

Sur quelques problèmes ouverts de géométrie sous-riemannienne

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur

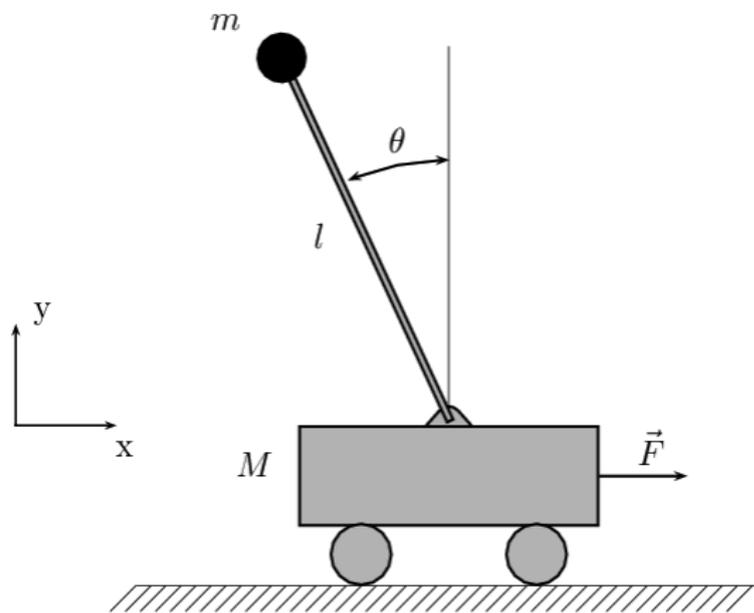
Séminaire AFRIMath de Géométrie et Topologie
16 décembre 2022

Plan de l'exposé

- I. Introduction à la géométrie sous-riemannienne
- II. Quelques problèmes ouverts
- III. Quelques résultats partiels

I. Introduction à la géométrie sous-riemannienne

Contrôle du pendule inversé



Théorie géométrique du contrôle

Un système de contrôle, ou système commandé, général a la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{où}$$

- x est l'état du système dans un certain espace M
- u est le contrôle dans un certain ensemble U

Théorie géométrique du contrôle

Un système de contrôle, ou système commandé, général a la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{où}$$

- x est l'état du système dans un certain espace M
- u est le contrôle dans un certain ensemble U

Proposition

Sous des hypothèses classiques, pour tout $x \in M$ et tout contrôle mesurable $u : [0, T] \rightarrow U$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & p.p. \ t \in [0, T], \\ x(0) = x \end{cases}$$

admet une solution unique $x(\cdot) = x(\cdot; x, u) : [0, T] \rightarrow M$.

Problèmes de controlabilité et d'optimalité

Problème de controlabilité : Étant donnés deux points x_1, x_2 dans M et $T > 0$, peut-on trouver un contrôle u tel que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{a.e. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_1 \end{cases}$$

vérifie

$$x(T) = x_2 \quad ?$$

Problèmes de controlabilité et d'optimalité

Problème de controlabilité : Étant donnés deux points x_1, x_2 dans M et $T > 0$, peut-on trouver un contrôle u tel que la solution de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) & \text{a.e. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_1 \end{cases}$$

vérifie

$$x(T) = x_2 \quad ?$$



Problème d'optimalité : Parmi toutes les trajectoires joignant x_1 à x_2 laquelle est optimale ?

Soit M une variété connexe lisse de dimension n .

Définition

Une structure sous-riemannienne de rang m sur M est donnée par une paire (Δ, g) où :

- Δ est une **distribution totalement non-holonôme** de rang $m \leq n$ sur M engendrée localement par une famille de m champs de vecteurs lisses linéairement indépendants vérifiant la **condition de Hörmander**.
- g_x est une **métrique** sur $\Delta(x)$.

La condition de Hörmander

On dit qu'une famille de champs de vecteurs lisses X^1, \dots, X^m vérifie la **condition de Hörmander** si

$$\text{Lie} \{X^1, \dots, X^m\} (x) = T_x M \quad \forall x,$$

où $\text{Lie}\{X^1, \dots, X^m\}$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par X^1, \dots, X^m , c'est à dire le plus petit sous-espace de champs de vecteurs contenant tous les X^1, \dots, X^m et stable par **crochet de Lie**.

