
PETITES VALEURS PROPRES DES FIBRÉS PRINCIPAUX EN TORES

par

Pierre Jammes

Résumé. — Soit M^n un fibré principal en tores T^k sur une variété compacte N . On étudie le spectre du laplacien de Hodge-de Rham lors d'effondrements de M sur N tels que la courbure sectionnelle et le diamètre de M vérifient $|K(M)| \leq a$ et $\text{diam}(M) < d$. On montre d'une part que pour tout k , il existe des effondrements pour lesquels la première valeur propre du laplacien agissant sur les formes différentielles de degré 1 et 2 est de l'ordre de $\text{inj}(M)^{2k}$, et d'autre part que la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les 1-formes est minorée par $c(n, a, d, N) \cdot \text{Vol}(M)^2$ et $c \cdot \text{inj}(M)^{2k}$ quand M^n s'effondre sur N .

Abstract. — Let M^n be a compact manifold of dimension n with free T^k -action. We consider collapsings of M on $N = M/T^k$ such that the sectional curvature and diameter of M satisfy $|K(M)| \leq a$ and $\text{diam}(M) < d$, and give examples of collapsings for all k such that the first non-zero eigenvalue of Laplacian acting on 1-forms and 2-forms of M are bounded above by $c(M) \cdot \text{inj}(M)^{2k}$. Moreover we prove that the first non-zero eigenvalue of Laplacian acting on 1-forms of all principal T^k -bundle M over N is bounded below by $c(n, a, d, N) \cdot \text{Vol}(M)^2$ and $c \cdot \text{inj}(M)^{2k}$ when M collapses on N .

1. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe orientable de dimension n . On considère l'opérateur $\Delta = d\delta + \delta d$ agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p -formes différentielles sur M . Le spectre de cet opérateur forme un ensemble discret de nombres positifs ou nuls qu'on notera

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots,$$

Classification mathématique par sujets (2000). — 58C40 (primary), 58J50, 35P15, 53C20 (secondary).

où la multiplicité de $\lambda_{p,0}(M, g)$ est le p -ième nombre de Betti de M , les autres valeurs propres étant répétées s'il y a multiplicité.

On sait qu'à diamètre borné et courbure de Ricci minorée, la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les fonctions est uniformément minorée ([Gro80], [LY80]). B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC90] qu'il n'en va pas de même pour les formes différentielles de degré quelconque et qu'à diamètre et courbure sectionnelle bornés, on peut avoir des valeurs propres arbitrairement petites. De plus, ils montrent que ce phénomène de petites valeurs propres est lié au fait que la variété s'effondre, c'est-à-dire que son volume — ou de manière équivalente son rayon d'injectivité — tend vers zéro, ce qui conduit à considérer le problème suivant :

Question 1.1. — Peut-on minorer $\lambda_{p,1}$ en fonction de bornes sur le diamètre, la courbure et le rayon d'injectivité, notamment lorsque la variété s'effondre ?

T. Mantuano donne dans [Man08] une minoration très générale du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, mais sa dépendance par rapport au rayon d'injectivité n'est pas explicite. S. Chanillo et F. Trèves avaient auparavant donné dans [CT97] une minoration qui permettait d'expliciter le rôle du rayon d'injectivité, mais leur résultat est compromis par une erreur décelée par T. Mantuano. Dans [CC00], B. Colbois et G. Courtois étudient le cas particulier des fibrés en cercles s'effondrant sur leur base et montrent — entre autres choses — que les petites valeurs propres sont alors de l'ordre du rayon d'injectivité au carré, qui est alors du même ordre que le volume au carré. On peut donc reformuler la question 1.1 ainsi :

Question 1.2. — Peut-on obtenir une minoration de $\lambda_{p,1}(M, g)$ asymptotiquement de l'ordre de $\text{inj}(M, g)^2$ ou $\text{Vol}(M, g)^2$ quand la variété s'effondre ?

En dehors du cas des fibrés en cercles, cette question est presque totalement ouverte. Pour les situations de limites adiabatiques sur certains feuilletages (c'est-à-dire lorsque la métrique s'écrit sous la forme $g = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$ où g_V une métrique sur les espaces tangents V aux feuilles, g_H une métrique sur une distribution complémentaire à V), on sait ([For95], [ALK00]) qu'on peut calculer pour tout entier k le nombre de petites valeurs propres de l'ordre de ε^{2k} à l'aide d'une suite spectrale, mais ces effondrements ne sont pas nécessairement à courbure bornée. Dans le cas où la feuille est de dimension 1, on peut cependant obtenir des effondrements à courbure bornée produisant des petites valeurs propres (cf. [Jam10]). On peut trouver une présentation plus détaillée des questions 1.1 et 1.2 dans [Jam05] ou [Jam11].

Le but du présent travail est de donner des éléments de réponse à la question 1.2 en étudiant le spectre des fibrés principaux en tores s'effondrant sur leur base. Nous allons montrer deux résultats. Le premier apporte une réponse

négative à la question 1.2 en ce qui concerne le rayon d'injectivité. En effet on peut construire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ des effondrements pour lesquels certaines valeurs propres décroissent au moins aussi vite que $\text{inj}(M, g)^{2k}$. Pour cela on utilisera le fait que, si la fibre est de dimension supérieure ou égale à 2, on peut l'effondrer non par homothétie mais en privilégiant une certaine direction qu'on choisira pour ses propriétés diophantiennes. Ces effondrements permettent aussi de construire des contre-exemples à certaines des estimées de [CT97] :

Théorème 1.3. — *Pour tout entier $k \geq 1$ et pour toute variété (N, h) telle que $b_2(N) \geq k$, il existe un fibré principal M en tore T^k sur N , une famille de métrique $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ sur M , et des réels strictement positifs $C_i(k, (N, h))$, $i = 1, 2, 3$ et $\varepsilon_0(k, (N, h))$ tels que la courbure et le diamètre de (M, g_ε) soient uniformément bornés par rapport à ε , $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon$ pour tout ε , et*

$$(1.1) \quad \varepsilon^2 \leq C_1 \cdot \lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C_2 \cdot \text{inj}^{2k}(M, g_\varepsilon) \leq C_3 \cdot \varepsilon^2$$

pour $p = 1$ et 2, et pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.

De plus, si $b_1(N) > b_2(M)$, on a aussi pour $p = 2$ et 3

$$(1.2) \quad \varepsilon^2 \leq C_1 \cdot \lambda_{p, b_1(N) - b_2(M)}(M, g_\varepsilon) \leq C_2 \cdot \text{inj}^{2k}(M, g_\varepsilon) \leq C_3 \cdot \varepsilon^2.$$

Remarque 1.4. — Le théorème 1.3 montre qu'on ne peut pas minorer la première valeur propre du laplacien par une puissance de rayon d'injectivité indépendante de la dimension. Plus précisément, comme on peut construire des variétés de dimension 3 dont le 2^e nombre de Betti est arbitrairement grand, il existe pour tout $n \geq 4$ des variétés de dimension n vérifiant (1.1) avec $k = n - 3$. On ne peut donc pas espérer obtenir de minoration générale par le rayon d'injectivité avec un exposant inférieur à $2n - 6$ si $n \geq 4$.

Remarque 1.5. — Les effondrements du théorème 1.3 fournissent des contre-exemples à certains des résultats de [CT97], en particulier les théorèmes 1.1 et 1.2 (voir exemple 5.9).

Remarque 1.6. — On verra dans la section 5 qu'il existe effectivement des fibrés vérifiant la condition $b_1(N) > b_2(M)$.

En petite dimension, on peut en déduire un résultat pour les formes de tout degré :

Corollaire 1.7. — *Pour $n = 5$ et 7, il existe un fibré M en tores T^2 sur une variété de dimension $n - 2$, une suite de métrique (g_ε) sur M et une constante $C > 0$ telles que la suite (g_ε) effondre le fibré M sur sa base à courbure et diamètre bornés quand ε tend vers zéro, et que*

$$(1.3) \quad \lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C \cdot \text{inj}^4(M, g_\varepsilon)$$

pour $1 \leq p \leq n - 1$.

