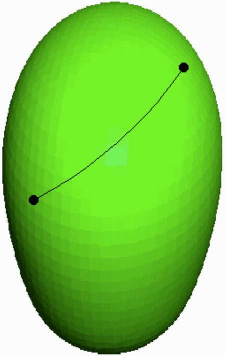
Transport de masse sur les surfaces

Ludovic Rifford

Université de Nice - Sophia Antipolis

Le cadre

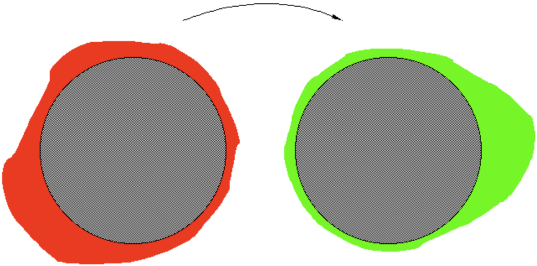
Soit M une **surface lisse compacte connexe** dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x, y \in M$, on appelle distance géodésique entre x et y, notée $d(x, y)$, le minimum des longueurs des courbes (tracées sur M) joignant x à y.



Transport de masse sur les surfaces

Soit μ_0 et μ_1 deux **mesures de probabilité** sur M. On appelle **application de transport** de μ_0 vers μ_1 toute application mesurable $T : M \to M$ telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$, c'est à dire

$$\mu_1(B) = \mu_0\big(T^{-1}(B)\big), \quad \forall B \text{ mesurable } \subset M.$$



Le théorème de McCann

Problème de transport quadratique: Étant donné deux mesures de probabilité μ_0, μ_1 sur M, trouver une application mesurable $T : M \rightarrow M$ telle que $T_\sharp \mu_0 = \mu_1$ qui minimise le coût de transport quadratique ($c = d^2/2$)

$$\int_M c(x, T(x)) d\mu_0(x).$$

Théorème (McCann (2001))

Si μ_0 est absolument continue par rapport à Lebesgue, il existe une unique application de transport optimale entre μ_0 et μ_1 pour le coût quadratique.
*Il existe une fonction c-**convexe** $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$T(x) = \exp_x \left(\nabla \varphi(x)\right) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in M.$$

Détails

Le potentiel φ est différentiable p.p. et vérifie p.p.

$$\nabla\varphi(x) \in \mathcal{I}(x) \quad \text{et} \quad T(x) = \exp_x\left(\nabla\varphi(x)\right).$$

Définition (Application exponentielle)

Pour chaque $v \in T_xM$, on note $\exp_x(v) = \gamma_{x,v}(1)$, où $\gamma_{x,v} : [0,1] \to M$ est l'unique géodésique partant de x avec vitesse initiale v.

Définition (Domaine d'injectivité)

On appelle **domaine d'injectivité** *de x, le sous-ensemble de T_xM defini par*

$$\mathcal{I}(x) := \left\{ v \in T_xM \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists t > 1 \text{ t.q. } \gamma_{tv} \text{ est l'unique géod.} \\ \text{minim. entre } x \text{ et } \exp_x(tv) \end{array} \right\}.$$

Problème

Régularité de T ?

Théorèmes de Brenier et Caffarelli

Théorème (Brenier (1991))

Soit μ_0, μ_1 deux mesures de probabilité à supports compacts dans $\mathbb{R}^n$ telles que μ_0 est absolument continue par rapport à Lebesgue. Alors il existe une unique application de transport optimale entre μ_0 et μ_1 pour le coût quadratique $c(x, y) = |x - y|^2$.
Il existe une fonction convexe $\psi : M \to \mathbb{R}$ telle que

$$T(x) = \nabla\psi(x) \qquad \mu_0 \text{ p.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème (Caffarelli ('90s))

Soit Ω_0, Ω_1 des ouverts connexes bornés de $\mathbb{R}^n$ et f_0, f_1 des densités de probabilités sur Ω_0 et Ω_1 bornées inférieurement et supérieurement. Supposons que l'ensemble Ω_1 est convexe. Alors le transport optimal entre $\mu_0 = f_0 dx$ et $\mu_1 = f_1 dx$ est **continu**.

