

Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Witten

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— Sur toute variété compacte de dimension supérieure ou égale à 4, on prescrit le volume et le début du spectre du laplacien de Witten agissant sur les p -formes différentielles pour $0 < p < n$. En particulier, on prescrit la multiplicité des premières valeurs propres. Sur les variétés de dimension 3, on construit des exemples de première valeur propre multiple pour les 1-formes, dont la multiplicité dépend du genre maximal des surfaces immergées dont toute la 1-cohomologie est induite par la cohomologie de la variété. En particulier, cette multiplicité est au moins égale à 3.

Mots-clefs : laplacien de Witten, formes différentielles, multiplicité de valeurs propres.

ABSTRACT.— On any compact manifold of dimension greater than 4, we prescribe the volume and any finite part of the spectrum of the Witten Laplacian acting on p -form for $0 < p < n$. In particular, we prescribe the multiplicity of the first eigenvalues. On 3-dimensional manifolds, we give examples of multiple first eigenvalue for 1-forms, whose multiplicity depends on the maximal genus of embedded surfaces all of whose 1-cohomology is induced by the cohomology of the manifold. In particular, this multiplicity is at least 3.

Keywords : Witten Laplacian, differential forms, multiplicity of eigenvalues.

MSC2000 : 58J50

1. Introduction

Depuis que S. Y. Cheng a montré dans [Ch76] que la multiplicité de la k -ième valeur propre du laplacien sur une surface compacte est majorée en fonction de k et de la topologie, ce problème de multiplicité pour le laplacien agissant sur les fonctions a fait l'objet de nombreux travaux. En dimension 2, la majoration de Cheng, qui est aussi valable pour les opérateur de Schrödinger, a été améliorée (voir [Be80], [Na88], [HHN99]), la meilleure estimation pour la multiplicité de la 2^e valeur propre d'un opérateur de Schrödinger ayant été obtenue par B. Sévenec ([Sé94], [Sé02]). On sait aussi que pour les opérateurs avec champ magnétique, la multiplicité des valeurs propres peut être arbitrairement grande ([CdVT93], [BCC98], [Er02]). En dimension supérieure ou égale à 3, Y. Colin de Verdière a montré ([CdV86], [CdV87]) que toute rigidité disparaît et qu'on peut arbitrairement prescrire le début du spectre avec multiplicité, et J. Lohkamp a amélioré ce résultat en montrant

dans [Lo96] qu'on pouvait prescrire simultanément le début du spectre, le volume et certains invariants de courbure.

Pour les opérateurs agissants sur les fibrés vectoriels naturels, ce problème est longtemps resté ouvert. Dans [Gu04], P. Guérini a montré qu'on peut prescrire toute partie finie du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles, mais en imposant aux valeurs propres prescrites d'être simples. Un résultat semblable a été obtenu par M. Dahl pour l'opérateur de Dirac ([Da05]).

Un premier résultat de multiplicité est obtenu dans [Ja09], où on construit un nombre arbitraire de valeurs propres doubles pour le laplacien de Hodge-de Rham. Plus récemment, j'ai montré dans [Ja11] qu'on pouvait étendre le résultat de Colin de Verdière en prescrivant le début du spectre du laplacien de Hodge-de Rham avec multiplicité sur les variétés de dimension supérieure ou égale à 6, mais la technique échoue dans le cas des petites dimensions, des formes de degré $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et de la première valeur propres des 1-formes.

Le but de cet article est de montrer qu'en dimension supérieure ou égale à 4, on peut prescrire le spectre du laplacien de Witten sans restriction sur le degré. Cet opérateur, agissant sur les formes différentielles, a été popularisé par E. Witten dans [Wi82], où il l'utilise entre autres pour redémontrer les inégalités de Morse (voir par exemple [He85]). Contrairement à ce qui se fait habituellement, nous n'étudierons pas ici la limite semi-classique de cet opérateur. On utilisera plutôt le fait que l'étude du spectre du laplacien de Witten revient à découpler la métrique et la mesure (cette notion sera précisée dans la section 2). Cet opérateur peut être vu comme un analogue de l'opérateur de Schrödinger pour les formes différentielles : dans le cas des formes de degré 0, c'est-à-dire des fonctions, on retrouve tous les opérateurs de Schrödinger dont la première valeur propre est nulle.

Rappelons la définition de cet opérateur (voir la section 2 pour plus de détails). Étant données une variété compacte M^n et une fonction $\varphi \in C^\infty$, on définit une différentielle tordue par $\tilde{d}\omega = d\omega + d\varphi \wedge \omega$ et on note $\tilde{\delta}$ son adjoint. Le laplacien de Witten est alors défini par $\tilde{\Delta}_\varphi = \tilde{d}\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\tilde{d}$. On retrouve le laplacien de Hodge quand φ est constante. La théorie de Hodge s'applique au laplacien de Witten, en particulier on a une décomposition de Hodge $\Omega^p(M) = \tilde{d}\Omega^{p-1}(M) \oplus \text{Ker } \tilde{\Delta}_\varphi \oplus \tilde{\delta}\Omega^{p+1}(M)$, qui est stable par le laplacien. Si on note

$$0 < \tilde{\mu}_{p,1}(M, g, \varphi) \leq \tilde{\mu}_{p,2}(M, g, \varphi) \leq \dots \quad (1.1)$$

Les valeurs propres du laplacien de Witten en restriction à $\tilde{\delta}\Omega^{p+1}(M)$, alors son spectre en restriction à $\tilde{d}\Omega^{p-1}(M)$ est $(\tilde{\mu}_{p-1,i}(M, g, \varphi))$. Le spectre non nul du laplacien de Witten se déduit donc des $\tilde{\mu}_{p-1,i}(M, g, \varphi)$, $0 \leq p \leq n-1$.

Avec ces notations, le premier résultat de cet article peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1.2. *Soit M^n une variété compacte connexe orientable (avec ou sans bord) de dimension $n \geq 4$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si on se donne un réel $V > 0$ et*

et des suites $0 < a_{p,1} \leq a_{p,2} \leq \dots \leq a_{p,N}$ pour $1 \leq p \leq n-1$, alors il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que

- $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi) = a_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq n-1$;
- $\text{Vol}(M, g) = V$.

On peut donc en particulier prescrire la multiplicité des premières valeurs propres pour tous les degrés non nuls simultanément.

Comme dans [Ja11], certaines techniques échouent en dimension 3. On peut cependant construire une première valeur propre dont la multiplicité dépend de la topologie, étendant ainsi un résultat que Colin de Verdière avait obtenu sur les surfaces. Étant donnée une surface compacte Σ , et en notant $C(\Sigma)$ le nombre chromatique de Σ , c'est-à-dire le plus grand entier k tel que le graphe complet à k sommets se plonge dans Σ , il montre dans [CdV87] qu'il existe un opérateur de Schrödinger sur Σ dont la multiplicité de la 2^e valeur propre est $C(\Sigma) - 1$. Le résultat qu'on peut obtenir en dimension 3 est le suivant :

Théorème 1.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3. Pour toute surface plongée $\Sigma \hookrightarrow M$ telle que l'application naturelle $H^1(M) \rightarrow H^1(\Sigma)$ en cohomologie de Rham soit surjective, il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que $\tilde{\mu}_{1,1}(M, g, \varphi)$ soit de multiplicité $C(\Sigma) - 1$.*

Remarque 1.4. La condition de surjectivité de $H^1(M) \rightarrow H^1(\Sigma)$ peut s'interpréter comme un analogue cohomologique de la notion de surface incompressible.

Le seul résultat de multiplicité en dimension 3 pour le laplacien de Hodge de Rham était jusqu'à présent la construction de valeurs propres doubles donnée dans [Ja09]. En appliquant le théorème 1.3 avec $\Sigma = S^2$, on obtient qu'on peut toujours faire mieux pour la première valeur propre du laplacien de Witten :

Corollaire 1.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3. Il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que $\tilde{\mu}_{1,1}(M, g, \varphi)$ soit de multiplicité 3.*

L'article est organisé comme suit : la section 2 est consacrée à des rappels sur la théorie du laplacien de Witten et à la démonstration de quelques lemmes techniques. On verra en particulier qu'on peut définir son spectre sans introduire la différentielle tordue en remplaçant la mesure riemannienne dv_g par la mesure $e^{-2\varphi}dv_g$ (lemme 2.22). On montrera dans la section 3 un résultat de rigidité conforme du spectre qui généralise celui obtenu dans [Ja07b] pour le laplacien de Hodge et qui sera utilisé dans la section suivante. Dans les sections 4 et 5 on donnera deux résultats de convergence spectrale pour le laplacien de Witten. Le premier traite de la convergence

du spectre d'une variété vers celui d'un de ses domaines, généralisant des résultats obtenus pour le laplacien agissant sur les fonctions [CdV86] et le laplacien de Hodge [Ja11]. Le second concerne les variétés privées d'une petite boule et généralise un théorème de C. Anné et B. Colbois [AC93]. Enfin, on démontrera dans la dernière section les théorèmes 1.2 et 1.3 en utilisant les deux théorèmes de convergence spectrale.

Ce travail a été mené avec le soutien du projet ANR Geodycos.

2. Théorie de Hodge et conditions de bord pour le laplacien de Witten

2.1. Laplacien de Witten

On va rappeler dans ce paragraphe la définition et les propriétés élémentaires du laplacien de Witten. On peut se référer à [Wi82] ou [HN06] pour une présentation plus complète.

Étant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on définit une différentielle tordue $\tilde{d} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ par

$$\tilde{d}\omega = e^{-\varphi} d(e^\varphi \omega) = d\omega + d\varphi \wedge \omega \quad (2.1)$$

et une codifférentielle tordue $\tilde{\delta} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ par

$$\tilde{\delta}\omega = e^\varphi \delta(e^{-\varphi} \omega) = \delta\omega + \mathbf{i}_{\nabla\varphi} \omega. \quad (2.2)$$

On peut vérifier que ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre. Le laplacien de Witten associé à φ est alors défini par

$$\tilde{\Delta}_\varphi = \tilde{d}\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\tilde{d} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M). \quad (2.3)$$

On peut réécrire le laplacien de Witten sous les formes suivantes :

Théorème 2.4. *Pour toute fonction φ , on a*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\varphi &= \Delta + |d\varphi|^2 + \mathcal{L}_{\nabla\varphi} + \mathcal{L}_{\nabla\varphi}^* \\ &= \Delta + |d\varphi|^2 + \Delta\varphi - (\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g_p) \\ &= \Delta + |d\varphi|^2 + \Delta\varphi + 2(\text{Hess } \varphi). \end{aligned}$$

Précisons les notations de cet énoncé : $\mathcal{L}_{\nabla\varphi}$ désigne la dérivée de Lie par rapport à $\nabla\varphi$, $\mathcal{L}_{\nabla\varphi}^*$ son adjoint L^2 et g_p la métrique induite par g sur le fibré des p -formes. Par conséquent, $\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g_p$ est ponctuellement une forme quadratique sur $\Lambda^p TM$ qu'on identifie à l'endomorphisme symétrique de $\Lambda^p TM$ canoniquement associé. Le hessien $\text{Hess } \varphi$ de φ est une forme bilinéaire symétrique sur les champs de vecteur, donc sur les 1-formes, qu'on identifie là encore à

un endomorphisme de $\Lambda^1 TM$. On l'étend à $\Lambda^p TM$ de la manière suivante : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\Lambda^1 TM$, alors

$$(\text{Hess } \varphi)(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \sum_i e_1 \wedge \dots \wedge e_{i-1} \wedge \text{Hess } \varphi(e_i) \wedge e_{i+1} \wedge \dots \wedge e_p. \quad (2.5)$$

La première égalité du théorème 2.4 s'obtient en développant l'expression (2.3). La démonstration des autres équations est rarement détaillée dans la littérature, nous la rappelons en appendice.

