amis Facebook.

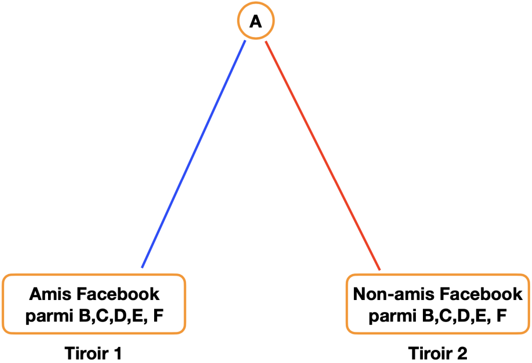
Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes I

Donnons-nous un graphe Facebook de 6 personnes nommées A, B, C, D, E, F et répartissons les personnes B, C, D, E, F en deux tiroirs distincts de la manière suivante :



Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes I

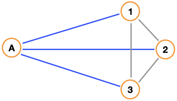
Donnons-nous un graphe Facebook de 6 personnes nommées A, B, C, D, E, F et répartissons les personnes B, C, D, E, F en deux tiroirs distincts de la manière suivante :



Par le Principe des tiroirs généralisé un des deux tiroirs contient au moins 3 personnes.

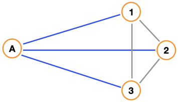
Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes II

Possibilité n°1 : Le tiroir 1 contient 3 personnes

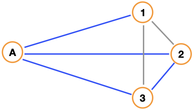


Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes II

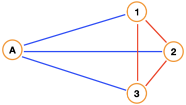
Possibilité n°1 : Le tiroir 1 contient 3 personnes



- Si deux personnes parmi 1,2,3 sont reliées par un trait bleu alors on a un triangle bleu.

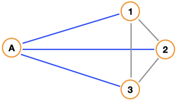


- Sinon, dans le cas contraire, tous les traits entre 1, 2, 3 sont rouges et donc le triangle 123 est rouge.

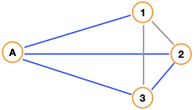


Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes II

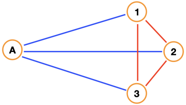
Possibilité n°1 : Le tiroir 1 contient 3 personnes



- Si deux personnes parmi 1,2,3 sont reliées par un trait bleu alors on a un triangle bleu.



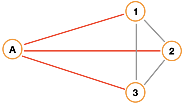
- Sinon, dans le cas contraire, tous les traits entre 1, 2, 3 sont rouges et donc le triangle 123 est rouge.



Dans tous les cas, on a un triangle d'une même couleur ! !

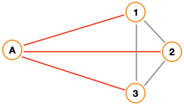
Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes III

Possibilité n°2 : Le tiroir 2 contient 3 personnes

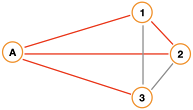


Le cas d'un graphe Facebook de 6 personnes III

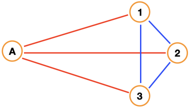
Possibilité n°2 : Le tiroir 2 contient 3 personnes



- Si deux personnes parmi 1,2,3 sont reliées par un trait rouge alors on a un triangle rouge.



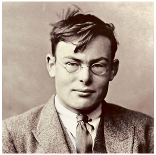
- Sinon, dans le cas contraire, tous les traits entre 1, 2, 3 sont bleus et donc le triangle 123 est bleu.



Dans tous les cas, on a un triangle d'une même couleur ! !

En conclusion, on a démontré le résultat suivant :

- Il existe un graphe Facebook de 5 personnes tel que trois d'entre elles ne sont jamais soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.
- Tout graphe Facebook de 6 personnes contient un sous-groupe de 3 personnes qui sont soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.