Le second théorème donne, dans le cas des 1-formes, des minoration du spectre en fonction du volume et du rayon d'injectivité :

Théorème 1.8. — *Soit deux réels a et d strictement positifs, un entier $n \geq 3$ et (N, h) une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à n . Il existe des constantes $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$, $C(n, a, d, (N, h)) > 0$ et $C'(n, a, d, (N, h)) > 0$ telles que si (M, g) est une variété riemannienne de dimension n vérifiant $\text{diam}(M, g) \leq d$, $|K(M, g)| \leq a$ et si $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une fibration principale de fibre T^k qui soit une ε -approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors*

$$(1.4) \quad \lambda_{1,1}(M, g) \geq C \cdot \text{Vol}^2(M, g) \geq C' \cdot \text{inj}^{2k}(M, g).$$

Remarque 1.9. — L'exposant du volume dans la minoration (1.4) est optimal. On peut par exemple considérer le cas de produit riemannien d'un fibré en cercles qui s'effondre par un tore dont la métrique est fixée mais dont le diamètre est suffisamment petit pour que le fibré produit soit proche de la base pour la distance de Gromov-Hausdorff, les résultats de [CC00] assurent que dans ce cas, $\lambda_{1,1}(M)$ ne peut pas décroître plus lentement que $\text{Vol}^2(M)$. L'inégalité (1.1) assure par ailleurs que l'exposant du rayon d'injectivité dans (1.4) est lui aussi optimal.

Remarque 1.10. — On sait déjà que si la fibre est de dimension supérieure ou égale à deux, on ne peut pas obtenir pour les fibrés en tores de majoration de $\lambda_{1,1}(M)$ par le volume au carré comme c'est le cas pour les fibrés en cercles. En effet, on peut construire des exemples d'effondrements de fibrés principaux en tores pour lesquels la première valeur propre du laplacien ne tend pas vers zéro (cf. [Jam03], théorème 1.13 et paragraphe 4.2).

Le théorème 1.8 soulève les deux questions suivantes qui restent ouvertes :

Question 1.11. — Peut-on généraliser ces résultats aux p -formes différentielles, pour tout p ?

Question 1.12. — La minoration du spectre par le volume au carré de la variété se généralise-t-elle à d'autres familles de variétés ?

Pour démontrer les théorèmes 1.3 et 1.8, nous commencerons par trois sections préliminaires sur la topologie, la géométrie et le spectre des fibrés principaux en tores.

Dans la section 2, nous définirons un invariant topologique généralisant la classe d'Euler des fibrés en cercles et qui pourra être utilisé pour contrôler le spectre.

La section 3 sera consacrée à l'étude de la géométrie des fibrés principaux en tores. Le résultat principal est que pour démontrer le théorème 1.8 on peut se ramener à une situation géométrique simple. En particulier, on montrera

qu'une métrique de courbure et diamètre bornés sur le fibré est proche d'une métrique invariante pour laquelle les fibres sont totalement géodésiques (théorème 3.1).

Dans la section 4, nous étudierons comment, dans le cas d'un fibré principal en tore T^k muni d'une métrique invariante, on peut se ramener à l'étude des petites valeurs propres du laplacien à celle du spectre du laplacien restreint aux formes différentielles invariantes par l'action de T^k (théorème 4.1). Dans le cas des fibrés en cercles, ce théorème améliore sensiblement un résultat semblable obtenu par B. Colbois et G. Courtois ([CC00]) qui nécessitait des hypothèses de courbure et diamètre bornés.

Les deux dernières sections seront consacrées aux démonstrations des théorèmes 1.3 et 1.8. Dans la section 5, nous construirons les exemples d'effondrements annoncés dans le théorème 1.3.

Enfin, dans la section 6, nous démontrerons l'inégalité (1.4) du théorème 1.8 en utilisant les résultats des sections précédentes.

Ces travaux ont été en grande partie réalisés à l'Institut de mathématiques de Neuchâtel et au Laboratoire de mathématiques d'Avignon, qu'ils en soient remerciés. Ma gratitude va aussi à Amandine Lacuès pour sa relecture attentive du texte, ainsi qu'au rapporteur anonyme dont les remarques ont permis d'améliorer le texte et de simplifier certaines démonstrations.

2. Topologie des fibrés principaux en tores

Nous allons dans cette partie nous attacher à décrire la topologie des fibrés principaux en tores, et en particulier à construire un invariant différentiel qui permettra, comme la classe d'Euler dans le cas des fibrés en cercles, d'étudier le comportement du spectre du laplacien lors d'un effondrement.

Soit M un fibré principal en tores T^k sur une base N . Le fibré M peut se décomposer en la somme de Whitney de k fibrés en cercles, de classes d'Euler respectives $e_1, \dots, e_k$, mais le k -uplet $(e_1, \dots, e_k) \in H^2(N)^k$ dépend du choix de cette décomposition.

Dans le cas d'un fibré en cercles de classe d'Euler $[e]$, on a la propriété suivante ([BT82], p.72) : si ω est une 1-forme de connexion du fibré, alors $d\omega$ est une 2-forme horizontale qui dépend du choix de la connexion sur le fibré, mais qui est, au signe près, le relevé d'un élément de $[e]$. Dans le cas d'un fibré en tores, on va construire un invariant qui généralise cette propriété.

Dans le cas d'un fibré principal quelconque, une forme de connexion γ est une 1-forme verticale invariante à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de la fibre (voir par exemple [Ram05], chapitre 5). Si on se donne un élément ω de $\mathcal{G}^*$ et qu'on applique ω à l'image de la forme de connexion, on obtient une 1-forme verticale $\omega \circ \gamma$ à valeur réelle. Si $\text{Ker } \omega$ est tangent à un sous-tore $T^{k-1} \subset T^k$, alors $\omega \circ \gamma$ est le relevé d'une forme de connexion sur M/T^{k-1} , et donc $d(\omega \circ \gamma)$

est le relevé de la classe d'Euler $e \in H^2(N)$ de ce fibré. Par linéarité, on peut étendre cette construction en une application $\omega \rightarrow e(\omega)$.

Définition 2.1. — On appelle classe d'Euler du fibré principal $T^k \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow H^2(N, \mathbb{R})$ déterminée par $d(\omega \circ \gamma) = \pi^*(e(\omega))$ où γ est une forme de connexion du fibré et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de T^k .

Remarque 2.1. — Si $k = 1$ et si ω est la forme volume du cercle de longueur 1, alors $e(\omega)$ est la classe d'Euler du fibré.

On a défini ainsi une classe d'Euler en cohomologie de Rham. On peut aussi la définir en cohomologie de Čech en partant du fait que les T^k -fibrés principaux ont classifiés par les éléments de $H^1(N, T^k)$. Comme la suite exacte courte $1 \rightarrow \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \rightarrow T^k \rightarrow 1$ induit une suite exacte en cohomologie de Čech

$$(2.2) \quad H^1(N, \mathbb{Z}^k) \rightarrow H^1(N, \mathbb{R}^k) \rightarrow H^1(N, T^k) \rightarrow H^2(N, \mathbb{Z}^k) \rightarrow,$$

on peut définir la classe d'Euler comme l'image dans $H^2(N, \mathbb{Z}^k)$ de l'élément de $H^1(N, T^k)$ caractérisant le fibré. L'équivalence entre les deux définitions s'établit en se ramenant par projections au cas des fibrés en cercles.

Exemple 2.2. — Le théorème 1.13 de [Jam03] montre — entre autres choses — qu'un fibré principal en tores T^k non trivial dont la base est un tore T^2 peut s'écrire comme produit d'une nilvariété de dimension 3 et d'un tore T^{k-1} . Comme $H^2(T^2)$ est de dimension 1, le noyau de e est de dimension $k-1$, ce qui signifie qu'on peut décomposer le fibré en une somme de Whitney de k fibrés en cercles dont $k-1$ sont triviaux. On retrouve donc le fait que le fibré peut s'écrire comme le produit d'un fibré en cercles sur T^2 et d'un tore de dimension $k-1$.

3. Géométrie des fibrés principaux en tores

3.1. Métriques adaptées. — Nous allons ici montrer qu'on peut, dans le but d'obtenir le théorème 1.8, se ramener à une situation géométrique plus simple. Cette situation est une généralisation de la notion de métrique adaptée définie dans le cas des fibrés en cercles par B. Colbois et G. Courtois ([CC00]) :

Définition 3.1. — On dit que le couple de métriques (g, h) définies sur M et N respectivement est adapté à la fibration principale $T^k \hookrightarrow M^n \xrightarrow{\pi} N$ si :

1. La fibration $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une submersion riemannienne ;
2. L'action de T^k sur M est isométrique ;
3. Les fibres sont totalement géodésiques ;

4. Toute 1-forme verticale ω induite par un élément de $\mathcal{G}^*$ vérifie $d\omega = \pi^*(e(\omega))$, où e est la classe d'Euler du fibré.