En outre, le laplacien de Witten vérifie la relation de commutation suivante avec le dualité de Hodge :

$$\tilde{\Delta}_\varphi^* = * \tilde{\Delta}_{-\varphi} \quad (2.6)$$

Cette relation implique que $\tilde{\mu}_{p,i}(g, \varphi) = \tilde{\mu}_{n-p-1,i}(g, -\varphi)$.

Le spectre du laplacien de Hodge-de Rham sur le produit riemannien de deux variétés peut se calculer à l'aide de la formule de Künneth. On démontre ci-dessous la généralisation de cette formule au laplacien de Witten, qui nous sera utile pour la construction de valeurs propres multiples.

Théorème 2.7 (Formule de Künneth). *Soit (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés riemanniennes, $\varphi_i \in C^\infty(M_i)$ deux fonctions et $\alpha_i \in \Omega(M_i)$ deux formes différentielles sur les variétés M_1 et M_2 . Alors on a sur le produit riemannien $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$*

$$\tilde{\Delta}_\varphi(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \tilde{\Delta}_{\varphi_1} \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \tilde{\Delta}_{\varphi_2} \alpha_2$$

où $\varphi \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ est définie par $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, les formes α_i et les fonctions φ_i étant identifiées à leur relevé sur $M_1 \times M_2$.

Démonstration : On va exploiter l'une des expressions du laplacien de Witten données par le théorème 2.4.

On sait que pour le laplacien de Hodge-de Rham, on a

$$\Delta(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = \Delta \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \Delta \alpha_2. \quad (2.8)$$

Comme $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont orthogonaux pour la métrique $g_1 \oplus g_2$, on a aussi

$$|d\varphi|^2 = |d\varphi_1|^2 + |d\varphi_2|^2. \quad (2.9)$$

Enfin, chaque fonction φ_i ne varie que dans la direction de M_i , donc le hessien $\text{Hess } \varphi$ agissant sur $\Omega^1(M_1 \times M_2)$ prend la forme

$$\text{Hess } \varphi = \text{Hess } \varphi_1 \oplus \text{Id}_{\Lambda^1 TM_2} + \text{Id}_{\Lambda^1 TM_1} \oplus \text{Hess } \varphi_2. \quad (2.10)$$

Étendu au p -formes à l'aide de (2.5), s'écrit

$$(\text{Hess } \varphi)(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (\text{Hess } \varphi_1)\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge (\text{Hess } \varphi_2)\alpha_2 \quad (2.11)$$

On obtient la formule souhaitée en sommant (2.8), (2.9), et (2.11). ■

2.2. Cohomologie

La différentielle tordue vérifie $\tilde{d}^2 = 0$ et la théorie de Hodge s'applique à $\tilde{d}$. Le noyau de $\tilde{\Delta}_\varphi$ en restriction aux p -formes est donc isomorphe à la cohomologie de $\tilde{d}$. Il s'avère que la dimension de cette cohomologie ne dépend pas de φ , cela découle de la remarque suivante :

Lemme 2.12. *Si on pose $T_\varphi\omega = e^\varphi\omega$ alors $T_\varphi\tilde{d} = dT_\varphi$. En particulier, l'application T_φ est un isomorphisme du noyau (resp. l'image) de $\tilde{d}$ vers le noyau (resp. l'image) de d .*

Ce lemme interviendra plusieurs fois par la suite, et on en déduit dès à présent :

Corollaire 2.13. *Les cohomologies de $\tilde{d}$ et d sont isomorphes. Si h est une p -forme $\tilde{\Delta}_\varphi$ -harmonique, alors h minimise la norme L^2 pour la mesure dv_g dans sa classe de $\tilde{d}$ -cohomologie. De plus, $T_\varphi h$ est d -fermée et minimise la norme L^2 pour la mesure $dv_\varphi = e^{-2\varphi}dv_g$ dans sa classe de d -cohomologie.*

Démonstration : L'isomorphie entre les cohomologies découle immédiatement du lemme 2.12.

Le fait que h minimise la norme L^2 pour la mesure dv_g résulte du fait que $\tilde{\delta}h = 0$ et donc que h est orthogonale au forme $\tilde{d}$ -exacte.

Enfin, $T_\varphi h$ est fermée d'après le lemme 2.12, et si α est une $(p-1)$ -forme, alors $\int_M \langle T_\varphi h, d\alpha \rangle dv_\varphi = \int \langle e^{-\varphi} T_\varphi h, e^{-\varphi} d\alpha \rangle dv_g = \int \langle h, \tilde{d}(e^{-\varphi}\alpha) \rangle dv_g = 0$. Par conséquent, $T_\varphi h$ est orthogonale pour la mesure dv_φ aux formes d -exactes, donc minimise la norme L^2 pour la mesure dv_φ dans sa classe de d -cohomologie. ■

2.3. Variétés à bord

Les énoncés des théorèmes de convergence spectrale et les démonstrations des résultats de multiplicité font intervenir des variétés à bord. Nous rappelons ou démontrons ici quelques propriétés du laplacien de Witten dans ce cadre.

Si U est un domaine à bord C^1 d'une variété compacte M , on note $j : \partial U \rightarrow \bar{U}$ l'injection canonique et N un champ de vecteur normal au bord. Les conditions de bord classiques du laplacien de Hodge-de Rham se généralisent au laplacien de Witten. La condition absolue (A_φ) s'écrit

$$(A_\varphi) \quad \begin{cases} j^*(\mathbf{t}_N \omega) = 0 \\ j^*(\mathbf{t}_N \tilde{d}\omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\tilde{d}\omega) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

et la condition relative (R_φ) est définie par

$$(R_\varphi) \quad \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\tilde{\delta}\omega) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Quand $\varphi = 0$, on retrouve les conditions absolues et relatives usuelles du laplacien de Hodge.

La dualité de Hodge transforme la condition (A_φ) en la condition $(R_{-\varphi})$, ce qui est cohérent avec la formule 2.6. B. Heffler et F. Nier montrent dans [HN06] que la condition (R_φ) est admissible, c'est-à-dire que l'opérateur associé est elliptique, il en va donc de même pour la condition (A_φ) . En outre, L'opérateur $T : \omega \rightarrow e^\varphi \omega$ défini dans le lemme 2.12 transforme la condition (A_φ) en la condition (A_0) .

Le corollaire 2.13 est valable dans ce contexte. En particulier, si h est une forme $\tilde{\Delta}_\varphi$ harmonique vérifiant la condition (A_φ) , alors $T_\varphi h$ est fermée, vérifie la condition (A_0) et minimise la norme L^2 pour la mesure dv_φ dans sa classe de cohomologie.

On utilisera aussi la condition suivante, qui généralise la condition de Dirichlet pour les fonctions :

$$(D) \quad \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\ast\omega) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Elle n'interviendra que pour le laplacien de Hodge, et on utilisera principalement le fait que pour cette condition, le noyau du laplacien est trivial (voir [An89]), et donc que son spectre est strictement positif.

Pour finir ce paragraphe nous allons donner la généralisation suivante d'un résultat connu pour la différentielle standard. Cette propriété interviendra en particulier au paragraphe suivant pour donner une caractérisation variationnelle du spectre sur les variétés à bord (propositions 2.20 à 2.22) :

Théorème 2.17. *Si ω est une forme exacte pour la différentielle tordue $\tilde{d}$ sur $\overline{U}$, alors il existe une forme ψ vérifiant la condition (A_φ) et telle que $\omega = \tilde{d}\tilde{\delta}\psi$. En particulier, la forme $\theta = \tilde{\delta}\psi$ vérifie $j^*(\iota_N\theta) = 0$, est orthogonale aux formes α telles que $\tilde{d}\alpha = 0$ et minimise la norme L^2 dans $\tilde{d}^{-1}\omega$.*

En outre, la forme ω est contenue dans l'adhérence L^2 des formes exactes vérifiant la condition (A_φ) .

Remarque 2.18. Le fait que θ minimise la norme L^2 dans $\tilde{d}^{-1}\omega$ est équivalent au fait que $T_\varphi\theta$, qui vérifie la condition de bord (A_0) , minimise la norme L^2 relative à la mesure $e^{-2\varphi}dv_g$ dans $d^{-1}T_\varphi\omega$.

Grâce au lemme qui suit, la démonstration est exactement la même que pour la différentielle standard (voir [Ja11], proposition 2.4).

Lemme 2.19 (intégration par partie). *Si $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^{p+1}(U)$ alors*

$$(\tilde{d}\alpha, \beta) = (\alpha, \tilde{\delta}\beta) + \int_{\partial U} j^*(\alpha \wedge \ast\beta).$$

Démonstration : D'une part, on a la formule classique $(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta) + \int_{\partial U} j^*(\alpha \wedge *\beta)$ qui découle de la formule de Stokes. D'autre part, le produit intérieur par un vecteur est l'adjoint du produit extérieur par la 1-forme duale, c'est-à-dire qu'en tout point $x \in U$, $\langle d\varphi \wedge \alpha, \beta \rangle_x = \langle \alpha, \mathbf{i}_{\nabla\varphi}\beta \rangle_x$. Comme cette formule est ponctuelle, son intégrale sur U ne fait pas apparaître de terme de bord. L'addition des deux équations donne le résultat souhaité. ■

2.4. Caractérisations du spectre du laplacien de Witten

L'étude du spectre du laplacien de Hodge-de Rham est grandement facilitée par le principe variationnel suivant qui remonte à J. Dodziuk et qui reste valable pour le laplacien de Witten :

Proposition 2.20 ([Do82], [Mc93]). *Sur une variété compacte sans bord ou avec condition de bord (A_φ) , on a*

$$\tilde{\mu}_{p,i} = \inf_{V_i} \sup_{\omega \in V_i \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\omega\|^2}{\|\theta\|^2}, \tilde{d}\theta = \omega \right\},$$

où V_i parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension i dans l'espace des $p+1$ -formes exactes lisses.