Rappel

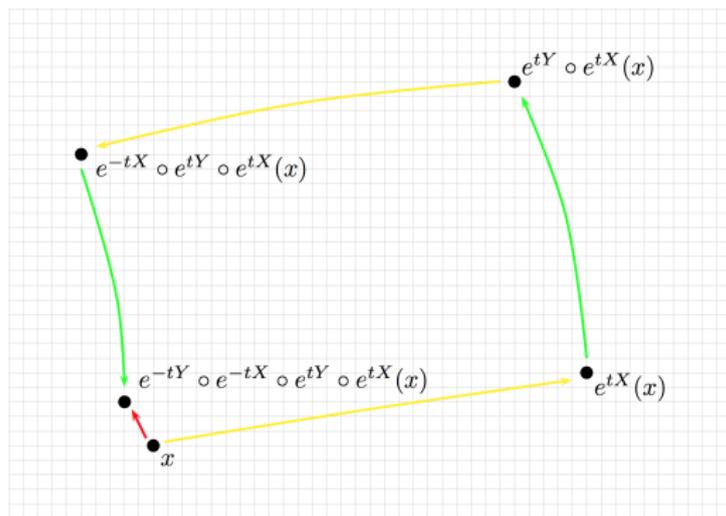
Étant donnés deux champs de vecteurs lisses X, Y dans \mathbb{R}^n , le crochet de Lie $[X, Y]$ en $x \in \mathbb{R}^n$ est défini par :

$$[X, Y](x) = DY(x)X(x) - DX(x)Y(x).$$

Crochet de Lie : Point de vue dynamique

Exercice

$$[X, Y](x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(e^{-tY} \circ e^{-tX} \circ e^{tY} \circ e^{tX})(x) - x}{t^2}.$$



Le théorème de Chow-Rashevsky

Définition

On appelle **chemin horizontal** tout $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Le théorème de Chow-Rashevsky

Définition

On appelle **chemin horizontal** tout $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Le résultat suivant constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne. (Ne pas oublier que M est supposée connexe.)

Théorème (Chow-Rashevsky, 1938)

Soit Δ une distribution totalement non-holonôme sur M , alors deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin horizontal.

Le théorème de Chow-Rashevsky

Définition

On appelle **chemin horizontal** tout $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad p.p. \ t \in [0, 1].$$

Le résultat suivant constitue le point de départ de la géométrie sous-riemannienne. (Ne pas oublier que M est supposée connexe.)

Théorème (Chow-Rashevsky, 1938)

Soit Δ une distribution totalement non-holonôme sur M , alors deux points quelconques peuvent être reliés par un chemin horizontal.

Si la distribution est équipée d'une métrique, on peut mesurer les longueurs des chemins horizontaux et par conséquent définir une distance géodésique.

Exemples de structures sous-riemanniennes

Exemple (Cas riemannien)

Toute variété riemannienne (M, g) est une structure sous-riemannienne pour laquelle $\Delta = TM$.

Exemples de structures sous-riemanniennes

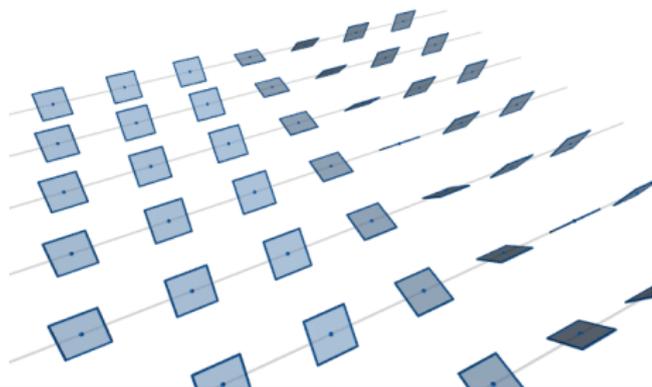
Exemple (Cas riemannien)

Toute variété riemannienne (M, g) est une structure sous-riemannienne pour laquelle $\Delta = TM$.

Exemple (Heisenberg, Martinet..)

Dans \mathbb{R}^3 , $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec $k \in \mathbb{N}^$ et*

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y + x^k \partial_z \quad \text{et} \quad g = dx^2 + dy^2.$$



Distance SR et géodésiques minimisantes

La **longueur** et l'**énergie** d'un chemin horizontal γ sont définis par

$$\text{long}^g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_g dt \quad \text{et} \quad \text{ener}^g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_g^2 dt.$$

Définition

La **distance sous-riemannienne** entre x et y est définie par

$$d_{SR}(x, y) := \inf \left\{ \text{long}^g(\gamma) \mid \gamma \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

Distance SR et géodésiques minimisantes

La **longueur** et l'**énergie** d'un chemin horizontal γ sont définis par

$$\text{long}^g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_g dt \quad \text{et} \quad \text{ener}^g(\gamma) := \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|_g^2 dt.$$