Références

- Cordero-Erausquin (1999)
- Ma, Trudinger, Wang (2005)
- Loeper (2006)
- Kim, McCann
- Delanoë, Ge
- Loeper, Villani
- Figalli, Rifford
- Loeper, Figalli
- Figalli, Rifford, Villani
- Figalli, Kim, McCann

Caractérisation de TCP sur les surfaces

On dira qu'une surface $M \subset \mathbb{R}^n$ satisfait **Transport Continuity Property (TCP)** si la propriété suivante est vérifiée :
Pour toute paire de mesures de probabilité μ_0, μ_1 associées à des **densités continues strictement positives** ρ_0, ρ_1,

$$\mu_0 = \rho_0 \mathrm{vol}_g, \quad \mu_1 = \rho_1 \mathrm{vol}_g,$$

l'application de transport optimale de μ_0 vers μ_1 est **continue**.

Théorème (Figalli-R-Villani (2010))

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *ssi les propriétés suivantes sont satisfaites :*

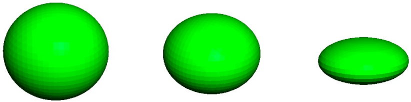
- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le coût $c = d^2/2$ est régulier.*

Convexité des domaines d'injectivité (exemples)

- Tores plats : tous les domaines d'injectivité sont convexes
- Sphères: tous les domaines d'injectivité sont des disques ouverts
- Ellipsoides de révolution (cas oblate):

$$E_\mu : \quad x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\mu}\right)^2 = 1 \quad \mu \in (0, 1].$$

Les domaines d'injectivité d'un ellipsoide de révolution oblate sont tous convexes ssi le ratio entre le petit et le grand axe est supérieur ou égal à $1/\sqrt{3}\,(\simeq 0.58)$.



Coûts réguliers

Definition

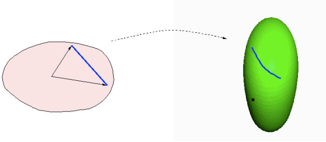
Soit M une surface dont tous les domaines d'injectivité sont convexes. Le coût $c = d^2/2 : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit **régulier** si pour tous $x, x' \in M$, la fonction

$$F_{x,x'} \ : \ v \in \mathcal{I}(x) \longmapsto c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big)$$

est **quasi-convexe**, c'est à dire pour tous $v_0, v_1 \in \mathcal{I}(x)$, on a

$$F_{x,x'}\big(v_t\big) \leq \max\Big(F_{x,x'}\big(v_0\big), F_{x,x'}\big(v_1\big)\Big) \qquad \forall t \in [0,1],$$

où $y_t := \exp_x v_t$ et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1 (\in \mathcal{I}(x))$.



Un lemme facile

Lemme

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Supposons que pour tous $v \in U$ et $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la propriété suivante est vérifiée :

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \nabla_v^2 F\, w, w \rangle > 0.$$

Alors F est quasi-convexe.

Preuve

Preuve

Soit $v_0, v_1 \in U$ fixés et $v_t := (1-t)v_0 + tv_1$ pour tout $t \in [0,1]$. Définissons $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(t) := F(v_t) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Si $h \not\leq \max\{h(0), h(1)\}$, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$h(\tau) = \max_{t \in [0,1]} h(t) \; > \; \max\{h(0), h(1)\}.$$

On a

$$\dot{h}(\tau) = \langle \nabla_{v_\tau} F, \dot{v}_\tau \rangle \quad \text{ et } \quad \ddot{h}(\tau) = \langle \nabla^2_{v_\tau} F \, \dot{v}_\tau, \dot{v}_\tau \rangle.$$

Comme τ est un maximum local, $\dot{h}(\tau) = 0$ et $\ddot{h}(\tau) \leq 0$.
Contradiction !!