Ici encore, comme la théorie de Hodge fonctionne pour $\tilde{d}$, la démonstration est la même que dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham. Dans le cas à bord, le fait qu'on obtienne le spectre pour la condition (A_φ) même si on exige aucune condition sur ω et θ découle du théorème 2.17 (en particulier du fait que l'adhérence des formes exactes vérifiant (A_φ) contient toutes les formes exactes de $\overline{U}$).

Comme remarqué dans [Ja11], on peut reformuler ce résultat de la manière suivante :

Proposition 2.21. *Le spectre et les espaces propres du laplacien de Witten en restriction à $\text{Im } \tilde{d}$ sont ceux de la forme quadratique $Q(\omega) = \|\omega\|_{L^2}^2$ relativement à la norme $|\omega| = \inf_{\tilde{d}\theta=\omega} \|\theta\|_{L^2}$.*

Enfin, grâce au lemme 2.12, on peut donner cette autre formulation qui fait appel à la différentielle d au lieu de $\tilde{d}$, et qui montre qu'on peut interpréter le laplacien de Witten par un découplage entre la métrique et la mesure. C'est sous cette forme qu'on utilisera cette caractérisation du spectre.

Proposition 2.22. *Le spectre et les espaces propres, transportés par T_φ , du laplacien de Witten en restriction à $\text{Im } \tilde{d}$ sont ceux de la forme quadratique $Q(\omega) = \int_M |\omega|^2 dv_\varphi$ définie sur les formes exactes, relativement à la norme $|\omega| = \inf_{d\theta=\omega} \int_M |\theta|^2 dv_\varphi$, où dv_φ désigne la mesure $e^{-2\varphi} dv_g$.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que si on a $\tilde{d}\tilde{\theta} = \tilde{\omega}$, et qu'on pose $\omega = T_\varphi \tilde{\omega}$ et $\theta = T_\varphi \tilde{\theta}$, alors $T_\varphi \tilde{d}\tilde{\theta} = dT_\varphi \tilde{\theta} = T_\varphi \tilde{\omega}$, donc $d\theta = \omega$. Par ailleurs, on a aussi $\int |\tilde{\omega}|^2 dv_g = \int |\omega|^2 e^{-2\varphi} dv_g$ et $\int |\tilde{\omega}|^2 dv_g = \int |\omega|^2 e^{-2\varphi} dv_g$. ■

Remarque 2.23. Comme dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham, on peut déduire de la proposition 2.22 que le spectre du laplacien de Witten est continu pour la topologie C^0 sur l'espace des métriques. On peut aussi en déduire la continuité C^0 du spectre par rapport à φ , ce qui n'était pas du tout évident dans les expressions du théorème 2.4.

3. Minoration du spectre dans une classe conforme pondérée et inégalités de Sobolev

Le but de cette section est de généraliser au laplacien de Witten une minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham obtenue dans [Ja07b]. Plus précisément, étant donné une métrique g , une fonction φ et un réel $\alpha > 0$, on définit la classe conforme pondérée de poids α de (g, φ) par

$$[g, \varphi]_\alpha = \{ (e^{2u}g, \varphi - \alpha u), u \in C^\infty(M) \}. \quad (3.1)$$

On va montrer que pour certains degrés p , dépendants de α , la valeur propre $\tilde{\mu}_{p,1}(M, g, \varphi)$ est uniformément minorée sur $[g, \varphi]_\alpha$, à volume fixé. Le cas traité dans [Ja07b] correspond à $\varphi = 0$, $\alpha = 0$ et $p \in [\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}]$.

Théorème 3.2. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n , φ une fonction sur M , $\alpha > 0$ un réel et $p \in [1, n]$ un entier. Si $p \in [\frac{n}{2} - \alpha - 1, \frac{n}{2} - \alpha]$. Alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de la classe conforme pondérée $[g, \varphi]_\alpha$ telle que*

$$\tilde{\mu}_{p,1}(M, g, \varphi) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \geq c.$$

Ce théorème repose sur l'existence d'inégalités de Sobolev pour les formes différentielles. Ces inégalités sont apparues sous la plume de V. Gol'dshtein et M. Troyanov [GT06], et certaines des constantes qu'elles font intervenir sont des invariants conformes. Nous allons ici en donner une version « à poids » qui permettra l'application au laplacien de Witten. On pourrait déduire ces inégalités des résultats de [GT06], mais par soucis d'exhaustivité on va les montrer d'une manière plus directe en utilisant une méthode qui était déjà esquissée dans [Ja07a]. Avant de démontrer le théorème 3.2, nous allons donc donner deux lemmes, l'un sur l'existence d'inégalités de Sobolev et l'autre sur l'invariance conforme pondérée de certaines des constantes de Sobolev associées. Par commodité, pour un réel $r > 1$, on notera $\|\omega\|_{r,\varphi}$ la norme L^p de ω pour la mesure $e^{-r\varphi} dv_g$.

Lemme 3.3. Soit (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n , φ une fonction sur M et $p \in [1, n]$ un entier. Si $r, s > 1$ sont deux réels tels que $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$ il existe une constante $K > 0$ dépendant de g, p, φ, r et s telle que

$$\inf_{d\theta=0} \|\omega - \theta\|_{r,\varphi} \leq K \|d\omega\|_{s,\varphi}.$$

Démonstration : L'opérateur $\tilde{d} + \tilde{\delta}$ est elliptique, donc il existe des constantes $A > 0$ et $B > 0$ dépendant de g et φ telles que si $\omega \in \Omega^p(M)$ est orthogonale à son noyau, alors $\|\nabla \omega\|_s \leq A \|\tilde{d}\omega\|_s + B \|\tilde{\delta}\omega\|_s$. De plus, toujours en supposant que ω est orthogonale au noyau de $\tilde{d} + \tilde{\delta}$ (donc aux formes parallèles), on a l'inégalité de Sobolev $\|\omega\|_r \leq A' \|\nabla \omega\|_s$ pour une constante $A' > 0$ ne dépendant que de g . Par théorie de Hodge, il existe une forme $\theta \in \Omega^p(M)$ telle que $\tilde{d}\theta = 0$ et $\tilde{\delta}(\omega - \theta) = 0$. En appliquant les inégalités précédentes à $\omega - \theta$ on obtient

$$\|\omega - \theta\|_r \leq A' A \|\tilde{d}\omega\|_s. \quad (3.4)$$

Si on pose $\omega' = T_\varphi \omega$ et $\theta' = T_\varphi \theta$, la condition $\tilde{d}\theta = 0$ devient $d\theta' = 0$ et les normes précédentes s'écrivent

$$\|\omega - \theta\|_r = \left(\int_M e^{-r\varphi} |\omega' - \theta'|^r dv_g \right)^{\frac{1}{r}} = \|\omega' - \theta'\|_{r,\varphi} \quad (3.5)$$

et

$$\|\tilde{d}\omega\|_s = \left(\int_M e^{-s\varphi} |d\omega'|^s dv_g \right)^{\frac{1}{s}} = \|d\omega'\|_{s,\varphi}. \quad (3.6)$$

On a donc montré l'existence d'une constante $K = A'A > 0$ telle que pour toute forme ω' , il existe une forme fermée θ' telle que $\|\omega' - \theta'\|_{r,\varphi} \leq K \|d\omega'\|_{s,\varphi}$. L'inégalité du lemme s'en déduit immédiatement. ■

Lemme 3.7. Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n , φ une fonction sur M et $p \in [1, n]$ un entier, et α un réel. alors la constante

$$\sup_{\omega \in \Omega^p(M)} \inf_{d\theta=0} \frac{\|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi}}{\|d\omega\|_{\frac{n}{p+1-\alpha}, \varphi}}$$

est strictement positive et est un invariant de la classe conforme pondérée $[g, \varphi]_\alpha$ qu'on notera $K_p(M, [g, \varphi]_\alpha)$.

Démonstration : Si on pose $r = \frac{n}{p-\alpha}$ et $s = \frac{n}{p+1-\alpha}$, on a $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$ et on peut donc appliquer l'inégalité de Sobolev du lemme 3.3, ce qui garantit que la constante définie par le lemme est strictement positive.

Si on note $(g_u, \varphi_u) = (e^{2u}g, \varphi - \alpha u)$ un élément de la classe $[g, \varphi]_\alpha$, et si $\omega \in \Omega^p(M)$, alors la norme $\|\omega\|_{r, \varphi_u}$ calculé pour la métrique g_u vaut :

$$\begin{aligned} \int_M |\omega|_{g_u}^r e^{-r\varphi_u} dv_{g_u} &= \int_M e^{-p\frac{n}{p-\alpha}u} |\omega|_g^r e^{-r\varphi - \frac{n}{p-\alpha}\alpha u} e^{nu} dv_g \\ &= \int_M |\omega|_g^r e^{-r\varphi} dv_g. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Cette norme est donc constante sur la classe conforme pondérée. Par conséquent, il en va de même pour les deux normes $\|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi}$ et $\|d\omega\|_{\frac{n}{p+1-\alpha}, \varphi}$ qui définissent la constante de Sobolev et de cette constante elle-même. ■

Démonstration du théorème 3.2 : Par commodité, on supposera dans la démonstration que la variété M^n est de volume 1.

Selon la proposition 2.22 on doit minorer le quotient $\|d\omega\|_{\frac{n}{p+1-\alpha}, \varphi}^2 / (\inf_{d\theta=0} \|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi}^2)$. Pour ce faire, on remarque la condition sur α peut se réécrire $\frac{n}{p-\alpha} \geq 2$ et $\frac{n}{p+1-\alpha} \leq 2$. Donc, selon l'inégalité de Hölder, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant de g et φ mais pas des formes ω et θ telles que $\|\omega - \theta\|_{2, \varphi} \leq C_1 \|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi}$ et $\|d\omega\|_{\frac{n}{p+1-\alpha}, \varphi} \leq C_2 \|d\omega\|_{2, \varphi}$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|\omega - \theta\|_{2, \varphi} &\leq C_1 \|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi} \leq C_1 K_p(M, [g, \varphi]_\alpha) \|d\omega\|_{\frac{n}{p+1-\alpha}, \varphi} \\ &\leq C_1 C_2 K_p(M, [g, \varphi]_\alpha) \|d\omega\|_{2, \varphi} \end{aligned} \quad (3.9)$$

et donc

$$\frac{\|d\omega\|_{2, \varphi}^2}{\inf_{d\theta=0} \|\omega - \theta\|_{\frac{n}{p-\alpha}, \varphi}^2} \geq \frac{1}{C_1^2 C_2^2 K_p(M, [g, \varphi]_\alpha)^2}. \quad (3.10)$$

La constante c du théorème est donc le membre de droite de l'inégalité précédente. ■

4. Convergence du spectre vers celui d'un domaine

Nous allons maintenant montrer qu'on peut faire tendre le spectre du laplacien de Witten sur une variété compacte vers celui d'un domaine. Ce résultat de convergence spectrale généralise à la fois les théorèmes obtenus pour les laplaciens agissant sur les fonctions ([CdV86]) et sur les formes différentielles ([Ja11]), et un résultat analogue obtenu par Y. Colin de Verdière dans [CdV87] pour le laplacien de Witten restreint aux fonctions.