Définition

La **distance sous-riemannienne** entre x et y est définie par

$$d_{SR}(x, y) := \inf \left\{ \text{long}^g(\gamma) \mid \gamma \text{ hor.}, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

Définition

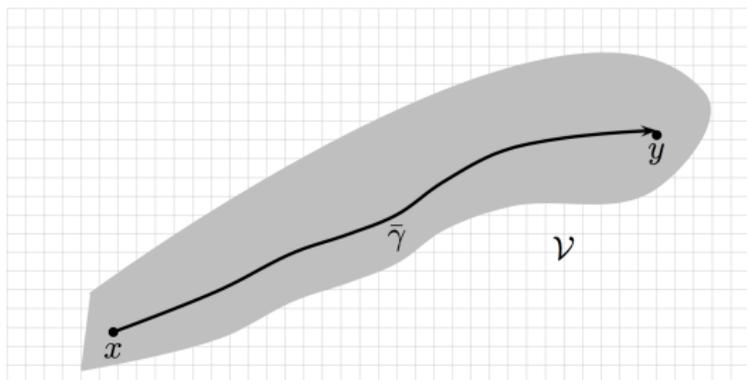
On appelle **géodésique minimisante** entre x et y tout chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ joignant x et y tel que

$$d_{SR}(x, y)^2 = \text{ener}^g(\gamma).$$

À propos des géodésiques minimisantes

Soient $x, y \in M$ et $\bar{\gamma}$ une **géodésique minimisante** entre x et y fixée. La structure SR admet une paramétrisation orthonormale le long de $\bar{\gamma}$, c'est à dire qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\bar{\gamma}([0, 1])$ et une famille orthonormale de m champs de vecteurs X^1, \dots, X^m tel que

$$\Delta(z) = \text{Vect} \left\{ X^1(z), \dots, X^m(z) \right\} \quad \forall z \in \mathcal{V}.$$



À propos des géodésiques minimisantes

Il existe un contrôle $\bar{u} \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) X^i(\bar{\gamma}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

À propos des géodésiques minimisantes

Il existe un contrôle $\bar{u} \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) X^i(\bar{\gamma}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

De plus, tout contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ (u suffisamment proche de \bar{u}) donne lieu une trajectoire γ_u solution de

$$\dot{\gamma}_u = \sum_{i=1}^m u^i X^i(\gamma_u) \quad \text{sur } [0, 1], \quad \gamma_u(0) = x.$$

À propos des géodésiques minimisantes

Il existe un contrôle $\bar{u} \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{u}_i(t) X^i(\bar{\gamma}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

De plus, tout contrôle $u \in \mathcal{U} \subset L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ (u suffisamment proche de \bar{u}) donne lieu une trajectoire γ_u solution de

$$\dot{\gamma}_u = \sum_{i=1}^m u^i X^i(\gamma_u) \quad \text{sur } [0, 1], \quad \gamma_u(0) = x.$$

Par ailleurs, pour tout chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$ il existe un contrôle unique $u \in L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ pour lequel la propriété rouge ci-dessus est vérifiée.

À propos des géodésiques minimisantes

Considérons la **End-Point map**

$$E^{x,1} : L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m) \longrightarrow M$$

définie par

$$E^{x,1}(u) := \gamma_u(1),$$

et posons $C(u) = \|u\|_{L^2}^2$. Ainsi, \bar{u} est solution du **problème d'optimisation avec contraintes** suivant :

À propos des géodésiques minimisantes

Considérons la **End-Point map**

$$E^{x,1} : L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m) \longrightarrow M$$

définie par

$$E^{x,1}(u) := \gamma_u(1),$$

et posons $C(u) = \|u\|_{L^2}^2$. Ainsi, \bar{u} est solution du **problème d'optimisation avec contraintes** suivant :

\bar{u} minimise $C(u)$ parmi les $u \in \mathcal{U}$ t.q. $E^{x,1}(u) = y$.

À propos des géodésiques minimisantes

Considérons la **End-Point map**

$$E^{x,1} : L^2([0, 1]; \mathbb{R}^m) \longrightarrow M$$

définie par

$$E^{x,1}(u) := \gamma_u(1),$$

et posons $C(u) = \|u\|_{L^2}^2$. Ainsi, \bar{u} est solution du **problème d'optimisation avec contraintes** suivant :

\bar{u} minimise $C(u)$ parmi les $u \in \mathcal{U}$ t.q. $E^{x,1}(u) = y$.

