Ch 2 - Systèmes diff. linéaires

§2-1. Equations diff. linéaires d'ordre m :

- On rappelle, cf Ch. 1, qu'on se ramène au cas d'un système du 1er ordre, de taille m, en posant $Y(t) := (y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$. Ce cas est donc contenu dans le cas des systèmes du 1er ordre, cf ci-dessous.
- Néanmoins la discussion est un peu différente : on considère l'EDO

$$y^{(m)}(t) + a_1(t)\, y^{(m-1)}(t) + \cdots + a_m(t)\, y(t) = b(t), \quad (1)$$

avec m conditions initiales.

$$(y(t_0), \dot{y}(t_0), \ldots, y^{m-1}(t_0)) = \underbrace{(y_0, y_1, \ldots, y_{m-1})}_{\text{vecteur connu}} \quad (2)$$

- Si les coeff^{ts} $a_i(t)$, $1 \le i \le m$, sont continus, ainsi que $b(t)$, le pb de Cauchy (1)(2) admet une unique solution $y(\cdot)$, définie sur tout intervalle borné contenant t_0, car alors tous les $a_i(t)$ sont bornés sur $\overline{I}$, donc le Thm de Cauchy-Lipschitz global s'applique sur $\overline{I}$.
- Thm 1 :

> La sol. générale de l'EDO (1) est somme de la sol. générale de l'équation homogène associée : $z^{(m)}(t) + a_1(t)\, z^{(m-1)}(t) + \cdots + a_m(t)\, z(t) = 0$ (1')
> et d'une solution particulière z_1 de l'équation (avec second membre) (1).

. Dém. le premier membre de (1) dépend linéairement de y : notons-le $L(y)(t)$.
Donc si z_1 est une sol. particulière de (1), et y la sol. générale de (1), on a

$$L(y)(t) = L(y-z)(t) + \underbrace{L(z(t))}_{b''(t)} = 0 + b(t), \quad (3)$$

d'où $L(y-z)(t) = 0$. □

. En utilisant le Thm ci-dessous pour un système diff du 1er ordre, de taille m, on a :

thm 2 :

(i) L'ensemble des solutions de l'éq. homogène (1') est un espace vectoriel de dimension m.

(ii) Dans le cas où l'EDO (1) (ou (1')) est à coefficients constants, la sol. générale de (1') est combinaison linéaire des fonctions linéairement indépendantes

$$t \mapsto t^k e^{r_i t}, \quad k = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \quad (4)$$

où les $r_i \in \mathbb{C}$ sont les racines de l'éq. caractéristique

$$r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_{m-1} r + a_m = 0, \quad (5)$$

chacune comptée avec son ordre de multiplicité m_i

. Dém. On cherche des solutions particulières de (1'), de la forme $t \mapsto e^{rt}$. On obtient $\underbrace{e^{rt}}_{\neq 0}(r^m + a_1 r^{m-1} + \cdots + a_m) = 0$, d'où (5).

Si les racines r_i sont toutes distinctes, on vérifie que les m fonctions $\{t \mapsto e^{r_i t}\}$ sont linéair^t indépendantes.

. Si au contraire e.g. $\{t \mapsto e^{rt}\}$ est racine double de (5), alors on vérifie que $\{z : t \mapsto t e^{rt}\}$ est encore solution de (1'). Vérifions-le e.g. pour $m = 2$. Dans ce cas, on a

$$\dot{z} = e^{rt}(rt+1)\,,\quad \ddot{z} = e^{rt}(r^2 t + 2r)\,,$$

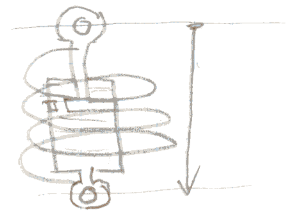
d'où

$$\ddot{z} + a_1 \dot{z} + a_2 z = e^{rt}\left(r^2 t + 2r + (rt+1)a_1 + a_2 t\right)$$
$$= e^{rt}\Big[\underbrace{(r^2 + a_1 r + a_2)}_{=0} t + \underbrace{2r + a_1}_{=0}\Big] = 0,$$

car r est racine double de l'éq. (5).

. On vérifie encore dans ce cas qu'on a encore m solutions linéairement indépendantes de (1').

. Or, cf Thm ci-dessous, l'e.v. (espace vectoriel) des solutions du système du 1er ordre associé à (1') est exactement de dimension m. Donc on a obtenu à l'aide de (5) une base de l'e.v. des solutions de (1').



. Exemple : amortisseur de voiture : "(dashpot)"

. Il est constitué : . d'un ressort : la force de rappel est $\propto$ à $-kx$, $k>0$, $x(t)$: écart entre la position et la position au repos

. et d'un amortisseur, qui fournit une force $\propto$ à $-\alpha\dot{x} = -\alpha$. vitesse, $\alpha > 0$.

L'éq. finale est : $m\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) + kx(t) = -Mg$, (6).

m, M : masses. Etudier les solutions de (6).

