M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. TD5

Exercice 1 : Bifurcation du type "fourche" (pitchfork)
On considère l'équation différentielle non linéaire du premier ordre

$$x' = f(x,\lambda) := \lambda\ x - x^3,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1 Rappeler brièvement en fonction du signe de λ quels sont les points d'équilibre $x_i(\lambda), 1 \leq i \leq 3$ de cette EDO, discuter graphiquement leur stabilité et préciser pour chaque donnée initiale x_0 la limite, si elle existe, de la solution $x(t)$ quand $t \to +\infty$.

2 Tracer le graphe des applications $\lambda \mapsto x_i(\lambda), 1 \leq i \leq 3$, en pointillés quand un point d'équilibre est instable. Si on n'observe que les équilibres stables, que se passe-t-il quand λ traverse la valeur 0 en croissant ?

Exercice 2 (Un exemple de cycle d'hystérésis)
Un modèle de dynamique de population d'un parasite du sapin est basé sur l'EDO suivante :

$$u' = f(u;q,r) := b(u;r,q) - p(u) := ru(1-\frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2}, \tag{2}$$

où le premier terme est un terme de naissance (birth) et le second (predators) décrit les pertes dues aux prédateurs (oiseaux ...). Les coefficients (adimensionnés) q et r sont supposés fixés et > 0.

1 Tracer sur une même figure le graphe des deux fonctions $g : u \to \frac{b(u;q,r)}{u}$ et $h : u \to \frac{p(u)}{u}$. Vérifier graphiquement que, outre la racine évidente $u = 0$, l'ODE (2) a au plus trois états d'équilibre vérifiant $0 < u_e^1 \leq u_e^2 \leq u_e^3 < q$, et que pour q fixé il existe deux valeurs extrêmes $r_*(q)$ et $r^*(q)$de r telles que ces trois états existent et sont distincts si et seulement si $0 < r_*(q) < r < r^*(q)$.

2 On suppose dorénavant que q est fixé et on fait une discussion graphique. Soit d'abord $r := r_0 \in]r_*(q), r^*(q)[$ fixé : il y a donc 3 points d'équilibre distincts (plus u=0). Donner l'allure du graphe de $f(.;q,r)$ pour $u \in [0,q]$, et préciser la stabilité de ces états d'équilibre.

3 Toujours pour q fixé, on suppose d'abord que $r = r_0$ et que la donnée initiale $u(0) = u_0 \sim u_e^3$. On fait ensuite croître lentement r, suffisamment lentement pour que la solution u reste voisine du nouvel équilibre u_e^3 associé à r. Discuter graphiquement ce qui arrive quand r traverse la valeur $r^*(q)$, pour atteindre une valeur $r_{max} > r^*(q)$.

4 Maintenant, à partir de $r = r_{max}$ on fait décroître r lentement, t̀oujours à partir d(une valeur initiale proche de la valeur d'équilibre stable atteinte pour la valeur précédente de r. Que se passe-t-il quand r traverse d'abord la valeur $r^*(q)$, puis la valeur $r_*(q)$ jusqu'à une valeur minimale $r_{min} < r_*(q)$? Enfin, on procède de même en faisant croître lentement r jusqu'à r_{max}.

5 Tracer une courbe donnant qualitativement en fonction de r la succession détats d'équilibre $u_e(r)$ atteints dans les étapes précédentes. Conclusion : combien de courbes voyez-vous, et dans quel sens sont-elles décrites quand r évolue ainsi ? ?