Pour appliquer ce résultat, nous aurons besoin d'une certaine uniformité de la convergence, nous reprendrons pour cela les notations de [CdV86] :

Soit E_0 et E_1 sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension N d'un espace de Hilbert, munis respectivement des formes quadratiques q_0 et q_1 . Si E_0 et E_1 sont suffisamment proches, il existe une isométrie naturelle

ψ entre les deux (voir la section I de [CdV86] pour les détails de la construction), on définit alors l'écart entre q_0 et q_1 par $\|q_1 \circ \psi - q_0\|$. Pour deux formes quadratiques Q_0 et Q_1 sur l'espace de Hilbert, on appellera *N-écart spectral entre Q_0 et Q_1* l'écart entre les deux formes quadratiques restreintes à la somme des espaces propres associés aux N premières valeurs propres. Si cet écart est petit, alors les N premières valeurs propres de Q_0 et leurs espaces propres sont proches de ceux de Q_1 .

On veut montrer que la convergence spectrale est uniforme pour une certaine famille de spectres limites. Comme dans [CdV86] on dira donc qu'une forme quadratique vérifie l'hypothèse (*) si ses valeurs propres vérifient

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N < \lambda_N + \eta \leq \lambda_{N+1} \leq M$$

pour un entier N et des réels $\eta, M > 0$ fixés une fois pour toute.

Comme dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham, le procédé de convergence fait apparaître un certain nombre de petites valeurs propres. Pour les compter précisément, on introduit un espace de cohomologie qui traduit l'interaction entre la cohomologie du domaine U et celle de la variété M , et qui est défini comme le quotient des formes fermées de U par la restriction des formes fermées de M :

$$H^p(U/M) = \{\omega \in \Omega^p(\bar{U}), d\omega = 0\} / \{\omega|_{\bar{U}}, \omega \in \Omega^p(M) \text{ et } d\omega = 0\} \quad (4.1)$$

Comme on l'a remarqué dans [Ja11], cet espace est isomorphe au quotient de $H^p(U)$ par l'image de l'application naturelle $H^p(M) \rightarrow H^p(U)$ définie par restriction des formes fermées et exactes. En particulier, $H^p(U/M)$ est de dimension finie.

Le théorème que nous allons démontrer donne une convergence pour tous les degrés sauf un ou deux, en fixant la classe conforme pondérée :

Théorème 4.2. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n et U un domaine de M à bord C^1 dont le bord ne rencontre pas celui de M , φ une fonction sur M et $\alpha > 0$ un réel. Il existe une suite de métriques g_i et une suite de fonctions φ_i sur M et une constante $c > 0$ telles que pour tout i , $(g_i, \varphi_i) \in [g, \varphi]_\alpha$ et*

1. $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g_i, \varphi_i) \rightarrow 0$ pour tout $k \leq d_p$ et tout $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$ quand $i \rightarrow \infty$;
2. $\tilde{\mu}_{p,k+d_p}(M, g_i, \varphi_i) \rightarrow \tilde{\mu}_{p,k}(U, g, \varphi)$ pour tout $k \geq 1$ et tout $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$ quand $i \rightarrow \infty$;
3. $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g_i, \varphi_i) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} > c$ pour $p \in [\frac{n}{2} + \alpha - 1, \frac{n}{2} + \alpha]$;
4. $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g_i, \varphi_i) \rightarrow 0$ pour tout $k \leq d_{n-p-1}$ et tout $p \in]\frac{n}{2} + \alpha, n - 1]$ quand $i \rightarrow \infty$;
5. $\tilde{\mu}_{p,k+d_p}(M, g_i, \varphi_i) \rightarrow \tilde{\mu}_{n-p-1,k}(U, g, -\varphi)$ pour tout $k \geq 1$ et tout $p \in]\frac{n}{2} + \alpha, n - 1]$ quand $i \rightarrow \infty$;

où d_p est la dimension de $H^p(U/M)$.

En outre, si les $\tilde{\mu}_{p,k}(U, g, \varphi)$ vérifient l'hypothèse $(*)$ pour un p donné, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe i tel que le N -écart spectral entre les laplaciens de Witten sur $\tilde{\Delta}_\varphi$ sur U et $\tilde{\Delta}_{\varphi_i}$ sur M soit inférieur à ε .

Grâce à la proposition 2.22, la démonstration est très similaire à celle du théorème 11 de [Ja11]. Cependant, les modifications et précisions à apporter, bien que mineures, sont assez nombreuses. Nous allons donc donner ici la démonstration complète.

Commençons par rappeler deux lemmes de [CdV86] sur lesquels nous nous appuieront. Les constantes N , M et η qui interviennent dans les énoncés font référence à l'hypothèse $(*)$ définie plus haut.

Lemme 4.3 ([CdV86], th. I.7). *Soit Q une forme quadratique positive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont le domaine admet la décomposition Q -orthogonale $\text{dom}(Q) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\eta, M, N, \varepsilon) > 0$ (grande) telle que si $Q_0 = Q|_{\mathcal{H}_0}$ vérifie l'hypothèse $(*)$ et que $\forall x \in \mathcal{H}_\infty$, $Q(x) \geq C|x|^2$, alors Q et Q_0 ont un N -écart spectral inférieur à ε .*

Lemme 4.4 ([CdV86], th. I.8). *Soit $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ un espace de Hilbert muni d'une forme quadratique positive Q . On se donne en outre une suite de métriques $|\cdot|_n$ sur $\mathcal{H}$ et une suite de formes quadratiques Q_n de même domaine que Q telles que :*

- (i) *il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathcal{H}$, $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x|$;*
- (ii) *pour tout $x \in \text{dom}(Q)$, $|x|_n \rightarrow |x|$;*
- (iii) *pour tout $x \in \text{dom}(Q)$, $Q(x) \leq Q_n(x)$;*
- (iv) *pour tout $x \in \text{dom}(Q)$, $Q_n(x) \rightarrow Q(x)$.*

Si Q vérifie l'hypothèse $(*)$, alors à partir d'un certain rang (dépendant de η , M et N), Q et Q_n ont un N -écart spectral inférieur à ε .

Remarque 4.5. Comme on l'a remarqué dans [Ja11], dans le lemme 4.4, on peut affaiblir l'hypothèse (i) en $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x| + \varepsilon_n Q(x)^{\frac{1}{2}}$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$, la démonstration restant exactement la même.

D'après la proposition 2.22, on veut montrer la convergence de la forme quadratique $Q(\omega) = \int_M |\omega|^2 dv_\varphi$ par rapport à la norme $|\omega| = \inf_{d\theta=\omega} \int_M |\theta|^2 dv_\varphi$, pour tout degré p .

On passe par l'intermédiaire d'une famille de métriques et de fonctions singulières $(g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} (g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) &= (g, \varphi) \text{ sur } U, \\ (g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) &= (\varepsilon^2 g, \varphi - \alpha \ln \varepsilon) \text{ sur } M \setminus U. \end{cases} \quad (4.6)$$

Le couple $(g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ est bien contenu dans la classe conforme (singulière) pondérée $[g, \varphi]_\alpha$. La forme quadratique Q_ε et la norme $|\cdot|_\varepsilon$ associées sont alors

données, pour une forme $\omega \in \Omega^{p+1}(M)$, par

$$Q_\varepsilon(\omega) = \int_U |\omega|^2 e^{-2\varphi} dv_g + \varepsilon^{n+2\alpha-2p-2} \int_{M \setminus U} |\omega|^2 e^{-2\varphi} dv_g \quad (4.7)$$

et

$$|\omega|_\varepsilon^2 = \inf_{d\theta=\omega} \left(\int_U |\theta|^2 e^{-2\varphi} dv_g + \varepsilon^{n+2\alpha-2p} \int_{M \setminus U} |\theta|^2 e^{-2\varphi} dv_g \right). \quad (4.8)$$

On voit que, sous la condition $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$, le dernier terme de chacune des deux expressions précédentes tend vers 0.

Lemme 4.9. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(g_j, \varphi_j) \in [g, \varphi]_\alpha$ formée de métriques et de fonctions lisses tendant vers $(g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ et telle que le volume de (M, g_j) tende vers celui de (M, g_ε) et pour tout $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$ et que pour tout $k \geq 1$, la valeur propre $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g_j, \varphi_j)$ tende vers $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$, avec convergence des espaces propres.*

Démonstration : Le principe de la démonstration consiste à chercher à appliquer le lemme 4.4.

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on peut approcher la fonction $\chi_U + \varepsilon \chi_{M \setminus U}$ par une suite de fonctions décroissantes (f_j) vérifiant $f_j \leq 1$. On définit alors la suite (g_j, φ_j) par $g_j = f_j^2 \cdot g$ et $\varphi_j = \varphi - \alpha \ln f_j$ et on note Q_j et $|\cdot|_j$ la forme quadratique et la norme hilbertienne associées. On a bien $(g_j, \varphi_j) \in [g, \varphi]_\alpha$, la convergence du volume est immédiate, et on peut écrire $Q_j(\omega) = \int_M f_j^{n+2\alpha-2p-2} |\omega|^2 e^{-2\varphi} dv_g$ et $|\omega|_j^2 = \inf_{d\theta=\omega} (\int_M f_j^{n+2\alpha-2p} |\theta|^2 e^{-2\varphi} dv_g)$.

Comme $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$, on peut vérifier que la famille de forme quadratique Q_j est décroissante et converge simplement vers Q_ε , c'est-à-dire que les hypothèses (iii) et (iv) du lemme 4.4 sont satisfaites.

Comme la suite (f_j) vérifie $\chi_U + \varepsilon \chi_{M \setminus U} \leq (f_j) \leq \frac{1}{\varepsilon} (\chi_U + \varepsilon \chi_{M \setminus U})$, on a $|\omega|_\varepsilon^2 \leq |\omega|_j^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot |\omega|_\varepsilon^2$ pour toute forme exacte ω , ce qui constitue l'hypothèse (i) du lemme 4.4.