On veut montrer qu'une métrique de courbure bornée sur un fibré principal en tores est proche d'une métrique adaptée :

Théorème 3.1. — Soient a et d deux réels strictement positifs, et $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en tores. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n, a, (N, h)) > 0$, $\tau(n, a, (N, h)) > 0$, $\tau'(n, a, (N, h)) > 0$ et $c(n, a, (N, h)) > 0$ telles que si $|K(N, h)| \leq a$, $|K(M, g)| \leq a$ et si π est une ε -approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors il existe des métriques $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ sur M et N respectivement et une fibration $\pi' : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, \tilde{h})$ telles que

1. Le couple $(\tilde{g}, \tilde{h})$ est adapté à la fibration π' ;
2. $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ et $\frac{1}{\tau}h \leq \tilde{h} \leq \tau h$;
3. La restriction de $\tilde{g}$ à la fibre est telle que $\text{diam}(\pi'^{-1}(x)) \leq \tau'\varepsilon$, pour tout $x \in N$;
4. La courbure sectionnelle de $(M, \tilde{g})$ vérifie $|K(X, Y)| \leq c$, pour toute paire de vecteurs horizontaux orthonormés (X, Y) .

On pourra alors appliquer le résultat de J. Dodziuk selon lequel si deux métriques sont proches, alors les spectres du laplacien pour ces deux métriques sont proches aussi :

Théorème 3.2 ([Dod82]). — Soit g et $\tilde{g}$ deux métriques riemanniennes sur une variété compacte M de dimension n , et τ une constante strictement positive. Si les deux métriques vérifient $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, alors

$$\frac{1}{\tau^{3n-1}}\lambda_{p,k}(M, g) \leq \lambda_{p,k}(M, \tilde{g}) \leq \tau^{3n-1}\lambda_{p,k}(M, g),$$

pour tous entiers $k \geq 0$ et $p \in [0, n]$.

Remarque 3.3. — En vertu d'un théorème de Hermann ([Her60], [Bes08] p. 249), le fait que les fibres soient totalement géodésiques implique qu'elles sont isométriques entre elles. On va voir dans la démonstration du théorème 3.1 que réciproquement, sur les fibrés considérés, si la métrique est invariante et que les fibres sont isométriques alors elles sont totalement géodésiques.

3.2. Situation de métrique invariante. — Nous allons dans un premier temps montrer que si on suppose qu'on a sur M une métrique invariante, elle est proche d'une métrique qui vérifie les points (1) à (3) de la définition 3.1. Plus précisément :

Proposition 3.4. — Soit $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en tores muni d'une métrique invariante g tel que π soit une submersion riemannienne. Pour tout $a > 0$ et $d > 0$, il existe des constantes $\tau(n, a, d) > 0$ et $c(n, a) > 0$ telles que si $|K(N, h)| \leq a$, $K(M, g) \geq -a$ et $\text{diam}(M, g) \leq d$, alors il existe une métrique invariante $\tilde{g}$ sur M telle que la fibration $\pi : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, h)$ soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques et

$$\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g.$$

Remarque 3.5. — On peut noter qu'on utilise non pas une hypothèse de courbure bornée sur M mais seulement que la courbure sectionnelle est mino-rée.

Pour montrer la proposition 3.4, on utilisera les deux lemmes suivants. Le premier est une application directe de la formule de O'Neill :

Lemme 3.2. — Soit $a > 0$ et $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en tores muni d'une métrique invariante g tel que π soit une submersion riemannienne, $|K(N, h)| \leq a$, et $K_{(M, g)}(X, Y) \geq -a$ pour tout couple (X, Y) de vecteurs horizontaux orthonormés. Alors, pour toute 1-forme différentielle verticale ω , on a :

1. $|\text{d}\omega(X, Y)|_x^2 \leq \frac{8a}{3}|\omega|_x^2$, pour tout $x \in M$ et tout couple de vecteurs horizontaux orthonormés X et Y ;
2. $\|\text{d}\omega\|_\infty \leq \frac{4an(n-1)}{3}\|\omega\|_\infty$.

Démonstration. — Soit $x \in M$, $y = \pi(x)$, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux champs de N orthonormés en y , et X et Y les relevés de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ à M . La formule de O'Neill ([GHL87] p. 127, [Bes08] p. 241) donne

$$(3.3) \quad K_N(\tilde{X}, \tilde{Y}) = K_M(X, Y) + \frac{3}{4} |[X, Y]^V|^2,$$

où $[X, Y]^V$ désigne la composante verticale de $[X, Y]$. D'autre part on a, en utilisant le fait que ω est verticale,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \text{d}\omega(X, Y) &= X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([X, Y]). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} |\text{d}\omega(X, Y)|_x^2 &= |\omega([X, Y])|_x^2 \leq |\omega|_x^2 |[X, Y]^V|_x^2 \\ &\leq \frac{4}{3} |\omega|_x^2 (K_y(\tilde{X}, \tilde{Y}) - K_x(X, Y)). \end{aligned}$$

Comme chacun des couples $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ et (X, Y) est orthonormé en x et y , on a les majorations $|K_y(\tilde{X}, \tilde{Y})| \leq a$ et $K_x(X, Y) \geq -a$, et donc

$$(3.6) \quad |d\omega(X, Y)|_x^2 \leq \frac{8a}{3} |\omega|_x^2.$$

Et comme l'inégalité précédente est vraie quel que soit le choix de $(\tilde{X}, \tilde{Y})$, il en découle finalement

$$(3.7) \quad |d\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3} |\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3} \|\omega\|^2,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Le second lemme montre que dans le cas d'un fibré en cercles, à courbure bornée, la longueur des fibres varie peu d'une fibre à l'autre.

Lemme 3.8. — *Soit $S^1 \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$ un fibré principal en cercles sur N , tel que g soit invariante et π soit une submersion riemannienne. Pour tout $a > 0$ et $d > 0$, il existe $\tau(n, a, d) > 0$ tel que si $|K(N, h)| \leq a$, $K(M, g) \geq -a$ et $\text{diam}(M, g) \leq d$, alors pour tout $x, y \in N$, on a*

$$\frac{1}{\tau} l_y \leq l_x \leq \tau l_y,$$

où l_x et l_y désignent les longueurs des fibres au dessus de $\pi^{-1}(x)$ et $\pi^{-1}(y)$ respectivement.

Démonstration. — On choisit sur le fibré M une 1-forme verticale ω dont l'intégrale sur chaque fibre est égale à 1. Soit U le champ vertical induit par l'action de S^1 qui vérifie $\omega(U) = 1$. La norme $|U|$ de ce champ est constante sur chaque fibre, et s'écrit $|U| = \pi^* f$, où f est une fonction sur N . De plus, en tout point x de N , la norme $f(x)$ de U est égale à la longueur de la fibre au dessus de x . On va montrer que f est bornée en fonction de a et d . Remarque : ω n'est pas la forme duale de U pour la métrique. Sa norme ponctuelle sur la fibre $\pi^{-1}(x)$ est $|\omega| = \frac{1}{f}$, et on a $U^\flat = f^2 \omega$.

Soit $x \in N$, et $\tilde{X}$ un vecteur unitaire tangent à N en x . Soit $\tilde{X}_i$ une base orthonormée de champs de vecteurs au voisinage de x , telle que $D\tilde{X}_1 \tilde{X}_1 = 0$ sur ce voisinage, et $\tilde{X}_{1|x} = \tilde{X}$. On relève cette base à $T^H M$ en notant $X_i = \pi^*(\tilde{X}_i)$ et $X = X_1$. Ces champs vérifient $[U, X_i] = 0$. En effet, ces crochets de Lie sont déterminés par $[U, X_i] = \mathcal{L}_U X_i$, or les champs X_i sont S^1 -invariants. On notera par ailleurs V le champ de norme 1 défini par $V = U/|U|$. On a alors $[V, X_i] = (df(X_i)/f)V$.

On va calculer la courbure sectionnelle $K(X, V)$ en fonction de f et de ses variations. On utilisera pour cela les formules de O'Neill (cf. chapitre 9 de [Bes08]) qui donnent en particulier

$$(3.9) \quad K(X, V) = ((D_X T)_V V, X) - |T_V X|^2 + |A_X V|^2,$$

avec les notations suivantes :

- le vecteur $A_X V$ est la composante horizontale de $D_X V$;
- le vecteur $T_V X$ est la composante verticale de $D_V X$;
- le vecteur $T_V V$ est la composante horizontale de $D_V V$ (et mesure donc la courbure extrinsèque de la fibre).

