M1 Math 2008/09. Systèmes dynamiques. Contrôle du 02/03/2009

Une feuille manuscrite recto-verso autorisée. Calculettes interdites

Exercice 1 On considère les deux fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = \sin x\,;\; f_2(x) = x - x^3.$$

1 Pour chacune de ces fonctions $f_i, i = 1, 2$, étudier rapidement la fonction, tracer son graphe, donner les zéros et dire si la fonction est localement ou globalement Lipschitzienne $f_i, i = 1, 2$.

2 On considère le Problème de Cauchy associé à l'EDO

$$\dot{x_i} = f_i(x), \tag{1}$$

et à la condition initiale : $x(0) = x_0$. Dans chaque cas $i = 1, 2$, que pouvez-vous dire a priori sur l'existence, locale ou globale, et l'unicité de la solution ?

3 Dans chaque cas, discuter graphiquement la stabilité des états d'équilibre de (1). Dans le cas $i = 1$, si $x_0 \in]0, \pi[$, que pensez-vous du comportement de la solution quand $t \to \pm\infty$? Tracer l'allure qualitative de la solution $t \to x_i(t)$ dans ce cas.

4 Dans le cas $i = 2$, pour quels x_0 pensez-vous que la solution est définie pour tout temps $t \geq 0$? Donner d'abord sans démonstration l'allure qualitative du graphe de $x_2(.)$ dans ce cas.
Rappeler ensuite comment on peut justifier ceci en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{x-x^3}$, pour en déduire la solution sous la forme

$$x_2(t) := x(t) := ln\left(|\frac{x+1}{x(0)+1}|^{\,a}\,|\frac{x}{x(0)}|^{\,b}\,|\frac{x-1}{x(0)-1}|^{\,c}\right).$$

Exercice 2 (Equation différentielle linéaire du second ordre.
On considère l'équation différentielle

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t), \tag{2}$$

où a et b sont strictement positives et où la fonction f est supposée connue, continue et bornée pour tout temps.
1 Donner la solution générale de l'EDO homogène associée. Si $f \equiv 0$, en déduire la solution unique du Problème de Cauchy pour (2), avec une donnée initiale arbitraire :

$$x(t_0) = x_0,\; \dot{x}(0) = x_1. \tag{3}$$

dans les trois cas suivants :
(i) $a = b = 1$,

(ii) $a = 2, b = 1$,
(iii) $a = 4, b = 3$.
et montrer que dans les trois cas les solutions sont bornées pour tout temps $t \geq 0$.

2 On veut retrouver ces résultats en écrivant (2) comme un système du premier ordre

$$\dot{X} = A\,X, \tag{4}$$

où $X = (x, y) := (x, \dot{x})$. Montrer d'abord en appliquant Cauchy-Lipschitz l'existence (globale ?) et l'unicité de la solution du Problème de Cauchy associé pour tout couple $X_0 = (x_0, x_1)$. Dans le cas (ii) résoudre ensuite explicitement (4) en diagonalisant la matrice A si c'est possible.

3 On suppose maintenant que $f(t) = e^{-ct}$, avec $c > 0$. Montrer que dans chacun des trois cas, toute solution de (2) reste bornée pour tout temps. Par exemple dans le cas (iii), si $x_0 = 1$ et $x_1 = -c$, avec $c = 10^4$, donner une borne explicite de la solution de (2) , (3). Conclusion ?

Exercice 3 (Pendule)
1 On considère un pendule constitué d'une petite bille de masse m fixée au bout d'une tige rigide de longueur l, elle-même attachée en son autre extrémité à un point O et libre de se mouvoir dans un plan vertical (faire une figure). La bille peut donc se déplacer sur un cercle de centre O et de rayon l.
La position M de la bille est repérée par l'angle balayé depuis sa position d'équilibre, noté θ. Les forces qui s'exercent sur la bille sont la force de gravité $m\vec{g}$ et la force de réaction de la tige (dirigée selon la direction de la tige elle-même).
Appliquer la loi de Newton : $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ et projeter sur la droite OM, pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement de la bille :

$$l\theta'' = -g \sin\theta,$$

où g est le module de $\vec{g}$.
2 On considère maintenant le système équivalent

$$\begin{cases} \theta' = \omega, \\ \omega' = -K\sin\theta, \end{cases} \tag{5}$$

où l'on a posé $K = g/l$. on note $X = (X_1, X_2) := (\theta, \omega)$ et $F(X)$ le second membre de (5). Peut-on affirmer l'existence et l'unicité d'une solution globale du problème de Cauchy associé à (5), pour toute donnée initiale

$$(\theta(0),\, \omega(0)) = (\theta_0,\, \omega_0) \text{ ?} \tag{6}$$

Pour cela, chercher la meilleure constante de Lipschitz de F, en munissant $\mathbb{R}^2$ de la norme du sup : $||X||_\infty = \max(|X_1|, |X_2|)$.
3 On pose $H(\theta, \omega) := \omega^2/2 - K\cos\theta$. Montrer en calculant sa dérivée par rapport au temps que la fonction : $t \to E(t) := H(\theta(t), \omega(t))$ est invariante au

cours du temps : on dit que le système (5) est conservatif, et que H est une intégrale première de ce système. Physiquement,

$$mlE(t) = mlH(\theta(t), \omega(t)) = ml\omega(t)^2/2 - mg\cos\theta(t)$$

est l'énergie mécanique totale (cinétique plus potentielle) du système.

Montrer plus précisément que (5) es§équivalent au système :

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\partial}{\partial\omega}(\theta, \omega), \\ \omega' = -\frac{\partial}{\partial\theta}(\theta, \omega). \end{cases} \tag{7}$$

On dit que (7) est un système Hamiltonien, dont H est l'Hamiltonien. Tout système Hamiltonien est donc conservatif. Cherchez un exemple qui montre que la réciproque est fausse.