Il reste à vérifier l'hypothèse (ii), c'est-à-dire que $|\cdot|_j$ converge simplement vers $|\cdot|_\varepsilon$. Soit $\eta > 0$. Par définition de $|\cdot|_\varepsilon$, il existe une forme θ_0 telle que $d\theta_0 = \omega$ et $\|\theta_0\|_{g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon}^2 \leq |\omega|_\varepsilon^2 + \eta$. Comme (g_j, φ_j) converge vers $(g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$, pour j assez grand on a aussi $\|\theta_0\|_{g_j, \varphi_j}^2 \leq \|\theta_0\|_{g_\varepsilon, \varphi_\varepsilon}^2 + \eta$ et donc aussi $|\omega|_\varepsilon^2 \leq |\omega|_j^2 \leq \|\theta_0\|_{g_j, \varphi_j}^2 \leq |\omega|_\varepsilon^2 + 2\eta$. Par conséquent on a bien $|\omega|_j \rightarrow |\omega|_\varepsilon$ pour tout ω .

Selon le lemme 4.4, à ε fixé, on peut donc trouver un j_ε tel que l'écart spectral entre Q_{j_ε} et Q_ε soit arbitrairement petit. ■

Démonstration du théorème 4.2 : Remarquons d'abord que le point 3 du théorème, c'est-à-dire le cas $\frac{n}{2} + \alpha - 1 \leq p \leq \frac{n}{2} + \alpha$, découle de la minoration conforme donnée par le théorème 3.2.

Par ailleurs, le cas $p > \frac{n}{2} + \alpha$ se déduit du cas $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$. En effet, la relation de commutation (2.6) avec la dualité de Hodge donne $\tilde{\mu}_{p,k}(g_i, \varphi_i) = \tilde{\mu}_{n-p-1,k}(g_i, -\varphi_i)$.

Il reste donc à traiter le cas $p < \frac{n}{2} + \alpha - 1$. Grâce au lemme 4.9, on est ramené à montrer la convergence du spectre de Q_ε . La démonstration se déroule en deux étapes. La première consiste à décomposer l'espace $\mathcal{H}$ des formes exactes en une somme $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$ à laquelle on applique le lemme 4.3. Dans la seconde, on montre la convergence du spectre de Q_ε restreint à $\mathcal{H}_0$ vers le spectre du domaine à l'aide du lemme 4.4. Sauf mention contraire, les normes L^2 seront considérées relativement à la mesure $dv_\varphi = e^{-2\varphi} dv_g$.

Étape 1. On commence par définir le sous-espace $\mathcal{H}_\infty$ de $\overline{\text{Im } d^p} \subset L^2(\Lambda^{p+1}M)$ comme l'adhérence des différentielles des formes lisses qui s'annulent sur U (les adhérences sont au sens de la norme L^2). Une telle forme va nécessairement vérifier la condition de bord de Dirichlet sur $M \setminus U$:

$$\mathcal{H}_\infty = \overline{\{d\theta, \theta \in \Omega^p(M), \theta|_U = 0, \theta|_{M \setminus U} \text{ vérifie } (D)\}}. \quad (4.10)$$

L'espace $\mathcal{H}_0$ est défini comme la somme de deux espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ construits séparément.

Soit ω une $(p+1)$ -forme exacte sur $\overline{U}$ et $\theta \in \Omega^p(\overline{U})$ la primitive de ω qui minimise la norme $L^2(U, dv_\varphi)$. Cette forme θ est obtenue par application du lemme 2.17 et de la remarque 2.18. Si $\tilde{\theta}$ est un prolongement lisse de φ sur M , alors $d\tilde{\theta}$ est définie à un élément de $\mathcal{H}_\infty$ près. On peut définir alors $\tilde{\omega}$ comme le $d\tilde{\theta}$ de norme minimale pour g_ε . Cet infimum est bien atteint dans $L^2(M, dv_\varphi)$ et on peut le construire par projection sur l'orthogonal L^2 de $\mathcal{H}_\infty$. On pose alors

$$\mathcal{H}_1 = \overline{\{\tilde{\omega}, \omega \in \Omega^{p+1}(\overline{U}) \text{ exacte}\}}. \quad (4.11)$$

L'espace $\mathcal{H}_2$ est défini à partir de l'espace de cohomologie $H^p(U/M)$. Comme $H^p(U/M)$ est isomorphe au quotient de $H^p(U)$ par le sous-espace induit par $H^p(M)$, il est aussi isomorphe à un supplémentaire, dans l'espace des formes harmoniques (pour le laplacien de Witten) de U avec condition de bord (A_φ) , des représentants harmoniques des classes de cohomologie induites par $H^p(M)$. Grâce au corollaire 2.13, chaque classe $[c] \in H^p(U/M)$ possède un représentant $T_\varphi h$ où h est $\tilde{\Delta}_\varphi$ -harmonique et tel que $T_\varphi h$ soit $L^2(U, dv_\varphi)$ -orthogonale aux restrictions des formes fermées de M .

On peut alors construire $\mathcal{H}_2$ sur le modèle de $\mathcal{H}_1$. Chaque forme $T_\varphi h$ représentant une classe de $H^p(U/M)$ peut être étendue en une forme $\tilde{h}$ sur M , la forme $d\tilde{h}$ étant alors définie à un élément de $\mathcal{H}_\infty$ près. On notant $\tilde{\omega}_h$ la forme $d\tilde{h}$ qui est $L^2(M, dv_\varphi)$ -orthogonale à $\mathcal{H}_\infty$, et on pose

$$\mathcal{H}_2 = \{\tilde{\omega}_h, [h] \in H^p(U/M)\}. \quad (4.12)$$

Si on pose $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, alors $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_\infty$ sont par construction orthogonaux pour la norme $L^2(U, dv_\varphi)$, donc Q_ε -orthogonaux. Avant d'appliquer le lemme 4.3 on doit encore vérifier que $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$ contient bien toutes les $(p+1)$ -formes exactes. Soit $\omega \in \Omega^{p+1}$ une forme exacte. Par définition de

$\mathcal{H}_1$, on peut écrire $\omega = \omega_1 + \omega'$, avec $\omega_1 \in \mathcal{H}_1$ telle que $\omega|_U = \omega_1|_U$ et $\omega'|_U = 0$. Comme ω et ω_1 sont exactes, ω' l'est aussi. Si on pose $\omega' = d\theta$, la forme θ est définie à une forme fermée près et vérifie $d\theta = 0$ sur U , la classe $[\theta] \in H^p(U/M)$ est donc bien définie. Par définition de $\mathcal{H}_2$ on a alors $\omega' = \tilde{\omega}_h + \omega_0$, où $\tilde{\omega}_h$ est l'élément de $\mathcal{H}_2$ associé au représentant harmonique h de $[\theta] \in H^p(U/M)$, et $\omega_0 \in \mathcal{H}_\infty$. On a donc bien $\omega \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_\infty$, et donc $\text{dom}(Q_\varepsilon) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$.

Si on note $\lambda^{(D)}$ la première valeur propre du laplacien de Hodge sur $M \setminus U$ pour la métrique g et la condition de bord (D), on sait que pour toute forme $\omega \in \mathcal{H}_\infty$ il existe, par définition, une forme $\theta \in \Omega^p(M)$ à support dans $M \setminus U$ telle que $d\theta = \omega$ et $\int_{M \setminus U} |\omega|^2 / \int_{M \setminus U} |\theta|^2 \geq \lambda^{(D)}$ pour la métrique g . Il existe donc une constante C_φ ne dépendant que de φ telle que $\|\omega\|^2 / \|\theta\|^2 \geq C_\varphi \lambda^{(D)}$. Pour la métrique g_ε , on a alors $\|\omega\|^2 / \|\theta\|^2 \geq \varepsilon^{-2} C_\varphi \lambda^{(D)}$, et *a fortiori* $Q_\varepsilon(\omega) / |\omega|_\varepsilon \geq \varepsilon^{-2} C_\varphi \lambda^{(D)}$. Si ε est suffisamment petit, on peut appliquer le lemme 4.3.

Étape 2. On va maintenant chercher à appliquer le lemme 4.4 et la remarque 4.5 à l'espace $\mathcal{H}_0$ et aux familles de métriques et de formes quadratiques $|\cdot|_\varepsilon$ et Q_ε . On définit la forme quadratique Q sur $\mathcal{H}_0$ par $Q(\omega) = \int_U |\omega|^2 dv_\varphi$. Pour définir une norme $|\cdot|$ sur $\mathcal{H}_0$, on procède de la manière suivante : pour $\omega \in \mathcal{H}_1$, on note θ_ω l'image par T_φ de la primitive coexacte de $\omega|_{\overline{U}}$ donnée par la proposition 2.17, et pour $\omega \in \mathcal{H}_2$, on note θ_ω l'image par T_φ du représentant harmonique de la classe de cohomologie définie par ω . On étend linéairement l'application $\omega \rightarrow \theta_\omega$ et on pose $|\omega| = \|\theta_\omega\|$, la norme $\|\cdot\|$ étant ici la norme $L^2(U, dv_\varphi)$ sur les p -formes de U . Les espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont orthogonaux pour $\|\cdot\|$, le noyau de la forme quadratique Q (relativement à $\|\cdot\|$) est $\mathcal{H}_2$, et le spectre de Q sur $\mathcal{H}_1$ est le spectre du domaine U pour les $(p+1)$ -formes exactes.

On doit maintenant vérifier que les quatre hypothèses du lemme 4.4 sont satisfaites.

Les hypothèses (iii) et (iv) sont les plus simples à vérifier : par définition de Q_ε , pour tout $\omega \in \mathcal{H}_0$, $Q_\varepsilon(\omega)$ tend vers $Q(\omega) = \int_U |\omega|^2 dv_\varphi$ et $Q_\varepsilon \geq Q$ pour tout ε .

Passons à l'hypothèse (ii). Par définition de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, il existe pour tout $\omega \in \mathcal{H}_0$ un prolongement $\tilde{\theta}_\omega$ de θ_ω tel que $d\tilde{\theta}_\omega = \omega$. On a alors

$$|\omega|_\varepsilon^2 \leq \|\tilde{\theta}_\omega\|_\varepsilon^2 \rightarrow \int_U |\tilde{\theta}_\omega|^2 dv_\varphi = |\omega|^2. \quad (4.13)$$

En outre, si $d\theta = \omega$, alors θ et $\tilde{\theta}_\omega$ ne diffèrent que par une forme fermée de M , et donc leur restriction à $\overline{U}$ ne diffèrent aussi que par une forme fermée. Par conséquent, la norme de θ_ω minore la norme $L^2(U, dv_\varphi)$ de θ (cf. corollaire 2.13 et théorème 2.17), et

$$|\omega|^2 = \int_U |\tilde{\theta}_\omega|^2 dv_g \leq \int_U |\theta|^2 dv_g \leq \|\theta\|_\varepsilon^2 \quad (4.14)$$

On en déduit que $|\omega| \leq |\omega|_\varepsilon$, et donc que $|\omega|_\varepsilon \rightarrow |\omega|$ pour tout ω .

L'hypothèse (i), dans sa version faible (cf. remarque 4.5), est la plus technique à vérifier. On doit contrôler $|\cdot|_\varepsilon$ en fonction de $|\cdot|$ et Q . Pour ce faire, on fixe un élément $\omega \in \mathcal{H}_0$ et on va construire une primitive particulière dont la norme L^2 majorera $|\omega|_\varepsilon$.