En théorie de Ramsey, ce résultat s'énonce de la manière suivante :

Théorème

Le nombre de Ramsey $R(3)$ *est égal à* 6*.*

Nombres de Ramsey

Définition

Pour tout entier $k \geq 3$, on appelle **nombre de Ramsey** $R(k)$ *le plus petit nombre entier n tel que tout graphe Facebook de n personnes admet un sous-groupe de k personnes qui sont soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook. En d'autres termes, c'est le seul nombre entier qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *Il existe un graphe Facebook de $R(k) - 1$ personnes tel que k d'entre elles ne sont jamais soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.*
- *Tout graphe Facebook de $R(k)$ personnes contient un sous-groupe de k personnes qui sont soit toutes amis Facebook soit toutes pas amis Facebook.*

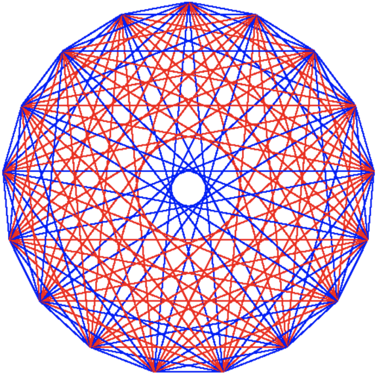
Théorème (Ramsey, 1930)

Pour tout entier $k \geq 3$, le nombre de Ramsey $R(k)$ existe.

Le nombre de Ramsey $R(4)$

Théorème (Greenwood-Gleason, 1955)

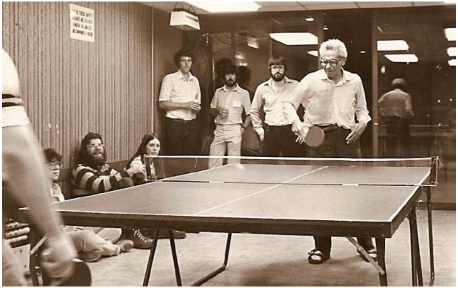
Le nombre de Ramsey $R(4)$ *est égal à* 18.



Un exemple de graphe Facebook de 17 personnes ne contenant pas de sous-groupe de 4 personnes toutes amis Facebook ou toutes pas amis Facebook.

Le nombre de Ramsey $R(5)$

L'histoire suivante a été imaginée par le mathématicien hongrois Paul Erdös (1913-1996) :

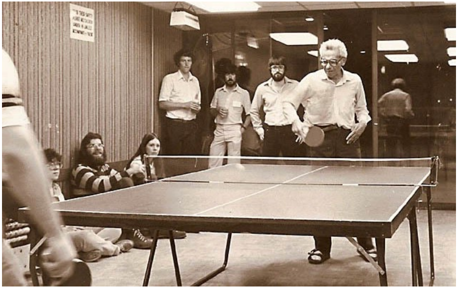


Situation n°5

Un groupe d'extra-terrestres envahissent la Terre et menacent de l'anéantir à moins que les humains ne soit capables de donner la valeur du nombre de Ramsey $R(5)$ dans l'année qui suit.

Le nombre de Ramsey $R(5)$

L'histoire suivante a été imaginée par le mathématicien hongrois Paul Erdös (1913-1996) :



Situation n°5

Un groupe d'extra-terrestres envahissent la Terre et menacent de l'anéantir à moins que les humains ne soit capables de donner la valeur du nombre de Ramsey $R(5)$ dans l'année qui suit.

Que faire ?

La réponse apportée par Paul Erdös est la suivante :

Situation n°5 (suite)

On devrait pouvoir donner la valeur de $R(5)$ dans l'année en mobilisant les plus brillants mathématiciens et les ordinateurs les plus puissants au monde. En revanche, si les aliens nous demandaient la valeur de $R(6)$ alors on n'aurait pas d'autre choix que de les attaquer.

Les nombres de Ramsey $R(k)$ pour $k \geq 5$ ne sont pas connus à l'heure actuelle, on ne dispose que des estimations suivantes :

$$R(5) \geq 43 \qquad \text{(Exoo, 1989)}$$

$$R(5) \leq 48 \qquad \text{(Angeltveit-McKay, 2018)}$$

$$R(6) \geq 102 \qquad \text{(Kalbfleisch, 1966)}$$

$$R(6) \leq 165 \qquad \text{(McKey, 1994)}$$

$$\dots$$

La théorie de Ramsey occupe aujourd'hui de nombreux mathématiciennes et mathématiciens de par le monde...

Merci pour votre attention ! !