On utilisera abondamment la formule de Koszul, qui caractérise la connexion de Levi-Civita,

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 2\langle D_{Z_1} Z_2, Z_3 \rangle &= Z_1 \cdot \langle Z_2, Z_3 \rangle + Z_2 \cdot \langle Z_3, Z_1 \rangle - Z_3 \cdot \langle Z_1, Z_2 \rangle \\ &+ \langle [Z_1, Z_2], Z_3 \rangle - \langle [Z_1, Z_3], Z_2 \rangle - \langle [Z_2, Z_3], Z_1 \rangle, \end{aligned}$$

ainsi que l'orthogonalité de $(X_1, \dots, X_n, U)$ qui annulera les premiers termes du membre de droite de cette formule. Elle donne directement

$$(3.11) \quad \langle D_V X, V \rangle = \langle [V, X], V \rangle = \frac{df(X)}{f} \text{ et } \langle D_X V, X_i \rangle = -\frac{1}{2} \langle [X, X_i], V \rangle^2.$$

On en déduit $|T_U X|^2 = \left(\frac{df(X)}{f}\right)^2$ et $|A_X V|^2 = \frac{1}{4} \sum_i \langle [X, X_i], V \rangle^2$.

On calcule le terme restant en partant de la formule de Leibniz :

$$(3.12) \quad \langle (D_X T)_V V, X \rangle = D_X \langle T_V V, X \rangle - \langle T_{D_X V} V, X \rangle - \langle T_V D_X V, X \rangle.$$

La formule de Koszul donne alors

$$(3.13) \quad \langle T_V V, X \rangle = \langle D_V V, X \rangle = -\langle [V, X], V \rangle = -\frac{df(X)}{f}$$

et donc

$$(3.14) \quad D_X \langle T_V V, X \rangle = \left(\frac{df(X)}{f}\right)^2 - \frac{\text{Hess } f(X, X)}{f}.$$

On obtient aussi que $D_X V = -\frac{1}{2} \sum_i \langle [X, X_i], V \rangle X_i$. Comme $T_{X_i} V = 0$ ([Bes08], p. 239), on en déduit d'une part que $T_{D_X V} V = 0$. Et d'autre part, comme $T_V X_i$ est vertical on a aussi $\langle T_V D_X V, X \rangle = 0$. Il reste finalement :

$$(3.15) \quad K(X, V) = -\frac{\text{Hess } f(X, X)}{f} + \frac{1}{4} \sum_i \langle [X, X_i], V \rangle^2.$$

Les derniers termes peuvent être majorés en fonction de la courbure. En effet, on a

$$(3.16) \quad \langle [X, X_i], V \rangle = V^\flat([X, X_i]) = f\omega([X, X_i]) = -f d\omega(X, X_i),$$

et donc, en vertu du lemme 3.2,

$$(3.17) \quad \langle [X, X_i], V \rangle^2 \leq f^2 \frac{8a}{3} |\omega|^2 = \frac{8a}{3}.$$

Par hypothèse, la courbure sectionnelle de M est minorée par $-a$. On a donc finalement :

$$(3.18) \quad \frac{\text{Hess } f(X, X)}{f} \leq \left(\frac{2n}{3} + 1 \right) a.$$

Soient x et y deux points de N , et γ une géodésique minimisante joignant ces deux points. Notons μ la fonction définie par

$$(3.19) \quad \mu(t) = \ln f \circ \gamma(t).$$

En dérivant μ par rapport à t , on obtient :

$$(3.20) \quad \mu'(t) = \frac{df(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)}$$

et

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \mu''(t) &= - \left(\frac{df(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \right)^2 + \frac{df(D_{\gamma'(t)}\gamma'(t)) + Ddf(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \\ &= -\mu'(t)^2 + \frac{\text{Hess } f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)}. \end{aligned}$$

On a donc, en vertu de la majoration (3.18) :

$$(3.22) \quad \mu''(t) \leq \frac{\text{Hess } f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \leq \left(\frac{2n}{3} + 1 \right) a.$$

Supposons que x est un point où f , et donc μ , atteint son minimum. On a alors $\mu'(0) = 0$ et donc, en remarquant que d majore le diamètre de N ,

$$(3.23) \quad \mu'(t) \leq \left(\frac{2n}{3} + 1 \right) at,$$

et

$$(3.24) \quad \mu(t) \leq \frac{2n+3}{6} at^2 \leq \frac{2n+3}{6} ad^2.$$

Le rapport $\frac{f(y)}{f(x)}$ est donc majoré par une constante $\tau = \exp(\frac{2n+3}{6} ad^2)$. Comme on a montré cette majoration en prenant pour x un point où f atteint son minimum, elle sera vraie *a fortiori* pour un x quelconque.

Remarque : si les fibres sont isométriques, alors le champ U est de norme constante. Il est aisé de vérifier à l'aide de (3.10) que $D_U U$ est alors nul, c'est-à-dire que les fibres sont totalement géodésiques. $\square$

de la proposition 3.4. — Le but est en fait de généraliser le lemme 3.8 aux fibrés en tores pour montrer que g est proche d'une métrique pour laquelle toutes les fibres sont isométriques.

Soit $\bar{U} \in \mathcal{G}$ non nul, où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de T^k , et U le champ vertical induit par $\bar{U}$ sur M . Soit $x_0 \in N$. On choisit $\bar{U}$ de sorte que $|U| = 1$ au dessus

de x_0 . De plus, on impose à $\bar{U}$ d'avoir un coefficient directeur rationnel, c'est-à-dire que $\bar{U}$ est colinéaire à un vecteur de $\mathbb{Z}^k \subset \mathcal{G}$. L'action du flot associé à U induit alors une fibration $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$. On peut contrôler la courbure de ce fibré. En effet, en utilisant la formule de O'Neill, on peut écrire

$$\begin{aligned} K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4} |[X, Y]^V|^2 \\ (3.25) \qquad &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4} \frac{|\mathrm{d}\omega(X, Y)|^2}{|\omega|^2}, \end{aligned}$$

où $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont deux vecteurs orthonormés de M' , X et Y leurs relevés respectifs sur M , et ω la 1-forme induite par l'action de T^k telle que $\omega(U) = 1$. Le lemme 3.2 permet de contrôler le dernier terme en fonction de la courbure de M , et donc

$$(3.26) \qquad K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq -a - 2a = -3a.$$

Le lemme 3.8 assure alors qu'il existe une constante $\tau(n, a, d)$ telle que

$$(3.27) \qquad \frac{1}{\tau} \leq |U| \leq \tau.$$

Notons $\tilde{g}$ la métrique invariante sur M obtenue en modifiant g dans la direction verticale de sorte que les fibres soient isométriques à $\pi^{-1}(x_0)$, et en conservant la distribution horizontale et la métrique horizontale associées à g . Pour cette nouvelle métrique, la norme de U est uniformément égale à 1. La relation (3.27) peut s'écrire

$$(3.28) \qquad \frac{1}{\tau^2} \tilde{g}(U, U) \leq g(U, U) \leq \tau^2 \tilde{g}(U, U),$$

Par continuité, les inégalités (3.28) s'étendent à n'importe quel vecteur vertical. Comme g et $\tilde{g}$ sont identiques sur la direction horizontale, on aura finalement

$$(3.29) \qquad \frac{1}{\tau^2} \tilde{g} \leq g \leq \tau^2 \tilde{g}.$$

Pour conclure, remarquons que si la métrique sur M est telle que les fibres soient isométriques, la fibration $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$ induite par le champ U est à fibre totalement géodésique. Par continuité, les fibres du fibré $T^k \hookrightarrow M \rightarrow N$ sont elles aussi totalement géodésiques. $\square$

3.3. Cas général. — On va maintenant démontrer le théorème 3.1. Pour ce faire, on va s'inspirer d'une démonstration d'un théorème de Lott ([Lot02], théorème 2), qui utilise les résultats de [CFG92].