On note $\bar{\theta}$ la p -forme définie par $\bar{\theta} = \theta_\omega$ sur $\bar{U}$, et prolongée harmoniquement (pour le laplacien de Hodge et la métrique g) sur M . On a alors $\|\bar{\theta}\|_{H^1(M \setminus U)} \leq C \|\theta|_{\partial U}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial U)}$, la constante C dépendant de φ mais pas de θ (la démonstration dans le cas $\varphi = 0$ est similaire au cas des fonctions, cf. [Ta96], ch. 5, prop. 1.7. Le cas général découle du fait que φ est bornée donc que les normes pour dv_g et dv_φ sont équivalentes).

Par définition de $\mathcal{H}_0$, la $(p+1)$ -forme $\bar{\omega}_\infty = d\bar{\theta} - \omega$ est un élément de $\mathcal{H}_\infty$ et elle est orthogonale à ω . Elle vérifie donc $\|\bar{\omega}_\infty\|_{L^2(M \setminus U)}^2 \leq \|d\bar{\theta}\|_{L^2(M \setminus U)}^2 \leq \|\bar{\theta}\|_{H^1(M \setminus U)}^2$ et elle admet une primitive $\bar{\theta}_\infty$ nulle sur U dont la norme vérifie $\|\bar{\theta}_\infty\|^2 \leq \|\bar{\omega}_\infty\|^2 / (C_\varphi \lambda^{(D)})$. Si on pose $\theta = \bar{\theta} - \bar{\theta}_\infty$, on a alors $d\theta = \omega$ et

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{L^2(M \setminus U)} &\leq \|\bar{\theta}\|_{L^2(M \setminus U)} + \|\bar{\theta}_\infty\|_{L^2(M \setminus U)} \\ &\leq \|\bar{\theta}\|_{L^2(M \setminus U)} + \|\bar{\theta}\|_{H^1(M \setminus U)} / (C_\varphi \lambda^{(D)})^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Toutes les normes étant ici relative à la métrique g et la mesure dv_φ .

Comme $\|\bar{\theta}\|_{H^1(M \setminus U)} \leq C \|\theta|_{\partial U}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial U)}$ et que la norme $\|\theta|_{\partial U}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial U)}$ est elle-même contrôlée par la norme H^1 de θ sur U , on a finalement

$$\int_{M \setminus U} |\theta|^2 dv_g \leq C' \|\theta\|_{H^1(U)}, \quad (4.16)$$

où C' est une constante dépendant de g et φ mais pas de ε .

En utilisant le fait que θ est cofermée sur U (car égale à θ_ω) et tangentielle le long de ∂U , une inégalité elliptique à trace associée à l'opérateur $d + \delta$ (voir [Ta96], section 5.9) donne, en utilisant encore une fois que les normes associées à dv_g et dv_φ sont équivalentes,

$$\|\theta\|_{H^1(U)} \leq C'' (\|\theta\|_{L^2(U)} + \|d\theta\|_{L^2(U)}) = C'' (|\omega| + Q(\omega)^{\frac{1}{2}}), \quad (4.17)$$

la métrique considérée étant ici encore g .

Pour une métrique g_ε , on a $|\omega|_\varepsilon^2 \leq \|\theta\|_{L^2(U)}^2 + \varepsilon^{n-2p} \|\theta\|_{L^2(M \setminus U)}^2$. Comme $\|\theta\|_{L^2(U)} = |\omega|$ et que $\|\theta\|_{L^2(M \setminus U)}$ peut être majoré à l'aide de (4.16) et (4.17), on obtient la majoration

$$|\omega|_\varepsilon^2 \leq |\omega|^2 + \varepsilon^{n-2p} C' C''^2 (|\omega| + Q(\omega)^{\frac{1}{2}})^2 \quad (4.18)$$

qui permet d'appliquer la remarque 4.5 et le lemme 4.4. ■

5. Spectre d'une variété privée d'une boule

Cette section est consacrée au théorème qui suit sur la convergence du spectre sur une variété privée d'une boule :

Théorème 5.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, φ une fonction lisse sur M et $x \in M$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $M_\varepsilon = M \setminus B(x, \varepsilon)$ la variété M privée d'une boule de rayon ε . Alors il existe une famille de fonction φ_ε tendant vers φ pour la topologie C^0 telle que $\tilde{\mu}_{p,k}(M_\varepsilon, g, \varphi_\varepsilon) \rightarrow \tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi)$ pour tout $p \leq n - 1$ et $i > 0$, avec convergence des espaces propres.*

Dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham, c'est-à-dire avec $\varphi_\varepsilon = \varphi = 0$, ce théorème a été montré par C. Anné et B. Colbois dans [AC93] (théorème 1.1). La comparaison des deux énoncés imposent deux précisions. D'une part, dans [AC93], la convergence du spectre des p -formes est montrée sans distinguer formes exactes et coexactes, mais par théorie de Hodge cela implique la convergence en restriction aux formes coexactes. D'autre part, le résultat de [AC93] fait apparaître une valeur propre tendant vers 0 pour les $n - 1$ formes, mais la forme propre est nécessairement exacte et la petite valeur propre correspond à celle qui apparaît pour les fonctions avec condition de Dirichlet.

La démonstration de [AC93] fonctionne correctement pour le laplacien de Witten si, sur une boule de rayon R fixé et centrée en x , la fonction φ est constante. On a alors $\tilde{\Delta}_\varphi = \Delta$, et en particulier le lemme suivant ([AC93], corollaire de la proposition 3.3), qui concentre l'essentiel des difficultés, s'applique parfaitement sous cette hypothèse :

Lemme 5.2 ([AC93]). *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute forme $\omega \in H^1(\Lambda^p(B(x, R) - B(x, \varepsilon)))$ tangentielle le long de $B(x, \varepsilon)$ et nulle le long de $B(x, R)$, on a*

$$\|P\omega\|_q \leq C\|\omega\|_q,$$

où $P\omega$ désigne le prolongement harmonique de ω sur $B(x, R)$ et $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur associé au laplacien de Hodge-de Rham.

On va donc montrer qu'on peut se ramener à cette situation :

Lemme 5.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, φ une fonction lisse sur M et $x \in M$. Il existe une suite de fonction φ_i telle que*

1. φ_i est constante sur $B(x, \frac{1}{i})$;
2. $\varphi_i \rightarrow \varphi$ pour la topologie C^0 ;
3. $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi_i) \rightarrow \tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi)$ avec convergence des espaces propres.

Pour approcher le spectre de (M, g, φ) , on commence donc par l'approcher par celui de (M, g, φ_i) à l'aide de ce lemme, puis on applique les résultats de [AC93].

Démonstration du lemme 5.3 : On peut déformer la fonction φ en une suite φ_i telle que φ_i soit constante sur $B(x, \frac{1}{i})$, et de manière à ce que φ_i converge vers φ pour la topologie C^0 . En notant Q et $|\cdot|$ (resp. Q_i et $|\cdot|_i$) la forme quadratique et la norme associées à (g, φ) (resp. (g, φ_i)) comme dans la proposition 2.22, on a alors une suite décroissante C_i telle que $C_i \rightarrow 1$ et

$$\begin{cases} \frac{1}{C_i}|\omega| \leq |\omega|_i \leq C_i|\omega| \\ \frac{1}{C_i}Q(\omega) \leq Q_i(\omega) \leq C_iQ(\omega) \end{cases} \quad (5.4)$$

Pour toute forme exacte ω . En outre, on peut ajuster φ_i de manière à avoir de plus $Q(\omega) \leq Q_i(\omega)$. On peut alors appliquer le lemme 4.4. ■

6. Application à la multiplicité

Pour prescrire la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Witten nous utilisons, selon la méthode introduite par Colin de Verdière, trois ingrédients : les théorèmes de convergence spectrale démontrés dans les sections précédentes, des modèles de valeurs propres multiples déjà connus et une propriété de stabilité vérifiée par ces modèles. Nous allons commencer par rappeler cette dernière.

On suppose qu'on a une famille d'opérateurs $(P_a)_{a \in B^k}$, où B^k est la boule unité de $\mathbb{R}^k$ (en pratique, P_a est le laplacien de Witten associé à un couple (g_a, φ_a)), tels que P_0 possède une valeur propre λ_0 d'espace propre E_0 et de multiplicité N . Pour les petites valeurs de a , P_a possède des valeurs propres proches de λ_0 dont la somme des espaces propres est de dimension N . Comme dans la définition de l'écart spectral, on identifie cette somme à E_0 et on note q_a la forme quadratique associée à P_a transportée sur E_0 .

Définition 6.1 ([CdV88]). On dit que λ_0 vérifie l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd si l'application $\Psi : a \mapsto q_a$ de B^k dans $\mathcal{Q}(E_0)$ est essentielle en 0, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\Phi : B^k \rightarrow \mathcal{Q}(E_0)$ vérifie $\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$, alors il existe $a_0 \in B^k$ tel que $\Phi(a_0) = q_0$.

Une propriété cruciale est que si Φ provient d'une famille (P'_a) d'opérateurs, alors λ_0 est valeur propre de P'_{a_0} de multiplicité N et vérifie la même propriété de transversalité, ce qui justifie qu'on parle de stabilité de la multiplicité. Comme remarqué dans [CdV88], on peut généraliser cette définition à une suite finie de valeurs propres.

Cette propriété est aussi préservée par produit, grâce à la forme de Künneth (théorème 2.7) :

Lemme 6.2. *On suppose que $\tilde{\mu}_{p_1,k_1}(M_1, g_1, \varphi_1)$ est une valeur propre simple, $\tilde{\mu}_{p_2,k_2}(M_2, g_2, \varphi_2)$ une valeur propre de multiplicité stable N et qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres de M_1 et M_2 dont la somme soit $\tilde{\mu}_{p_1,k_1}(M_1, g_1, \varphi_1) + \tilde{\mu}_{p_2,k_2}(M_2, g_2, \varphi_2)$. Alors $\tilde{\mu}_{p_1,k_1}(M_1, g_1, \varphi_1) + \tilde{\mu}_{p_2,k_2}(M_2, g_2, \varphi_2)$ est valeur propre de multiplicité stable N sur $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2, \varphi_1 + \varphi_2)$.*

La démonstration est la même que dans le cas du laplacien de Hodge ([Ja11], lemme 3.3). On utilisera en particulier ce lemme dans le cas où (M_2, g_2) est un intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avec $\varphi_2 = 0$. En effet, le noyau du laplacien de Hodge sur l'intervalle pour la condition de bord (A) est de dimension 1 en degré 0 et trivial en degré 1 (les fonctions harmoniques étant constantes), et toutes les autres valeurs propres tendent vers l'infini quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Sur $M_1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ les premières formes propres sont les relevés des formes propres de (M_1, g_1, φ_1) .

