M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. TD2

Exercice 1 Lemme de Gronwall Soit α, β et v, des fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $\beta \geq 0$. On suppose que l'inégalité suivante est satisfaite

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

1. On note $w : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$w(t) = \int_a^t \beta(s)\ v(s)\ ds$$

   Vérifier qu'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad w'(t) \leq \beta(t)\ \alpha(t) + \beta(t)\ w(t)$$

2. On note $B : t \in [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction primitive de β définie par

$$B(t) = \int_a^t \beta(s)\ ds$$

   Vérifier que l'on a

$$\forall t \in [a, b] \qquad (e^{-B} w)'(t) \leq e^{-B(t)} \beta(t)\ \alpha(t)$$

   En déduire que

$$\forall t \in [a, b] \qquad w(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \beta(s) \alpha(s) ds$$

3. Démontrer l'inégalité de Gronwall

$$\forall t \in [a, b] \qquad v(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \beta(r) dr}\ \beta(s) \alpha(s) ds$$

Exercice 2 On considère une équation différentielle de type gradient

$$x' = -V'(x) \tag{1}$$

où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction C^1. Vérifier graphiquement que dans le cas général les solutions de ce système convergent vers un minimum (local ou global) de V, lorsque t tend vers l'infini. Vérifier en multipliant les deux membres de l'équation différentielle par $V'(x)$ que pour toute solution $x(.)$ la fonction $t \to V(x(t))$ est bien une fonction décroissante. Est-elle strictement décroissante ? Qu'en déduisez-vous ? Etudier le cas où $V(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$.

Exercice 3 On considére le mouvement d'une bille soumise à la pesanteur et astreinte à rouler sans frottement sur une courbe d'équation $y = V(x)$. Montrer qu'en introduisant l'abscisse curviligne s en tout point de la courbe, le mouvement de la bille obéit à une EDO de la forme :

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -g\varphi'(s),$$

où $\varphi(s) = V(x(s))$.

Exemple : on suppose que $V(x) = -\sqrt{R*^2 - x^2}$. Retrouver ainsi l'équation du pendule, avec une interprétation physique légèrement différente.

Exercice 4 Etudier le comportement en grand temps de la solution $(u(.), v(.))$

$$u' = \lambda u, \qquad v' = \mu v,$$

dans les cas suivants :
a) $\lambda, \mu < 0$, b) $\lambda < 0 < \mu$, c) $\lambda, \mu > 0$, d) $Re(\lambda) = Re(\mu) < 0$, e) $Re(\lambda) = Re(\mu) > 0$.

Exercice 5 (Phénomène de résonance)

Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ le problème de Cauchy

$$y'' + \lambda y = f,$$

avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, où f est une fonction continue et λ un réel strictement positif. Ecrire la solution explicite pour $f(x) = \cos(\omega x)$. La solution est-elle bornée ?

Exercice 6 (Solutions maximales)

Considérons le problème de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz k.

1) Montrer qu'il existe une unique solution maximale.

2) Montrer que cette solution vérifie

$$|y(t) - y_0| \leq |t||f(y_0)|e^{k|t|},$$

pour tout t dans l'intervalle maximal.

3) Montrer que la solution maximale est globale.