§ 2-2- Rappels d'analyse matricielle :

- A) Diagonalisation : Soit A une matrice $N \times N$, à termes réels. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^N$, A repère une application linéaire $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

$$\mathcal{A} : \vec{x} := \sum_{j=1}^{N} x_j \vec{e_j} \mapsto \mathcal{A}\vec{x} := \sum_{i=1}^{N} y_i \vec{e_i} \text{, avec}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \text{ i.e. } y = Ax. \qquad (7)$$

Dans une autre base $(\vec{e'_j})_{1 \le j \le N}$, le m̄ endomorphisme $\mathcal{A}$ est repéré par $P^{-1}AP$, où P est la matrice :

$$\begin{array}{cc} P := \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots p_{1,j} \cdots & p_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ & p_{i,j} & \cdots \\ p_{N,1} & \cdots p_{N,j} \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix} & \leftarrow \vec{e_i} \\ \uparrow \vec{p_j} & \end{array} : \forall j,\ \vec{e'_j} = \sum_{i=1}^{N} p_{i,j} \vec{e_i}, \qquad (8)$$

i.e. la matrice P permet d'exprimer les "nouveaux" vecteurs de base : $\vec{e'_j}$ / aux "anciens" : $\vec{e_i}$, et les "anciennes" composantes : x_i / aux "nouvelles" : x'_i.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \vec{e_i} = \sum_{j=1}^{N} x'_j \vec{e'_j} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} p_{i,j} x'_j \vec{e_i},$$

donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,N} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{N,1} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_N \end{pmatrix}; \text{ i.e. } x = Px', \text{ et de m̄ } y = Py'. \qquad (9)$$

. Donc dans une autre base $(\vec{e}'_j)_{1\le j\le N}$, le même endomorphisme $\mathcal{A}$ est repéré par

$$A' = P^{-1} A P = \text{matrice semblable à } A, \quad (10)$$

car $\forall \vec{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \vec{e}_i$, $\mathcal{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{N} y_j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{N} y'_j \vec{e}'_j$,
$= \sum_{i=1}^{N} x'_i \vec{e}'_i$

avec $y' = P^{-1} y = P^{-1} A x = \underline{P^{-1} A P x'}$. (11)

. Thm 3 : (Rappel) (****)

(i) On dit que la matrice A est diagonalisable si on a trouvé une base de $\mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N$), formée de vecteurs propres de $\mathcal{A}$: $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N\}$.

$\mathcal{A}\vec{w}_j = \lambda_j \vec{w}_j$, $1 \le j \le N$.

(ii) Dans cette base, $\mathcal{A}$ est repéré par

$$P^{-1} A P = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}. \quad (12)$$

et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^N$: $\{\vec{e}_i\}_{1\le i\le N}$ à la base des $\{\vec{w}_j\}$, $1 \le j \le N$.

(iii) Toutes les matrices $N \times N$ ne sont pas diagonalisables. Par contre, si A a toutes ses valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable. Par ailleurs, si A est symétrique, ou anti-symétrique, ou commute avec sa transposée : ${}^tA\,A = A\,{}^tA$, alors elle est diagonalisable. Toutes ces conditions sont seult suffisantes.

(iv) A est diagonalisable ssi pour toutes ses valeurs propres λ_i, la dimension m_i du s.e.v. (sous-espace vectoriel propre W_i est égale à l'ordre de multiplicité algébrique de λ_i, i.e. λ_i est racine d'ordre $p_i = m_i$ du polynôme caractéristique

$$P_N(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

[En général, on a seulement $m_i \leq p_i$].

(v) Toute matrice A peut être mise sous forme de Jordan : $\exists P$ matrice de changement de base tq

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{pmatrix},$$

où chaque "bloc de Jordan" J_k est de la forme $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$, ou $J_k = \lambda_k \in \mathbb{R}$.

La m̂ valeur propre λ_k peut apparaître dans plusieurs blocs J_ℓ différents.

Dém. Admise ! Prototype : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: A est déjà un bloc de Jordan (2×2).

* Valeurs propres de A : $P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0 = 0$.

* Donc $\lambda = 0$ est (évidemment)

* valeur propre d'ordre de multiplicité algébrique 2.

* Par contre $Aw = \lambda w = 0 \iff \begin{cases} w_2 = 0 \\ w_1 \text{ qlcq} \end{cases}$, donc le s.e.v. propre associé est $\mathbb{R}\vec{e}_1 = \mathbb{R}(1,0)$: il est de dimension 1.

· Rem Par contre, la matrice $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0.I$ est évidemment diagonalisable : le s.e.v. propre associé est $\mathbb{R}^2$: sa dimension est 2 et 0 est valeur propre double.

B) Exponentielle de matrices :

· Prop 1 : $\forall A$ matrice $N\times N$, on pose :

$$e^A=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n.$$ Cette série est CV $\forall A$.

· De plus si 2 matrices A et B commutent, i.e. si $AB=BA$, alors $e^{A+B}=e^A.e^B=e^B.e^A$.

En particulier $e^A e^{-A}=e^{-A}e^A=I$.

· Si A est diagonalisable, alors $\exists P$; $A=PDP^{-1}$

$$e^A=Pe^DP^{-1}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{\lambda_N}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

· Formule plus compliquée si A est seulement "jordanisable"

Dém. Admise. si A et B ne commutent pas, il se peut que $e^{A+B}\neq e^A.e^B$, ex. $A=\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-a\\0&0\end{pmatrix}$.

§ 2-3 - Solution générale d'un système homogène à coeff^ts constants

· thm 4 : La sol. générale du système $\dot{Y}(t)=AY(t)$ (13)

est donnée par

$$Y(t)=e^{(t-t_0)A}Y_0,\ \forall Y_0\in\mathbb{R}^N. \qquad (14)$$

Donc l'ensemble des solutions du système (13) est un e.v. de dimension N = taille du système (13).

En particulier, (14) est l'unique solution du Pb de Cauchy (13), (15), où $Y(t_0)=Y_0$ (15).