M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. TD4

Exercice 1 (Equation linéarisée du pendule : II)
On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' = -a^2\, x \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{1}$$

1 Donner la solution générale de cette EDO. En déduire la solution unique du Problème de Cauchy pour (1), avec une donnée initiale arbitraire :

$$x(t_0) = x_0,\, x'(t_0) = x_1, \tag{2}$$

et montrer que les solutions non constantes sont périodiques de période $T = (2\pi)/a$.

2 Retrouver ces résultats en écrivant (1) comme un système du premier ordre

$$X' = A\,X, \tag{3}$$

où $X := (x, y)$. et en appliquant Cauchy-Lipschitz. Peut-on affirmer a priori que la solution est définie globalement ? Résoudre explicitement (3) en diagonalisant la matrice A (?)et montrer qu'en fait toutes les solutions de sont périodiques et donc définies pour tout temps.

3 On pose $H(X) = H(x, v) := \frac{1}{2}\,(v^2 + a^2x^2)$. Montrer que la fonction : $t \to E(t) := H(x(t), v(t))$ est invariante au cours du temps : on dit que le système (3) est conservatif, et que H est une intégrale première de (3). Retrouver ainsi, sans utiliser la forme explicite des solutions, que toute solution locale de (3) est bornée indépendamment du temps. Qu'en déduisez-vous ? Physiquement, $E(t)$ est l'énergie mécanique totale (cinétique plus potentielle) du système.

4 Cette question est une reformulation de la question 2. On pose maintenant $x' = a\,y$ et $Y(t) := (x(t), y(t))$. Ecrire le système différentiel linéaire du premier ordre

$$Y' = M\,Y, \tag{4}$$

vérifié par $Y(.) := (x(.), y(.))$ et montrer que la matrice M est anti-symétrique. Quels sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ? Calculer la matrice $\exp(tM)$.

5 On note $Z = Y_0$ la donnée initiale de (4). Quelle transformation géométrique correspond à l'application $Z \mapsto \exp(tM)\,Z$?

Exercice 2 (Lotka-Volterra)
Cet exercice a pour objet l'étude d'un modèle de dynamique des populations de proies et de prédateurs. L'une des deux fonctions inconnues $x(t)$ ou $y(t)$ représente la concentration en proies (sardines ?) et l'autre la concentration en

prédateurs (requins ?) à l'instant t. Ce modèle d'évolution de ces populations est le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x(1-y), \\ y' = y(x-1). \end{array} \right. \tag{5}$$

1 Comment interprétez-vous ce système différentiel ? Quelle est celle des deux fonctions x ou y qui désigne la concentration en prédateurs ?

2 Que pouvez-vous dire sur le problème de Cauchy associé à ce système ?existence locale, globale, unicité, état(s) d'équilibre ?

3 Résolvez ce problème de Cauchy pour (5) dans chacun des deux exemples de conditions initiales : $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{array} \right.$, ou $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$.

4 Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

a) Montrez que la solution maximale de (5) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie, pour tout t de son intervalle maximal, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

b) Montrez qu'il existe une intégrale première de (5), i.e. une fonction F définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ telle que la solution maximale de (5) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ vérifie $F(x(t), y(t)) = C$ où C est une constante fixée par les conditions initiales.

5 On considère les quatre sous-domaines suivants de $(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y > 1\}, & B = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y > 1\}, \\ C = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x < 1, y < 1\}, & D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \quad t.q. \quad x > 1, y < 1\}. \end{array} \right.$$

a) On suppose que $x_0 \leq 1, y_0 > 1$. Montrez que la solution maximale de (5) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ sort de l'adhérence de A en temps fini.

b) Quel est le comportement ultérieur de cette solution maximale ?

6 Soient $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Montrez que la solution maximale de (5) partant de (x_0, y_0) à $t = 0$ est périodique.

7 Tracez les trajectoires décrites par les solutions maximales de (5).

Exercice 3 (Courbes de niveau d'une fonction convexe)

Soit H une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que H est coercive sur $\mathbb{R}^n$ i.e. que $H(x) \to +\infty$ quand $||x|| \to +\infty$, et que H est strictement convexe :

$$\forall x, y, \forall \lambda \in [0,1], H(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda H(x) + (1-\lambda)H(y),$$

où l' inégalité est stricte, sauf si $x = y$ ou $\lambda = 0$ ou 1.

1 On rappelle qu'alors H est minorée et atteint son infimum sur $\mathbb{R}^n$, i.e. $m := inf\{H(x), x \in \mathbb{R}^n\} > -\infty$ et $\exists x_* \in \mathbb{R}^n$; $H(x_*) = m$: m est donc le minimum et x_* est un (l'unique car H est strictement convexe) point de minimum pour H sur $\mathbb{R}^n$.

La démonstration, y compris en dimension infinie, est un résultat fondamental du calcul des variations. Dans cet exercice on pourra soit l'admettre soit la redémontrer en dimension finie, en montrant par l'absurde que toute *suite minimisante*, i.e. toute suite (x^k) telle que $H(x^k) \to m$ quand $k \to +\infty$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$, et qu'on peut donc en extraire une sous-suite convergente, dont on note x_* la limite.

2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :
$\{x = x_*\} \Leftrightarrow \{H(x) = m\} \Leftrightarrow \{\nabla H(x) = 0\}$.

3 Montrer que pour tout $\alpha > m$, l'ensemble $C_\alpha := \{x;\, H(x) \leq c\}$ est un ensemble convexe fermé, d'intérieur non vide, de $\mathbb{R}^n$, dont la frontière est $\Gamma_\alpha = H^{-1}(\{\alpha\}) := \{x;\, H(x) = c\}$.

4 A l'aide du Théorème des fonctions implicites (revoir l'énoncé de ce Théorème, et le rôle de la condition : $\nabla H(x) \neq 0$ en tout point de la courbe), montrer que pour tout α, Γ_α est une courbe de classe C^2. Finalement, montrer que cette courbe est une courbe fermée.