M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. TD3

Exercice 1 (Equation linéarisée du pendule)
On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x'' = -a^2\, x \quad \text{avec} \quad a > 0 \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions constantes de (1), et montrer que cette équation différentielle se réécrit comme un système conservatif, et plus précisement que l'intégrale première de ce système est donnée par la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$H(x,v) = \frac{v^2}{2} + a^2\, \frac{x^2}{2}$$
Montrer qu'en posant $x' = a\, y$, le couple (x, y) est solution d'un système différentiel du premier ordre que l'on écrira.
2. Vérifier que localement autour de t_0, les solutions de (1) sont telles que
$$[x'(t)]^2 = [x'(t_0)]^2 + a^2\, \left[x(t_0)^2 - x(t)^2\right]$$
3. Vérifier que les solutions de (1) sont données par intégration directe par la formule
$$x(t) = x(t_0)\, \cos\left(a[t - t_0]\right) + \frac{x'(t_0)}{a}\, \sin\left(a[t - t_0]\right)$$
En déduire que la relation précédente est vérifiée globalement, i.e ; pour tout t.
4. Discuter le comportement des trajectoires, en fonction des conditions initiales $(x(t_0), x'(t_0)) = (x_0, v_0) \in (0, \infty)$. Montrer que les solutions non constantes sont périodiques de période $T = (2\pi)/a$.

Exercice 2 (Couplage amortisseur-ressort) Un amortisseur de voiture est constitué d'un ressort enroulé autour d'un amortisseur. Le premier fournit une force de rappel $x'' = -k^2\, x$, et le second une force égale à $-\alpha v$, où $v = x'(t)$ est la vitesse. Les constantes k et α sont positives.
L'équation du mouvement est donc

$$mx'' + \alpha x' + k^2\, x = -mg,$$

où g est l'accélération de la pesanteur et m la masse. Donner la solution générale de cette équation en fonction des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = x_1$ et des constantes α et k. Discuter l'allure qualitative de la solution en fonction des racines de l'équation caractéristique.

Retrouver ces résultats en posant $v := x'$ et en diagonalisant si c'est possible la matrice A du système linéaire 2x2 obtenu.