Soit g une métrique sur M vérifiant les hypothèses du théorème 3.1. Tout d'abord, en utilisant un résultat de régularisation d'Abresch ([CFG92], théorème 1.12), on construit une métrique g_1 sur M telle que $\frac{1}{\tau_1} g \leq g_1 \leq \tau_1 g$, $|K(M, g_1)| \leq a$ et $\|D^i R\| \leq A_i(n, a, \tau_i)$, où $\tau_1 > 1$ est un réel fixé, et D et R

désignent respectivement la dérivée covariante et le tenseur de courbure pour la métrique g_1 .

On applique ensuite le théorème 2.6 de [CFG92], qui assure l'existence de constantes $\varepsilon_0(n, (N, h))$, $\kappa(n, A)$, $\kappa'(n, A, (N, h))$ et $\kappa_i(n, A, (N, h))$ et d'une fibration $\pi' : (M, g_1) \rightarrow (N, h)$ tel que si π est une ε -approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0(n, (N, h))$, alors :

- pour tout $x \in N$, le diamètre de $\pi'^{-1}(x)$ pour la métrique g' est inférieur à $\kappa\varepsilon$;
- la seconde forme fondamentale de la fibre vérifie $\|II_{\pi^{-1}(x)}\|_\infty \leq \kappa'$ pour tout $x \in N$;
- la submersion π' est κ_i -régulière, c'est-à-dire que $\|D^i \pi'\|_\infty \leq \kappa_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Enfin, pour une telle fibration π' , les parties 3 et 4 de [CFG92] donnent la construction d'une métrique g_2 sur M qui est T^k -invariante et telle que $|D^i(g_2 - g_1)| \leq c(n, A, (N, h), i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. Cette dernière égalité assure l'existence d'une constante $\tau_2(n, A, (N, h))$ telle que $\frac{1}{\tau_2}g_1 \leq g_2 \leq \tau_2 g_1$, et permet aussi de contrôler la courbure pour la métrique g_2 .

On peut alors appliquer la proposition 3.4, qui nous donne une métrique g_3 qui vérifie les points (1) à (3) de la définition 3.1. On utilise le fait que comme M est proche de N pour la distance de Gromov-Hausdorff, son diamètre est contrôlé par ε et le diamètre de N .

Pour obtenir la métrique $\tilde{g}$ du théorème 3.1, il reste à modifier la distribution horizontale de manière à ce que $\tilde{g}$ vérifie le point (4) de la définition 3.1. Remarquons tout d'abord que comme l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$ est linéaire, il suffit de montrer l'égalité $d\omega = \pi'^*(e(\omega))$ pour une base de $\mathcal{G}^*$. Soit (ω_i) une base de $\mathcal{G}^*$ orthonormée pour la métrique g_3 . Pour chaque i , $d\omega_i$ s'écrit

$$(3.30) \quad d\omega_i = \pi'^*(\alpha_i + d\beta_i),$$

où α_i est une forme harmonique et β_i une forme cofermée. On définit une nouvelle forme verticale $\omega'_i = \omega_i - \pi'^*(\beta_i)$. Cette forme vérifie

$$(3.31) \quad d\omega'_i = d\omega_i - \pi'^*(d\beta_i) = \pi'^*(\alpha_i) \in \mathcal{H}^2(N).$$

L'intersection des noyaux des formes ω'_i définit une nouvelle distribution horizontale. On définit $\tilde{g}$ comme étant la métrique sur M telle que $\pi' : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, h)$ soit une submersion riemannienne et $\tilde{g} = g_3$ sur l'espace vertical. Cette métrique vérifie le point (4) de la définition 3.1 du fait de (3.31).

On doit encore vérifier $\tilde{g}$ est proche de g_3 . Remarquons que

$$\tilde{g} - g_3 = \sum_i (\omega_i'^2 - \omega_i^2) = \sum_i (2\pi'^*(\beta_i) \otimes \omega_i + \pi'^*(\beta_i)^2).$$

Or, B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC00] (lemme A.32) qu'il existe une constante $\kappa(n, a, (N, h)) > 0$ telle que les formes β_i telles qu'on les a

définies vérifient $\|\beta_i\|_\infty \leq \kappa$, ce qui permet de conclure. Remarque : le lemme A.32 de [CC00] utilise le fait que pour la métrique g_3 , la norme de la seconde forme fondamentale est contrôlée et que la submersion π' est κ_i -régulière. Il n'est donc pas évident qu'on puisse obtenir le théorème 3.1 en supposant que la métrique initiale g est invariante et en se passant des résultats de [CFG92].

Enfin, il reste à montrer que la courbure de $(M, \tilde{g})$ reste bornée dans la direction horizontale. Soit $x \in N$, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ deux vecteurs orthonormés tangents à N en x , $\bar{\omega}$ une 1-forme invariante de T^k , ω la 1-forme induite sur M pour la distribution horizontale associée à g et ω' la 1-forme induite pour la distribution associée à $\tilde{g}$. Ces deux formes vérifient $d\omega' = \pi'^*(\alpha)$ et $d\omega = \pi'^*(\alpha + d\beta)$, où α est une 2-forme harmonique de N et β une 1-forme de N .

D'après la formule de O'Neill, il suffit pour contrôler la courbure sectionnelle $K_{(M, \tilde{g})}(\pi'^*(X), \pi'^*(Y))$ de majorer la norme de $[\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V$. Or, on peut écrire d'une part,

$$(3.32) \quad \omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V) = d\omega'(\pi'^*(X), \pi'^*(Y)) = \alpha(X, Y).$$

D'autre part, on a

$$(3.33) \quad \|\alpha\|_\infty \leq \tau'(N, h)\|\alpha\|_2,$$

d'après [Li80] (théorème 7), car α est harmonique, et

$$(3.34) \quad \|\alpha\|_2 \leq \|\alpha + d\beta\|_2 = \|d\omega\|_2 \leq \|d\omega\|_\infty,$$

en utilisant le fait qu'une forme harmonique est le plus petit élément de sa classe de cohomologie pour la norme L^2 . Enfin, le lemme 3.2 permet de contrôler la norme de $d\omega$ en fonction de a et $\|\omega\|_\infty$, et la norme de ω est contrôlé en fonction de $\|\omega'\|_\infty$. Comme la majoration de $\omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V)$ obtenue est indépendante du choix de $\bar{\omega}$, on a bien une majoration de $|[\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V|$ en fonction de n, a, ε et (N, h) .

4. Formes invariantes et petites valeurs propres

Nous allons ici démontrer que pour étudier les petites valeurs propres d'un fibré en tores muni d'une métrique invariante, on peut se restreindre aux formes invariantes :

Théorème 4.1. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $T^k \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré en tore T^k , $\bar{g}$ une métrique invariante sur T^k et f une fonction sur N strictement positive. Supposons que M est muni d'une métrique T^k -invariante g telle que pour tout $x \in N$, la restriction $\bar{g}_x$ de g à la fibre $\pi^{-1}(x)$ vérifie $\bar{g}_x \leq f(x) \cdot \bar{g}$.*

Soit λ une valeur propre du laplacien agissant sur les formes différentielles de M . Si $\lambda < (\sup_{x \in N} f(x))^{-1} \cdot \lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$, alors les formes propres associées sont T^k -invariantes.

Remarque 4.2. — On peut montrer que cette estimation est optimale : si on considère un fibré trivial muni d'une métrique produit, on voit que les formes propres de T^k de valeur propre $\lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$ induisent sur le fibré des formes propres de même valeur propre qui ne sont pas invariantes.

Remarque 4.3. — La démonstration du théorème met en évidence le fait que si la multiplicité d'une valeur propre est impaire, alors le sous-espace propre associé contient des formes invariantes.

Remarque 4.4. — Le résultat peut s'étendre à toute action isométrique d'un groupe de Lie compact.