Exercices

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe dans $\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

Lemme faux

Supposons que pour tous $v \in U$ et $w \in \mathbb{R}^n$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\langle \nabla_v F, w \rangle = 0 \implies \langle \nabla_v^2 F \, w, w \rangle \geq 0.$$

Alors F est quasi-convexe.

Lemme vrai

Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\langle \nabla_v^2 F \, w, w \rangle \geq -C \left| \langle \nabla_v F, w \rangle \right| |w| \qquad \forall v \in U, \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

Alors F est quasi-convexe.

Retour à notre problème

Supposons que tous les domaines d'injectivité sont convexes et fixons $x, x' \in M$. Rappel :

$$F_{x,x'}(v) = F(v) = c\big(x, \exp_x(v)\big) - c\big(x', \exp_x(v)\big).$$

- F n'est pas lisse.
- Pour des segments génériques, $t \mapsto F(v_t)$ est lisse en dehors d'un nombre fini de temps "convexes non-lisses".
- Si F est lisse en v, alors $\nabla_v^2 F$ a la forme

$$\nabla_v^2 F(h,h) = -\int_0^1 (1-t)\frac{\partial^4 c}{\partial^2 x \partial^2 y}(*)(*)\, dt$$

Le tenseur de Ma-Trudinger-Wang

Le tenseur **MTW** est défini par

$$\mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) = -\frac{3}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\,\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\,c\left(\exp_x(t\xi),\exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tous $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi,\eta \in T_xM$.

Proposition (Villani (2009), Figalli-R-Villani (2010))

Soit M une surface dont tous les domaines d'injectivité sont convexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *Le coût $c = d^2/2$ est régulier.*
- *Le tenseur **MTW** est $\succeq 0$, c'est à dire pour tous $x \in M, v \in \mathcal{I}(x)$, et $\xi,\eta \in T_xM$,*

$$\langle \xi,\eta\rangle_x = 0 \implies \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi,\eta) \geq 0.$$

Caractérisation de **TCP** sur les surfaces

Théorème (Figalli-R-Villani (2010))

Soit M une surface dans $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie **TCP** *ssi les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- *tous les domaines d'injectivité sont convexes,*
- $\mathfrak{S} \succeq 0$.

Pour tout $x \in M$ et pour toute paire de vecteurs tangents orthogonaux $\xi, \eta \in T_xM$, on a

$$\mathfrak{S}_{(x,0)}(\xi, \eta) = \sigma_x,$$

où σ_x désigne la courbure gaussienne de M en x. Ainsi,

$$\textbf{TCP} \implies \sigma \geq 0.$$

En particulier, si $M \subset \mathbb{R}^3$ satisfait **TCP**, alors elle est **convexe**.

Sphères

Théorème (Loeper (2006))

Le tenseur **MTW** *sur la sphère ronde unité* $\mathbb{S}^2$ *vérifie* $\mathfrak{S} \succeq 1$, *c'est à dire pour tous* $x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x)$ *et* $\xi, \eta \in T_x\mathbb{S}^2$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \Longrightarrow \mathfrak{S}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq |\xi|^2 |\eta|^2.$$

En particulier, $\mathbb{S}^2$ *satisfait* **TCP**.

Ce résultat est-il stable par déformation ?

Problèmes

Deux problèmes à gérer

- Stabilité de la convexité des domaines d'injectivité.
- Stabilité de $\mathfrak{S} \succeq K$.
  Sur $\mathbb{S}^2$, le tenseur **MTW** est donné par

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{(x,v)}\left(\xi, \xi^{\perp}\right) \\ &= 3\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\cos(r)}{r\sin(r)}\right]\xi_1^4 + 3\left[\frac{1}{\sin^2(r)} - \frac{r\cos(r)}{\sin^3(r)}\right]\xi_2^4 \\ &\qquad + \frac{3}{2}\left[-\frac{6}{r^2} + \frac{\cos(r)}{r\sin(r)} + \frac{5}{\sin^2(r)}\right]\xi_1^2\xi_2^2,\end{aligned}$$

avec
$x \in \mathbb{S}^2, v \in \mathcal{I}(x), r := |v|, \xi = (\xi_1, \xi_2), \xi^{\perp} = (-\xi_2, \xi_1)$.