Comme dans [Ja11], la démarche pour démontrer les théorèmes 1.2 et 1.3 consiste à d'abord construire, pour tout p et n , un modèle de valeur propre multiple pour les p -formes sur une variété de dimension n , puis à obtenir plusieurs valeurs propres multiples sur une même variété en plongeant plusieurs modèles et en appliquant le théorème de convergence 4.2.

Commençons par rappeler un modèle de multiplicité qui servira de point de départ pour la suite. On note $\mu_{p,i}$ les valeurs propres du laplacien de Hodge, c'est-à-dire que $\mu_{p,i}(M, g) = \tilde{\mu}_{p,i}(M, g, 0)$.

Lemme 6.3 ([Ja11], lemme 3.4). *Pour tous entiers $N \geq 1$, $n \geq 3$, toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g sur S^n telle que $\mu_{0,i}(S^n, g) = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\mu_{0,N+1}(S^n, g) > C$ et $\mu_{p,1}(S^n, g) > C$ pour $1 \leq p \leq [\frac{n-1}{2}]$, le volume $\text{Vol}(S^n, g)$ étant arbitrairement petit.*

Comme dans [Ja11], on en déduit des modèles de valeurs propres multiples pour les autres degrés :

Lemme 6.4. *Pour tous entiers $N \geq 1$, $p \geq 2$ et $n \geq p+1$, toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g et une fonction φ sur la variété S^n telles que $\tilde{\mu}_{p,i}(S^n, g, \varphi) = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\tilde{\mu}_{p,N+1}(S^n, g, \varphi) > C$ et $\tilde{\mu}_{q,1}(S^n, g, \varphi) > C$ pour $1 \leq q \leq n-1$, $q \neq p$, le volume $\text{Vol}(S^n, g)$ étant arbitrairement petit.*

Démonstration : On procède par récurrence sur n .

Pour $n = p+1$, il suffit de prendre $\varphi = 0$ et de choisir pour g la métrique donnée par le lemme 6.3. En effet, pour $\varphi = 0$, on a $\tilde{\mu}_{q,i}(S^n, g, \varphi) = \mu_{q,i}(S^n, g) = \mu_{n-q-1,i}(S^n, g)$ pour tout q . En particulier, on a $\tilde{\mu}_{p,i}(S^n, g, \varphi) = \mu_{n-1,i}(S^n, g) = \mu_{0,i}(S^n, g)$, et pour les autres degrés le spectre est minoré par la même constante C .

Considérons maintenant un entier $n > p + 1$ et supposons le lemme vrai pour la dimension $n - 1$. On a donc sur S^{n-1} une métrique $\bar{g}$ et une fonction $\bar{\varphi}$ satisfaisant la conclusion du lemme. On considère un domaine $U \subset S^n$ qui est le produit de $(S^{n-1}, \bar{g}, \bar{\varphi})$ avec un petit intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$, on prolonge la métrique et la fonction de manière quelconque sur S^n . Pour ε suffisamment petit, le début du spectre sur U est le même que celui de $(S^{n-1}, \bar{g}, \bar{\varphi})$, avec la même propriété de stabilité d'après le lemme 6.2. On applique alors le théorème 4.2 avec $\alpha = \frac{n}{2} - 1$, de manière à avoir convergence du spectre pour les degrés $0 \leq q < n - 1$ (comme la cohomologie du domaine U est triviale sauf en degré 0 et $n - 1$ et que $H^0(S^n/U)$ est aussi trivial, il n'y a pas de valeurs propres qui tendent vers 0 pour ces degrés). L'argument de stabilité fournit alors une métrique g et une fonction φ telles que $\tilde{\mu}_{p,i}(S^n, g, \varphi) = a_i$ pour $i \leq N$ (avec stabilité), $\tilde{\mu}_{p,N+1}(S^n, g, \varphi) > C$ et $\tilde{\mu}_{q,1}(S^n, g, \varphi) > C$ pour $1 \leq q < n - 1, q \neq p$. Comme le volume de U peut être choisis arbitrairement petit, le résultat en degré $q = n - 1$ découle du point 3 du théorème 4.2. ■

Comme dans [Ja11], le cas des 1-formes est traité séparément :

Lemme 6.5. *Pour tous entiers $N \geq 1, n \geq 4$, toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g et une fonction φ sur la variété S^n telles que $\tilde{\mu}_{1,i}(S^n, g, \varphi) = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\tilde{\mu}_{1,N+1}(S^n, g, \varphi) > C$ et $\tilde{\mu}_{p,1}(S^n, g, \varphi) > C$ pour $p > 1$, le volume $\text{Vol}(S^n, g)$ étant arbitrairement petit.*

Démonstration : On applique le lemme précédent pour $p = n - 2$. Il suffit ensuite de changer le signe de φ , la relation (2.6) permet de conclure. ■

On déduit des lemmes précédents un modèle de multiplicité pour chaque degré p sur des boules de dimension n :

Lemme 6.6. *Pour tous entiers $N \geq 1, n \geq 4$ et $p \in [1, n - 1]$, toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ et toute constante $C > a_N$, il existe une métrique g et une fonction φ sur la boule B^n telles que $\tilde{\mu}_{p,i}(B^n, g, \varphi) = a_i$ pour $i \leq N$, ces valeurs propres vérifiant l'hypothèse de stabilité, $\tilde{\mu}_{p,N+1}(B^n, g, \varphi) > C$ et $\tilde{\mu}_{q,1}(B^n, g, \varphi) > C$ pour $q \neq p$, le volume $\text{Vol}(B^n, g)$ étant arbitrairement petit.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 et l'argument de stabilité aux modèles construits précédemment : on utilise le lemme 6.4 pour les degrés $2 \leq p \leq n - 1$ et le lemme 6.5 pour le degré 1. ■

On va maintenant montrer les théorèmes 1.2 et 1.3

Démonstration du théorème 1.2 : On commence par se donner, pour chaque degré p , un domaine U_p de M (muni d'une métrique et d'une fonction lisse) dont le début du spectre est celui qu'on veut prescrire. On applique

pour cela le lemme 6.6 avec $C > \sup_{p,i} a_{p,i}$. On prolonge la métrique et la fonction à M .

On applique ensuite le théorème 4.2 au domaine $U = \bigcup U_p$ avec $\alpha > \frac{n}{2}$. Comme U n'a de cohomologie qu'en degré 0, on a convergence du spectre pour les autres degrés. L'argument de stabilité assure alors l'existence d'une métrique g et d'une fonction φ sur M telle que $\tilde{\mu}_{p,i}(M, g, \varphi) = a_{p,i}$ pour tout $p \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq N$.

Selon un argument classique (utilisé dans [Gu04], [Ja08] et [Ja11]), on peut prescrire simultanément le volume en le traitant comme une valeur propre simple : on ajoute à la famille U_p une boule de volume $V - \sum_p \text{Vol}(U_p)$ (en ayant choisis les volumes des U_p suffisamment petits) et dont les valeurs propres pour les p -formes sont arbitrairement grandes (c'est possible selon [GP95]). Le fait que le volume de cette boule vérifie l'hypothèse de transversalité signifie simplement qu'on peut lui donner n'importe quelle valeur au voisinage de $V - \sum_p \text{Vol}(U_p)$, par exemple par homothétie. ■

Démonstration du théorème 1.3 : Soit Σ une surface compacte. Y. Colin de Verdière a montré dans [CdV86] (corollaire 7.2) que pour toute métrique g sur Σ , il existe une fonction φ telle que la multiplicité de $\tilde{\mu}_{0,1}(\Sigma, g, \varphi)$ soit de multiplicité stable $C(\Sigma) - 1$. En appliquant la formule (2.6), on obtient que $\tilde{\mu}_{1,1}(\Sigma, g, -\varphi)$ a la même multiplicité.

On peut plonger la surface Σ dans M et considérer le voisinage $U = \Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ muni de la métrique produit qu'on notera encore g et en relevant la fonction φ à U . Pour ε suffisamment petit, $\tilde{\mu}_{1,1}(U, g, -\varphi)$ est encore de multiplicité stable $C(\Sigma) - 1$ d'après le lemme 6.2.

Après avoir étendu g et φ à M de manière quelconque, on peut appliquer le théorème de convergence 4.2 à U avec $\alpha > 2$. Si $H^1(M) \rightarrow H^1(\Sigma)$ est surjective, on a alors $H^1(M/U) = \{0\}$ et l'argument de stabilité donne le résultat. ■

Appendice

Le but de cet appendice est de justifier l'équivalence des trois formulations suivantes du laplacien de Witten :

Théorème A.7. *Pour toute fonction φ , on a*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\varphi &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \mathcal{L}_{\nabla\varphi} + \mathcal{L}_{\nabla\varphi}^* \\ &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \Delta\varphi - (\mathcal{L}_X g_p) \\ &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \Delta\varphi + 2(\text{Hess } \varphi) \end{aligned}$$

On va en fait montrer un résultat plus général. Si X est un champ de vecteur, on pose

$$\tilde{\mathrm{d}}_X \omega = \mathrm{d}\omega + X^\flat \wedge \omega \text{ et } \tilde{\delta}_X \omega = \delta\omega + \mathbf{i}_X \omega. \quad (\text{A.8})$$

On retrouve les définitions de $\tilde{d}_\varphi$ et $\tilde{\delta}_\varphi$ en remplaçant X par $\nabla\varphi$. Le théorème A.7 est un cas particulier du résultat qui suit. Si α est une 1-forme, $\overline{\nabla}\alpha$ la partie symétrique de la dérivée covariante $\nabla\alpha$ qu'on identifie à un endomorphisme de $\Lambda^1 TM$:

Théorème A.9. *Pour tout champ de vecteur X , on a*

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_X \tilde{d}_X + \tilde{d}_X \tilde{\delta}_X &= \Delta + |X|^2 + \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_X^* \\ &= \Delta + |X|^2 + \operatorname{div} X - (\mathcal{L}_X g_p) \\ &= \Delta + |X|^2 + \operatorname{div} X + 2(\overline{\nabla} X^\flat)\end{aligned}$$

Comme dans le théorème A.7, l'action de $\overline{\nabla} X^\flat$ s'étend naturellement aux p -formes (cf. équation (2.5)), dans la suite on notera $(\overline{\nabla} X^\flat)_p$ cette extension s'il est nécessaire de préciser le degré. Elle s'exprime en fait de manière très simple si on utilise le formalisme de l'algèbre de courbure. Comme ce formalisme va intervenir dans la démonstration, nous allons le rappeler.