Démonstration. — Soit E_λ un espace propre du laplacien de Hodge-de Rham sur M . Comme M est munie d'une action isométrique de T^k , on peut décomposer E_λ en somme de représentations irréductibles T^k . En notant $T^k = \mathbb{R}^k/\Gamma$, ces représentations sont classifiées par le réseau dual Γ^* de Γ . On a donc $E_\lambda = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma^*} E_{\lambda, \gamma}$, avec

$$(4.1) \quad E_{\lambda, \gamma} = \{\omega \in E_\lambda, \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{\xi, t}^* \omega = e^{i2\pi t \langle \gamma, \xi \rangle} \omega\},$$

où $\varphi_{\xi, t}$ est le flot du champ de vecteur X_ξ induit par l'action infinitésimale de ξ . Cet espace s'écrit aussi

$$(4.2) \quad E_{\lambda, \gamma} = \{\omega \in E_\lambda, \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \mathcal{L}_{X_\xi} \omega = i2\pi \langle \gamma, \xi \rangle \omega\}.$$

La formule de Cartan nous donne, pour $\omega \in E_{\lambda, \gamma}$,

$$(4.3) \quad \langle \mathcal{L}_{X_\xi} \omega, \omega \rangle = \langle d\iota_{X_\xi} \omega + \iota_{X_\xi} d\omega, \omega \rangle = \langle \iota_{X_\xi} \omega, \delta \omega \rangle + \langle d\omega, X_\xi^b \wedge \omega \rangle.$$

En utilisant le fait que $|X_\xi^b \wedge \omega|^2 + |\iota_{X_\xi} \omega|^2 = |X_\xi|^2 |\omega|^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(4.4) \quad \begin{aligned} |\langle \iota_{X_\xi} \omega, \delta \omega \rangle + \langle d\omega, X_\xi^b \wedge \omega \rangle| &\leq \|X_\xi\|_\infty \|\omega\|_{L^2} (\|\delta \omega\|_{L^2}^2 + \|d\omega\|_{L^2}^2)^{1/2} \\ &\leq \|X_\xi\|_\infty \lambda^{1/2} \|\omega\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En combinant (4.2) et (4.4), on obtient que $2\pi \langle \gamma, \xi \rangle \leq \|X_\xi\|_\infty \lambda^{1/2}$.

On peut fixer le réseau Γ de sorte que la métrique quotient sur T^k soit la métrique $\bar{g}$. Le spectre de $(T^k, \bar{g})$ (pour les fonctions) est alors $\{4\pi^2 |\gamma|^2, \gamma \in \Gamma^*\}$ (cf. [GHL87]). Pour un ξ donné de norme 1, la norme de X_ξ est 1 pour la métrique $\bar{g}$ donc, $\|X_\xi\|_\infty^2 \leq \sup_{x \in N} f(x)$. Si $\gamma \neq 0$ et qu'on choisit ξ de norme 1 tel que $\langle \gamma, \xi \rangle = |\gamma|$, on a alors

$$(4.5) \quad \lambda_{0,1}(T^k, \bar{g}) \leq 4\pi^2 |\gamma|^2 \leq \sup_{x \in N} f(x) \lambda.$$

Si $\lambda < \sup_{x \in N} f(x)^{-1} \cdot \lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$, alors $\gamma = 0$ et E_λ est constitué de formes invariantes. $\square$

de la remarque 4.3. — Il suffit de remarquer que dans la démonstration du théorème, si la dimension du sous-espace propre E_λ est impaire la décomposition de cet espace représentations irréductibles contient nécessairement la représentation triviale, et donc E_λ contient des formes invariantes. $\square$

5. Petites valeurs propres et rayon d'injectivité

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.3. Le cas $k = 1$ découlant de [CC00], nous supposons $k \geq 2$. Soit N une variété telle que $b_2(N) \geq k$. On se donne un fibré principal en tores M sur N tel que l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow H^2(N)$ définie dans la section 2 soit injective (c'est possible car $b_2(N) \geq k$).

On se donne sur M et N des métriques g et h telles que le couple (g, h) soit adapté (au sens défini en 3.1) à la fibration $M \rightarrow N$ et que la restriction $\bar{g}$ de la métrique g à la fibre T^k soit le quotient de la métrique canonique de $\mathbb{R}^k$ à $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ (on a vu dans la section 3 que le fait que les fibres soient totalement géodésiques est équivalent au fait qu'elles soient isométriques entre elles). On va construire la famille de métriques (g_ε) sur M en faisant varier la métrique g_ε le long de la fibre, la connexion et la composante horizontale de la métrique restant identiques à celles de g .

Soit $y \in \mathbb{R}^{k-1}$ un $(k-1)$ -uplet difficilement approchable, c'est-à-dire tel qu'il existe une constante $c(y)$ telle que pour tout $p \in \mathbb{Z}^{k-1}$ et tout $q \in \mathbb{Z}$, on a

$$(5.1) \quad \|p - qy\|^{k-1}|q| \geq c(y),$$

la norme considérée étant la norme euclidienne canonique. On sait qu'il existe une infinité non dénombrable de tels $(k-1)$ -uplet (voir [Sch80], p. 22 et p. 41–43). On se donne une base orthonormée $(X_1, \dots, X_k)$ de $\mathbb{R}^k$ telle que X_1 soit colinéaire au vecteur $(1, y)$. Pour tout ε , on se donne la base $\mathcal{B}_\varepsilon = (\frac{1}{\varepsilon}X_1, X_2, \dots, X_k)$ et on définit la métrique $\bar{g}_\varepsilon$ sur $\mathbb{R}^k$ en posant que $\mathcal{B}_\varepsilon$ est orthonormée pour $\bar{g}_\varepsilon$, c'est-à-dire qu'on obtient $\bar{g}_\varepsilon$ en contractant les longueurs d'un rapport ε dans la direction de X_1 . Le passage de $\bar{g}_\varepsilon$ au quotient $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ détermine une métrique sur T^k , qui elle-même induit la métrique (g_ε) sur M . On a en particulier $g_1 = g$. Les résultats classiques sur les effondrements ([Car84], [CG86] théorème 2.1) assurent que la courbure de (M, g_ε) reste bornée quand ε tend vers zéro.

On va montrer l'inégalité 1.1 du théorème 1.3 en estimant successivement le volume, le rayon d'injectivité et la première valeur propre de M en fonction de ε .

Fait 5.1. — Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \text{Vol}(N, h) \cdot \varepsilon$.

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \text{Vol}(N, h) \cdot \text{Vol}(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$, et que $\text{Vol}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) = \text{Det}_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathcal{B}_1 = \varepsilon$. $\square$

Pour obtenir le théorème 1.3, on aura à reparamétriser g_ε de sorte que $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon$.

Fait 5.2. — Il existe des constantes $\varepsilon_0(y, k) > 0$ et $C(y, k) > 0$ telle que $\text{inj}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) \geq C \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Démonstration. — Calculer le rayon d'injectivité de $(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$ revient à calculer le minimum des normes dans $\mathbb{R}^k$ des points non nuls du réseau $\mathbb{Z}^k$ pour la métrique $\bar{g}_\varepsilon$. Plus précisément, on peut écrire

$$(5.2) \quad 2 \text{inj}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) = \min_{(p,q) \in \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z} \setminus (0,0)} \|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon}.$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0)$. On note z la projection orthogonale de (p, q) sur la droite vectorielle D engendrée par X_1 (remarque : elle ne dépend pas de ε), θ l'angle entre D et l'hyperplan $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ pour la métrique canonique (on a $\tan \theta = \|y\|^{-1}$) et θ' l'angle entre D et le vecteur $(p, q) - (q \cdot y, q)$ (voir figure 1). De plus, on notera $\|\cdot\|_{\bar{g}_\varepsilon}$ la norme pour la métrique g_ε et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique. On peut écrire :

$$(5.3) \quad \|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 = \|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 + \|z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2.$$

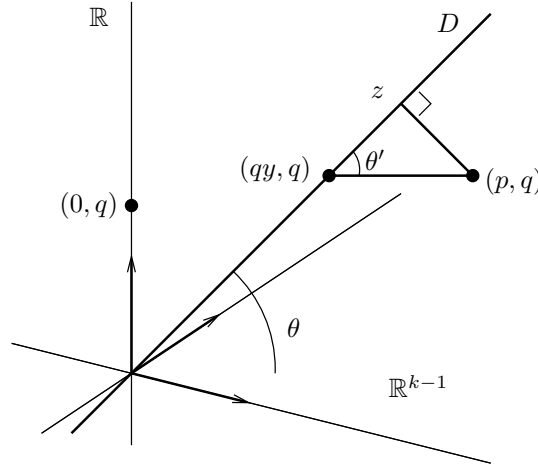


FIGURE 1.

Le vecteur $(p, q) - z$ est orthogonal à D , donc la norme $\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}$ est indépendante de ε . On a donc, en utilisant la relation (5.1) :

$$(5.4) \quad \|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon} = \|(p, q) - z\| = \sin \theta' \|p - qy\| \geq \frac{\sin \theta' \cdot c(y)^{\frac{1}{k-1}}}{|q|^{\frac{1}{k-1}}}.$$

Comme $\theta \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$ on en déduit

$$(5.5) \quad \|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 \geq \frac{a}{|q|^{\frac{2}{k-1}}}$$

où a est une constante ne dépendant que de k et y .