(en effet, comme la famille X^1, \dots, X^m est orthonormale, on a

$$\text{ener}^g(\gamma_u) = C(u) \quad \forall u \in \mathcal{U}.)$$

À propos des géodésiques minimisantes

Proposition (Multipliateurs de Lagrange)

*Il existe $p \in T_y^*M \simeq (\mathbb{R}^n)^*$ et $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ avec $(\lambda_0, p) \neq (0, 0)$ tels que*

$$p \cdot d_{\bar{u}}E^{x,1} = \lambda_0 d_{\bar{u}}C.$$

À propos des géodésiques minimisantes

Proposition (Multipliateurs de Lagrange)

Il existe $p \in T_y^*M \simeq (\mathbb{R}^n)^*$ et $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ avec $(\lambda_0, p) \neq (0, 0)$ tels que

$$p \cdot d_{\bar{u}}E^{x,1} = \lambda_0 d_{\bar{u}}C.$$

En effet, la fonction donnée par

$$\Phi(u) := (C(u), E^{x,1}(u))$$

ne peut être une submersion en \bar{u} . Sinon, $D_{\bar{u}}\Phi$ serait surjective et donc ouverte en \bar{u} , ce qui signifierait que l'image de Φ devrait contenir des points de la forme $(C(\bar{u}) - \delta, y)$ avec $\delta > 0$ petit !

↔ Deux cas peuvent apparaître : $\lambda_0 = 1$ ou $\lambda_0 = 0$.

À propos des géodésiques minimisantes

Premier case : $\lambda_0 = 1$

C'est le bon cas, le cas "riemannien". On peut montrer que la géodésique minimisante est alors solution d'une équation géodésique ; elle est lisse, on a un flût géodésique...

Deuxième cas : $\lambda_0 = 0$

On a alors

$$p \cdot D_{\bar{u}} E^{x,1} = 0 \text{ avec } p \neq 0,$$

ce qui signifie que \bar{u} est **singulier**, c'est un point critique de $E^{x,1}$.

À propos des géodésiques minimisantes

Premier case : $\lambda_0 = 1$

C'est le bon cas, le cas "riemannien". On peut montrer que la géodésique minimisante est alors solution d'une équation géodésique ; elle est lisse, on a un flût géodésique...

Deuxième cas : $\lambda_0 = 0$

On a alors

$$p \cdot D_{\bar{u}} E^{x,1} = 0 \text{ avec } p \neq 0,$$

ce qui signifie que \bar{u} est **singulier**, c'est un point critique de $E^{x,1}$.

↪ Comme l'a démontré R. Montgomery, le cas $\lambda_0 = 0$ ne peut être écarté.

Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il est, à travers la correspondance $\gamma \leftrightarrow u$, point critique de la End-Point map $E^{x,1} : L^2 \rightarrow M$.

Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il est, à travers la correspondance $\gamma \leftrightarrow u$, point critique de la End-Point map $E^{x,1} : L^2 \rightarrow M$.

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal.
Il n'y a pas de chemin singulier.

Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il est, à travers la correspondance $\gamma \leftrightarrow u$, point critique de la End-Point map $E^{x,1} : L^2 \rightarrow M$.

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal. Il n'y a pas de chemin singulier.

Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il est, à travers la correspondance $\gamma \leftrightarrow u$, point critique de la End-Point map $E^{x,1} : L^2 \rightarrow M$.

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal. Il n'y a pas de chemin singulier.

Exemple 2: Heisenberg, distributions fat

Dans \mathbb{R}^3 , Δ engendrée par $X^1 = \partial_x$, $X^2 = \partial_y + x\partial_z$ n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial.

Exemples

Exemple 3: Distributions de type Martinet

In \mathbb{R}^3 , soit $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec X^1, X^2 de la forme

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X^2 = (1 + x_1\phi(x)) \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3},$$

où ϕ est une fonction lisse et g une métrique sur Δ .

Exemples

Exemple 3: Distributions de type Martinet

In \mathbb{R}^3 , soit $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec X^1, X^2 de la forme

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X^2 = (1 + x_1\phi(x)) \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3},$$

où ϕ est une fonction lisse et g une métrique sur Δ .

Théorème (Montgomery)

Il existe $\bar{\epsilon} > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, le chemin horizontal singulier

$$\gamma(t) = (0, t, 0) \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$

est minimisant (pour g) parmi tous les chemins horizontaux joignant 0 à $(0, \epsilon, 0)$.

Exemples

Exemple 3: Distributions de type Martinet

In \mathbb{R}^3 , soit $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec X^1, X^2 de la forme

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X^2 = (1 + x_1\phi(x)) \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3},$$

où ϕ est une fonction lisse et g une métrique sur Δ .