On note $C^p = S^2 \Lambda^p TM$ l'espace des formes quadratiques sur les p -formes. Ses éléments peuvent aussi s'interpréter comme endomorphismes de $\Lambda^p TM$ ou $2p$ -tenseurs antisymétriques par rapport aux p premières variables et symétriques par échanges des p premières et des p dernières. L'espace des tenseurs de courbure est défini par $C^* = \bigoplus_{p \geq 0} C^p$. Il contient entre autres les tenseurs de riemann et de Weyl ($p = 2$) la courbure de Ricci ($p = 1$) et la courbure scalaire, ce qui justifie son nom. Il est muni d'une structure d'algèbre commutative dont le produit $\odot$ est défini par $\omega \otimes \omega \odot \theta \otimes \theta = \omega \wedge \theta \otimes \omega \wedge \theta$. Avec ces notations, on a $g_p = \frac{1}{p!} g_1^p$ et $(\overline{\nabla} X^\flat)_p = (\overline{\nabla} X^\flat)_1 \odot g_{p-1}$ (voir par exemple [La05], [La06] et les références qui y sont données).

Remarque A.10. Pour un champ de vecteur X quelconque, on n'a pas $\tilde{d}_X^2 = 0$, et par conséquent $(\tilde{d}_X + \tilde{\delta}_X)^2$ est différent de $\tilde{\delta}_X \tilde{d}_X + \tilde{d}_X \tilde{\delta}_X$ en général.

La première égalité du théorème A.9 se calcule de manière immédiate, comme celle du théorème A.7 : à partir de (A.8), on obtient

$$\tilde{\delta}_X \tilde{d}_X + \tilde{d}_X \tilde{\delta}_X = \Delta + |X|^2 + \mathbf{i}_X d + d \mathbf{i}_X + X^\flat \wedge \delta + \delta(X^\flat \wedge). \quad (\text{A.11})$$

Or, $\mathbf{i}_X d + d \mathbf{i}_X = \mathcal{L}_X$ (formule de Cartan), et $\mathbf{i}_X d + d \mathbf{i}_X$ est l'adjoint de $\delta(X^\flat \wedge) + X^\flat \wedge \delta$. Les autres égalités découlent du

Lemme A.12. *Pour tout un champ de vecteur X et toute p -forme ω sur M , on a l'identité*

$$\mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_X^* \omega = (\operatorname{div} X) \omega - (\mathcal{L}_X g_p) \omega = (\operatorname{div} X) \omega + 2(\overline{\nabla} X^\flat) \omega$$

Démonstration : Dans toute la démonstration on supposera que la variété est compacte sans bord, pour simplifier les intégrations par parties. Le cas à bord s'en déduit par restriction à un domaine.

Soit ω et ω' deux p -formes sur M . En dérivant selon X leur produit scalaire, il vient

$$X \cdot \langle \omega, \omega' \rangle = (\mathcal{L}_X g_p)(\omega, \omega') + \langle \mathcal{L}_X \omega, \omega' \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_X \omega' \rangle. \quad (\text{A.13})$$

On intègre les différents termes de cette équation. Le membre de gauche donne

$$\int_M X \cdot \langle \omega, \omega' \rangle = \int_M \langle X, \nabla \langle \omega, \omega' \rangle \rangle = \int_M (\text{div} X) \langle \omega, \omega' \rangle \quad (\text{A.14})$$

et le dernier terme devient

$$\int_M \langle \omega, \mathcal{L}_X \omega' \rangle = \int_M \langle \mathcal{L}_X^* \omega, \omega' \rangle. \quad (\text{A.15})$$

On obtient

$$\int_M (\text{div} X) \langle \omega, \omega' \rangle = (\mathcal{L}_X g_p)(\omega, \omega') + \int_M \langle \mathcal{L}_X \omega, \omega' \rangle + \langle \mathcal{L}_X^* \omega, \omega' \rangle. \quad (\text{A.16})$$

Comme cette égalité est vraie pour tout ω' , on en déduit l'égalité ponctuelle

$$\mathcal{L}_X \omega + \mathcal{L}_X^* \omega = (\text{div} X) \omega - (\mathcal{L}_X g_p) \omega. \quad (\text{A.17})$$

On doit réexprimer $\mathcal{L}_X g_p$ pour obtenir la deuxième expression du lemme. On va commencer par le cas $p = 1$. On note U et V deux champs de vecteurs quelconques et α, β leur 1-forme duale. En utilisant le fait que $\langle U, V \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \alpha(V) = \beta(U)$ et les relations de dérivations suivantes :

$$\begin{aligned} X \cdot \langle \alpha, \beta \rangle &= (\mathcal{L}_X g_1)(\alpha, \beta) + \langle \mathcal{L}_X \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \mathcal{L}_X \beta \rangle \\ &= (\mathcal{L}_X g_1)(\alpha, \beta) + \mathcal{L}_X \alpha(V) + \mathcal{L}_X \beta(U) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$X \cdot \alpha(V) = \mathcal{L}_X \alpha(V) + \alpha([X, V]) \quad (\text{A.19})$$

$$X \cdot \beta(U) = \mathcal{L}_X \beta(U) + \beta([X, U]) \quad (\text{A.20})$$

et en utilisant le fait que la dérivée covariante est sans torsion :

$$\begin{aligned} \nabla_X \langle U, V \rangle &= \langle \nabla_X U, V \rangle + \langle U, \nabla_X V \rangle \\ &= \langle \nabla_U X, V \rangle + \langle [X, U], V \rangle + \langle U, \nabla_V X \rangle + \langle U, [X, V] \rangle \\ &= \langle \nabla_U X, V \rangle + \beta([X, U]) + \langle U, \nabla_V X \rangle + \alpha([X, U]), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

on obtient, en simplifiant la combinaison (A.18) + (A.21) - (A.19) - (A.20) :

$$(\mathcal{L}_X g_1)(\alpha, \beta) + \langle \nabla_U X, V \rangle + \langle U, \nabla_V X \rangle = 0, \quad (\text{A.22})$$

soit

$$(\mathcal{L}_X g_1)(\alpha, \beta) = -2(\bar{\nabla} X)(U, V). \quad (\text{A.23})$$

Par dualité, on obtient bien que $(\mathcal{L}_X g_1)\omega = -2(\bar{\nabla} X^\flat)\omega$ si ω est une 1-forme.

Pour étendre ce résultat aux p -formes il suffit d'utiliser le fait que $g_p = \frac{1}{p!} g_1^p$ et d'appliquer la formule de Leibniz

$$(\mathcal{L}_X g_p) = (\mathcal{L}_X \frac{1}{p!} g_1^p) = (\mathcal{L}_X g_1) \oslash \frac{1}{(p-1)!} g_1^{p-1} = -2(\bar{\nabla} X^\flat) \oslash g_{p-1}, \quad (\text{A.24})$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Références

- [AC93] C. ANNÉ et B. COLBOIS – « Opérateur de Hodge-Laplace sur des variétés compactes privées d'un nombre fini de boules », *J. Funct. Anal.*, 115, p. 190–211, 1993.
- [An89] C. ANNÉ – « Principe de Dirichlet pour les formes différentielles », *Bull. soc. math. France*, 117 (4), p. 445–450, 1989.
- [BCC98] G. BESSON, B. COLBOIS et G. COURTOIS – « Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2 », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1), p. 331–345, 1998.
- [Be80] G. BESSON – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier*, 30 (1), p. 109–128, 1980.
- [CdV86] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien », *Comment. Math. Helv.*, 61 (2), p. 254–270, 1986.
- [CdV87] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), p. 99–615, 1987.
- [CdV88] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 184–193, 1988.
- [CdVT93] Y. COLIN DE VERDIÈRE et N. TORKI – « Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 11, p. 9–18, 1993.
- [Ch76] S. Y. CHENG – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.*, 51 (1), p. 43–55, 1976.
- [Da05] M. DAHL – « Prescribing eigenvalues of the Dirac operator », *Manuscripta Math.*, 118 (2), p. 191–199, 2005, math.DG/0311172.
- [Do82] J. DODZIUK – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.
- [Er02] L. ERDŐS – « Spectral shift and multiplicity of the first eigenvalue of the magnetic Schrödinger operator in two dimensions », *Ann. inst. Fourier*, 52 (6), p. 1833–1874, 2002.

- [GP95] G. GENTILE et V. PAGLIARA – « Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 123 (12), p. 3855–3858, 1995.
- [GT06] V. GOLD'SHTEIN et M. TROYANOV – « Sobolev inequalities for differential forms and $L_{q,p}$ -cohomology », *J. Geom. Anal.*, 16 (4), p. 597–632, 2006, math.DG/0506065.
- [Gu04] P. GUÉRINI – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 37 (2), p. 270–303, 2004.
- [He85] G. HENNIART – « Les inégalités de Morse », Dans *Séminaire Bourbaki 83/84*, volume 121–122 de *Astérisque*, pages 43–61, Soc. Math. France, 1985.
- [HN06] B. HEFFLER et F. NIER – « Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach : the case with boundary », *Mem. soc. math. France*, 105, 2006.
- [HHN99] M. HOFFMANN-OSTENHOF, T. HOFFMANN-OSTENHOF et N. NADIRASHVILI – « On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces », *Ann. Global Anal. Geom.*, 17 (1), p. 43–48, 1999.
- [Ja07a] P. JAMMES – « Extrema de valeurs propres dans une classe conforme », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 24, p. 23–43, 2007, arXiv :0804.0488.
- [Ja07b] P. JAMMES – « Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.
- [Ja08] P. JAMMES – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, 83 (3), p. 521–537, 2008, math.DG/0601738.
- [Ja09] P. JAMMES – « Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », *J. Geom. Anal.*, 19 (3), p. 643–654, 2009, math.DG/0608758.
- [Ja11] P. JAMMES – « Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham », *Comment. Math. Helv.*, 86 (4), p. 967–984, 2011, arXiv :0804.0104.
- [La05] M.-L. LABBI – « Double forms, curvature structures and the (p, q) curvatures », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357 (10), p. 3971–3992, 2005, math.DG/0404081.
- [La06] M.-L. LABBI – *Courbure riemannienne : différentes notions de positivité*, habilitation à diriger des recherches, université de Montpellier II, 2006, math.DG/0611371.
- [Lo96] J. LOHKAMP – « Discontinuity of geometric expansions », *Comment. Math. Helv.*, 71 (2), p. 213–228, 1996.
- [Mc93] J. MCGOWAN – « The p -spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.
- [Na88] N. NADIRASHVILI – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.*, 61 (1), p. 225–238, 1988.
- [Sé94] B. SÉVENNEC – « Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 12, p. 29–36, 1994.

- [Sé02] B. SÉVENNEC – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.*, 324 (1), p. 195–211, 2002.
- [Ta96] M. TAYLOR – *Partial differential equations I*, Springer, 1996.
- [Wi82] E. WITTEN – « Supersymmetry and Morse theory », *J. Differ. Geom.*, 17, p. 661–692, 1982.

Pierre JAMMES
 Université d'Avignon et des pays de Vaucluse
 Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie (EA 2151)
 F-84018 Avignon
 Pierre.Jammes@ens-lyon.org