Le vecteur z est parallèle à D , donc $\|z\|_{\bar{g}_\varepsilon} = \varepsilon\|z\|$. De plus, on a

$$(5.6) \quad \|z\| \geq \|(q, qy)\| - \|z - (q, qy)\| \geq \frac{\|qy\|}{\cos \theta} - \|z - (q, qy)\|.$$

On peut supposer que $\|z - (q, qy)\| \leq \frac{\|qy\|}{2\cos \theta}$. En effet, dans le cas contraire, on a $\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon} \geq \sin \theta \|p - qy\| \geq \frac{\sin \theta}{2\cos \theta} \|qy\| \geq \frac{q}{2}$, ce qui signifie si $q \neq 0$ que $\|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2$ est minoré par $\frac{1}{2}$ et donc ne réalise pas le minimum en (5.2) quand ε est suffisamment petit (si $q = 0$, c'est $\sin \theta \|p - qy\|$ qui est uniformément minoré). On obtient finalement la minoration

$$(5.7) \quad \|z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 \geq \varepsilon^2 \frac{\|qy\|^2}{4\cos^2 \theta} = \varepsilon^2 b q^2,$$

où b est une constante qui ne dépend que de y , et donc

$$(5.8) \quad \|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 \geq \frac{a}{|q|^{\frac{2}{k-1}}} + \varepsilon^2 b q^2.$$

La fonction $f : t \rightarrow at^{-\frac{2}{k-1}} + \varepsilon^2 bt^2$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ un unique minimum en $t = \left(\frac{a}{\varepsilon^2 b(k-1)}\right)^{\frac{k-1}{2k}}$ dont la valeur est $\varepsilon^2 a^{\frac{k-1}{k}} b^{\frac{1}{k}} ((k-1)^{\frac{1}{k}} + (k-1)^{\frac{1-k}{k}})$. On peut donc en déduire que

$$(5.9) \quad \|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon} \geq C\varepsilon^{\frac{1}{k}}$$

où C est une constante ne dépendant que de y et k . $\square$

Remarque 5.3. — Il découle du second théorème du corps convexe de Minkowski (voir ch. 4 de [Sch80], en particulier le lemme 1D) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute métrique plate sur T^k , on a $\text{inj}(T^k)^{k-1} \cdot \text{diam}(T^k) \leq c \cdot \text{Vol}(T^k)$. On peut donc déduire du fait 5.2 que $\text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/k})$.

Remarque 5.4. — Comme la fibre est totalement géodésique, son rayon d'injectivité est égal au rayon d'injectivité de M si ε est suffisamment petit.

fait 5.5. — Il existe une constante $C'(N, k, e) > 0$ telle que pour tout ε , on a $\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C' \cdot \varepsilon^2$ pour $p = 1$ et 2.

Démonstration. — Commençons par le cas $p = 1$. Pour estimer la première valeur propre non nulle, on va d'abord calculer quelles sont les 1-formes harmoniques. On sait déjà d'après les résultats de la section précédente que les

formes harmoniques sont T^k -invariantes. Soit φ une 1-forme différentielle T^k -invariante de M . On peut écrire

$$(5.10) \quad \varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i,$$

où α est une 1-forme de N , a_i des fonctions de N et ω_i les 1-formes verticales induites par une base orthonormée de $\mathcal{G}^*$. On a alors :

$$(5.11) \quad d\varphi = \pi^*(d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^k d\pi^*(a_i) \wedge \omega_i,$$

où e_i désigne l'image de ω_i par l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$. De plus, pour tout i on a

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \|\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)\|^2 &= (\delta(\pi^*(a_i)\omega_i), \delta(\pi^*(a_i)\omega_i)) \\ &= (\pi^*(a_i)\omega_i, d\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)), \end{aligned}$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire L^2 . Comme $\pi^*(a_i)\omega_i$ est une forme T^k -invariante, $\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$ est une fonction invariante, c'est-à-dire que c'est le relevé d'une fonction sur N . Par conséquent, $d\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$ est le relevé d'une 1-forme sur N , et est donc orthogonale à $\pi^*(a_i)\omega_i$. Finalement, on a :

$$(5.13) \quad \delta\varphi = \pi^*(\delta\alpha).$$

Si φ est harmonique, on a $d\varphi = 0$ et $\delta\varphi = 0$, donc

$$(5.14) \quad \delta\alpha = 0, \quad da_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0.$$

Comme les fonctions a_i sont constantes, $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i$ est une 2-forme harmonique de N , donc orthogonale à la forme exacte $d\alpha$. On a donc $\Delta\alpha = 0$ et $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0$. Comme e est injective, les e_i forment une famille libre, et donc $a_i = 0$ pour tout i . On obtient finalement que les 1-formes harmoniques de M sont les relevés des 1-formes harmoniques de N .

Pour majorer la première valeur propre non nulle du laplacien, il suffit de calculer le quotient de Rayleigh pour la métrique g_ε d'une 1-forme orthogonale aux formes harmoniques. En notant (ω_i) les 1-formes verticales induites par la base duale de $\mathcal{B}_\varepsilon$, on choisit comme forme test $\varepsilon^{-1}\omega_1$. On vient de voir que la codifférentielle d'une telle forme est nulle, donc on peut écrire

$$(5.15) \quad R(\varepsilon^{-1}\omega_1) = \frac{\|d(\varepsilon^{-1}\omega_1)\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\varepsilon^{-1}\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2}.$$

La forme $\varepsilon^{-1}\omega_1$ est indépendante de ε , donc $d(\varepsilon^{-1}\omega_1)$ aussi, et comme de plus elle est horizontale donc sa norme ponctuelle ne dépend pas de ε ; on a donc $\|d(\varepsilon^{-1}\omega_1)\|^2 = c \text{Vol}(M, g_\varepsilon)$. Par ailleurs, $\|\varepsilon^{-1}\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1}\|\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2$, donc

$\|\varepsilon^{-1}\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2$ est de la forme $c'\varepsilon^{-2}\text{Vol}(M, g_\varepsilon)$. Comme $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leq R(\varepsilon^{-1}\omega_1)$, on en déduit que $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leq C' \cdot \varepsilon^2$, où C' est une constante dépendant des choix de N , k et e .

Le cas $p = 2$ se déduit du premier par la théorie de Hodge, en remarquant que dans le cas $p = 1$ on a trouvé une petite valeur propre du laplacien retreint aux formes cofermées. $\square$

fait 5.6. — Si $b_1(N) > b_2(M)$, alors il existe une constante $C''(N, k, e) > 0$ telle que pour tout ε , on a $\lambda_{p, b_1(N) - b_2(M)}(M, g_\varepsilon) \leq C'' \cdot \varepsilon^2$ pour $p = 2$ et 3 .

Démonstration. — On va se restreindre une nouvelle fois aux formes cofermées pour montrer le résultat pour $p = 2$ et ensuite en déduire le cas $p = 3$.

Contrairement au cas des 1-formes, on a pas en général de moyen simple de déterminer quelles sont les 2-formes harmoniques (on rencontre la même difficulté dans l'étude du spectre des fibrés en cercles, voir [CC00]). On va majorer le quotient de Rayleigh sur un espace test de dimension $b_1(N)$, et la condition $b_1(N) > b_2(M)$ assurera qu'on a bien majoré une ou plusieurs valeur propres non nulles.

En notant toujours (ω_i) les 1-formes verticales induites par la base duale de $\mathcal{B}_\varepsilon$ on considère une forme différentielle $\varphi = \omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)$, où α est une 1-forme harmonique de N . Son quotient de Rayleigh est

$$(5.16) \quad R(\varphi) = \frac{\|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2 + \|\delta(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2}$$

La forme φ est cofermée. En effet, si on calcule la différentielle de sa forme duale, on obtient :

$$(5.17) \quad \begin{aligned} d * (\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)) &= d((\bigwedge_{i \neq 1} \omega_i) \wedge \pi^*(\alpha)) \\ &= \sum_{i \neq 1} (-1)^i \bigwedge_{j \neq 1, i} \omega_j \wedge \pi^*(e(\omega_i)) \wedge \pi^*(\alpha) \end{aligned}$$

Comme $\pi^*(e(\omega_i)) \wedge \pi^*(\alpha) = \pi^*(e(\omega_i) \wedge \alpha)$ et que $e(\omega_i) \wedge \alpha$ est de degré supérieur à la dimension de N , on en déduit que tous les termes de la somme sont nuls. On est ramené à :

$$(5.18) \quad R(\varphi) = \frac{\|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2}.$$

On a d'une part $|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)|_{g_\varepsilon}^2 = |\omega_1|_{g_\varepsilon}^2 |\pi^*(\alpha)|_{g_\varepsilon}^2 = |\alpha|^2$ et donc

$$(5.19) \quad \|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2 = \|\alpha\|^2,$$

et d'autre part

$$(5.20) \quad \|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2 = \|d\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2 \leq \|d\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2 \|\alpha\|^2.$$

On voit finalement que $R(\varphi) \leq R(\omega_1)$ quel que soit α . La majoration de $R(\omega_1)$ obtenue précédemment permet de conclure. $\square$

On va maintenant donner des exemples de fibrés pour lesquels la condition $b_1(N) > b_2(M)$ est bien vérifiée.