Théorème (Montgomery)

Il existe $\bar{\epsilon} > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$, le chemin horizontal singulier

$$\gamma(t) = (0, t, 0) \quad \forall t \in [0, \epsilon],$$

est minimisant (pour g) parmi tous les chemins horizontaux joignant 0 à $(0, \epsilon, 0)$. De plus, si $\{X^1, X^2\}$ est orthonormale pour g et $\phi(0) \neq 0$, alors γ n'est pas projection d'une extrémale normale ($\lambda_0 = 1$).

Synthèse sur les géodésiques minimisantes

Étant données une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M et une géodésique minimisante γ de x à y , on a deux cas de figures (non-exclusifs) :

- La géodésique γ est la projection d'une extrémale normale et en particulier elle est lisse.
- La géodésique γ est une courbe singulière et a priori pourrait ne pas être lisse.

Synthèse sur les géodésiques minimisantes

Étant données une structure sous-riemannienne (Δ, g) sur M et une géodésique minimisante γ de x à y , on a deux cas de figures (non-exclusifs) :

- La géodésique γ est la projection d'une extrémale normale et en particulier elle est lisse.
- La géodésique γ est une courbe singulière et a priori pourrait ne pas être lisse.

Questions à propos des courbes horizontales singulières :

Quand ? Combien ? Comment ?

II. Quelques problèmes ouverts

Quelques problèmes ouverts

Soient (Δ, g) une structure SR sur M et $x \in M$ fixé.

Combien ?

$$\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor., sing., min.}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\Delta}^x = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma \text{ hor., sing.}\}.$$

Conjecture (Conjectures de Sard)

Les ensembles $\mathcal{S}_{\Delta, \min^g}^x$ et \mathcal{S}_{Δ}^x sont de mesure de Lebesgue nulle.

Comment ?

Conjecture (Conjecture de régularité)

Les géodésiques minimisantes sont au moins de classe C^1 .

III. Quelques résultats partiels

La conjecture de Sard forte sur les surfaces de Martinet

Soient M de dimension 3, Δ de rang 2 et g fixées, on pose

$$\mathcal{S}_{\Delta, g}^{x, L} = \{\gamma(1) \mid \gamma \in \mathcal{S}_{\Delta}^x \text{ et } \text{long}^g(\gamma) \leq L\}.$$

Conjecture (Conjecture de Sard forte)

L'ensemble $\mathcal{S}_{\Delta}^{x, L}$ est de mesure \mathcal{H}^1 finie.

Théorème (Belotto-Figalli-Parusinski-R, 2018)

Supposons M et Δ analytiques (réelles) et g lisse et complète. Alors tout chemin horizontal singulier est une courbe semi-analytique dans M . De plus, pour tout $x \in M$ et tout $L \geq 0$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\Delta, g}^{x, L}$ est une union finie de courbes horizontales singulières en particulier c'est une courbe semi-analytique.

Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.

Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.
- Le champ de vecteur qui engendre la trace de $\tilde{\Delta}$ sur $\tilde{\Sigma}$ (après résolution) a des singularités de type hyperbolique.

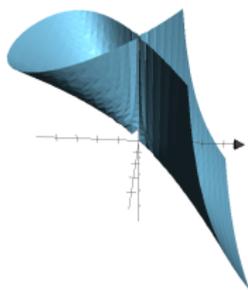
Ingrédients de la démonstration

- Résolution des singularités.
- Le champ de vecteur qui engendre la trace de $\tilde{\Delta}$ sur $\tilde{\Sigma}$ (après résolution) a des singularités de type hyperbolique.
- Un résultat de Speissegger (d'après Ilyashenko) sur la régularité des applications de transition de Poincaré.

Un exemple

Dans \mathbb{R}^3 ,

$$X = \partial_y \quad \text{et} \quad Y = \partial_x + \left[\frac{y^3}{3} - x^2 y(x+z) \right] \partial_z.$$



Surface de Martinet : $\Sigma_\Delta = \left\{ y^2 - x^2(x+z) = 0 \right\}$.

Régularité en rang 2 et dimension 3

Un résultat important de Hakavuori et Le Donne nous permet d'en déduire le résultat suivant :

Théorème (Belotto-Figalli-Parusinski-R, 2018)

Supposons M et Δ analytiques (réelles), g lisse et complète, et considérons une géodésique singulière minimisante $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Alors γ est de classe C^1 sur $[0, 1]$. En outre, $\gamma([0, 1])$ est semi-analytique et donc union d'un nombre fini de points et d'un nombre fini d'arc analytiques ouverts.

Merci pour votre attention !!