Tenseur **MTW** étendu

Soit $x \in M$ et $v \in T_x M$ tels que $\exp_x$ est un **difféomorphisme local** dans un voisinage de v ; posons $y := \exp_x v$. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert de (x, v) dans TM et un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de (x, y) dans $M \times M$, tel que

$$\begin{array}{rcl} \Psi_{(x,v)} : \mathcal{V} \subset TM & \longrightarrow & \mathcal{W} \subset M \times M \\ (x', v') & \longmapsto & \left(x', \exp_{x'}(v')\right) \end{array}$$

est un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$. On définit $\hat{c}_{(x,v)} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ par

$$\hat{c}_{(x,v)}(x', y') := \frac{1}{2} \left| \Psi^{-1}_{(x,v)}(x', y') \right|^2_{x'} \qquad \forall (x', y') \in \mathcal{W}.$$

Si $v \in \mathcal{I}(x)$, alors pour y' proche de $\exp_x v$ et x' proche de x on a $\hat{c}_{(x,v)}(x', y') = c(x', y') := d(x', y')^2/2$.

Tenseur **MTW** étendu..

Définition (Domaine non-focal)

On appelle call **domaine non-focal** *de x, le sous-ensemble de T_xM défini par*

$$\mathcal{NF}(x) := \left\{ v \in T_xM \,\middle|\, \begin{array}{c} \exp_x \ \textit{est un difféo. local en} \\ tv \ \textit{pour tout} \ t \in [0,1] \end{array} \right\}.$$

Définition (Tenseur **MTW** étendu)

Le tenseur **MTW** *étendu $\overline{\mathfrak{S}}$ est défini par*

$$\overline{\mathfrak{S}}_{(x,v)}(\xi,\eta) = \\ -\frac{3}{2} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \hat{c}_{(x,v)}\left(\exp_x(t\xi), \exp_x(v+s\eta)\right),$$

pour tous $x \in M, v \in \mathcal{NF}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$.

Pourquoi $\overline{\mathfrak{S}}$?

Proposition

Sur les surfaces, le bord de $\mathcal{NF}(x)$ est une courbe lisse qui dépend de la surface de "manière lisse".
Les domaines non-focaux de petites déformations de la sphère ronde en topologie C^4 sont uniformément convexes.

Proposition

Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une surface. Si tous ses domaines non-focaux sont convexes et si pour tous $x \in M, v \in \mathcal{NF}(x)$, et $\xi, \eta \in T_xM$,

$$\langle \xi, \eta \rangle_x = 0 \Longrightarrow \overline{\mathfrak{S}}_{(x,v)}(\xi, \eta) \geq 0.$$

Alors tous les domaines d'injectivité de M sont convexes.

Transport de masse sur la Terre

Théorème (Figalli-R '09)

Une petite déformation de $\mathbb{S}^2$ *en topologie* C^5 *vérifie* $\overline{\mathfrak{S}} \succeq 1/2$*, a des domaines d'injectivité convexes et vérifie* **TCP**.

Merci pour votre attention !!

Dimension quelconque

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte lisse connexe de dimension $n \geq 2$.

Théorème (Figalli-R-Villani (2010))

Supposons que (M, g) *vérifie* **(TCP)**. *Alors*

- *tous ses domaines d'injectivité sont convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est* $\succeq 0$.

Théorème (Figalli-R-Villani (2010))

Supposons que (M, g) *vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *tous ses domaines d'injectivité sont strictement convexes,*
- *le tenseur* **MTW** *est* $\succ 0$,

Alors, elle vérifie **TCP**.

Dimension quelconque..

Théorème (Figalli-R-Villani (2009))

Une petite déformation de la métrique ronde sur $\mathbb{S}^n$ en topologie C^4 vérifie $\overline{\mathfrak{S}} \succeq 1/2$, a des domaines d'injectivité uniformaément convexes et satisfait **TCP**.