Exemple 5.7. — On considère pour tout entier k la variété $M = (S^3)^k \times S^1$. La fibration de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ induit une action libre de $T^k = (S^1)^k$ sur $(S^3)^k$, et permet donc de définir une fibration principale $T^k \hookrightarrow M \rightarrow N$, où $N = (S^2)^k \times S^1$. La classe d'Euler e de ce fibré est bien injective : l'image de e est engendrée par les relevés à M de chacune des classes d'Euler correspondant aux fibrations de Hopf qui sont bien linéairement indépendants. Enfin, la formule de Künneth permet de calculer aisément les nombres de Betti des produits M et N , on obtient en particulier $b_1(N) = 1$ et $b_2(M) = 0$.

Remarque 5.8. — Dans l'exemple précédent, les métriques sur M et N ne sont *a priori* pas des métriques produits. On ne peut donc pas déduire directement les propriétés du spectre de la formule de Künneth.

Pour justifier la remarque 1.5 faite dans l'introduction, on va construire des contre-exemples aux théorèmes 1.1 et 1.2 de [CT97]. Ceux-ci permettent de montrer (cf. [Jam05]) que si, pour un réel r tel que $0 < r < \text{inj}(M)$, on note q le nombre de boules géodésiques de rayon $4^{-n}r$ nécessaire pour recouvrir M , alors il existe une constante C ne dépendant que de la dimension et de la borne sur la courbure telle que

$$(5.21) \quad \lambda_{p,1}(M, g) \geq Cr^{-2}q^{-7(p+1)}.$$

C'est cette inégalité qu'on va contredire.

Exemple 5.9. — À courbure bornée et dimension n fixée, le nombre q de boules géodésiques de rayon $4^{-n}r$ nécessaire pour recouvrir M est de l'ordre de $\text{Vol}(M) \cdot r^{-n}$ quand r est petit. Pour $p = 1$, la minoration de l'inégalité (5.21) est donc de l'ordre de $\text{Vol}(M)^{-14}r^{14n-2}$.

On se donne un fibré $T^k \hookrightarrow M \rightarrow N$ et un effondrement g_ε fournis par le théorème 1.3. On a alors $\text{Vol}(M) = \varepsilon$ et on peut choisir $r \sim \varepsilon^{\frac{1}{k}}$, ce qui donne $q \sim \varepsilon^{1-n/k}$ et une minoration de l'ordre de $\varepsilon^{(14n-14k-2)/k} = \varepsilon^{(14d-2)/k}$ en notant $d = n - k$ la dimension de la base N .

Or, si on fixe la dimension $d \geq 3$ de N et qu'on choisit k suffisamment grand (c'est possible puisque $b_2(N)$ peut être arbitrairement grand à dimension fixée), l'estimation $\varepsilon^{(14d-2)/k}$ ne peut pas minorer $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon)$ qui est de l'ordre de ε^2 quand ε tend vers 0.

Il reste enfin à démontrer le corollaire 1.7.

Démonstration. — Cas $n = 5$: On considère une variété compacte N de dimension 3 telle que $b_2(N) \geq 2$ et on choisit pour M un fibré principal en tore T^2 sur N dont la classe d'Euler est injective. Les résultats précédents assure l'existence d'un effondrement tel que $\lambda_{p,1}(M) \leq C \cdot \text{inj}(M)^4$ pour p égal à 1 et 2. Par dualité de Hodge, on a la même inégalité pour $n - 1$ et $n - 2$, donc pour tout p entre 1 et $n - 1$.

Cas $n = 7$: On peut vérifier que le fibré construit dans l'exemple 5.7 pour $k = 2$ convient. On sait déjà que $\lambda_{p,1}(M) \leq C \cdot \text{inj}(M)^4$ pour $p = 1, 2$ et 3, et la dualité de Hodge donne l'inégalité pour $p = 4, 5$ et 6. $\square$

6. Minoration du spectre des fibrés principaux en tores

6.1. Minoration de la première valeur propre des 1-formes. — Les résultats des sections 2 à 4 nous permettent de démontrer le théorème 1.8. On a vu qu'on pouvait se ramener au cas d'un fibré muni d'une métrique adaptée. On va donc montrer le résultat du théorème 1.8 pour un fibré vérifiant les conclusions du théorème 3.1 :

Théorème 6.1. — *Soit $a > 0$, $d > 0$ deux réels, n , k et m trois entiers tels que $n = k + m$, et (N^m, h) une variété riemannienne. Il existe des constantes $c(n, a, d, (N, h))$ et $\varepsilon(n, a, d, (N, h))$ strictement positives telles que si $\bar{g}$ est une métrique sur le tore T^k telle que $\text{diam}(T^k) < \varepsilon$ et si $T^k \hookrightarrow M^n \rightarrow N$ est un fibré principal muni d'un couple de métriques (g, h) adapté au fibré et tel que $g = \bar{g}$ en restriction à la fibre, $\text{diam}(M, g) < d$ et $|K_M(X, Y)| \leq a$ pour toute paire (X, Y) de vecteurs horizontaux orthonormés, alors on a*

$$\lambda_{1,1}(M, g) \geq c \cdot \text{Vol}^2(T^k).$$

On s'est ici donné comme hypothèse que la métrique sur N est fixée. En effet, une hypothèse sur la courbure ne nous sera pas suffisante. Par ailleurs la minoration du spectre en fonction du rayon d'injectivité découle du fait que le rayon d'injectivité de M est égal à celui de la fibre si ε est suffisamment petit (la fibre étant totalement géodésique) et que, la restriction de la métrique à la fibre étant plate, on a $\text{Vol}(T^k) \geq C \text{inj}(T^k)^k$ où C ne dépend que de k .

Dans un premier temps, nous allons démontrer le théorème dans le cas où le fibré M ne contient pas de sous-fibré trivial, c'est-à-dire quand l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N, h)$ est injective. Nous généraliserons ensuite le résultat à un fibré principal quelconque. D'autre part, on se restreindra aux formes T^k -invariantes, en vertu des résultats de la section 4 (corollaire 4.1). En effet, le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes sera minoré en fonction de la constante ε du théorème, et on pourra toujours choisir cette constante suffisamment petite de sorte que le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes soit plus grand que le terme $c \cdot \text{Vol}^2(T^k)$.

Supposons donc e injective. La démonstration se déroule en deux étapes. D'abord, on se ramène à l'étude des valeurs propres de l'opérateur e^*e , l'adjoint étant défini en munissant $\mathcal{H}^2(N)$ de sa norme L^2 :

fait 6.2. — *Il existe $\varepsilon(n, a, \lambda_{0,1}(N, h), \lambda_{1,1}(N, h)) > 0$ et $c(n, a, \lambda_{0,1}(N, h)) > 0$ tels que pour toute 1-forme φ sur M T^k -invariante et orthogonale à $\text{Ker } \Delta^1(M, g)$, si le quotient de Rayleigh de φ vérifie $R(\varphi) < \varepsilon$, alors il existe une forme ω induite par un élément de $\mathcal{G}^*$ telle que $\|e(\omega)\|^2 \leq c \cdot \varepsilon \|\omega\|^2$.*

Démonstration. — Soit φ une 1-forme différentielle T^k -invariante de M . On peut comme dans la section précédente écrire φ sous la forme

$$(6.1) \quad \varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i,$$

où α est une 1-forme de N , a_i des fonctions de N et ω_i les 1-formes verticales induites par une base orthonormée de $\mathcal{G}^*$. On a alors :

$$(6.2) \quad d\varphi = \pi^*(d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^k d\pi^*(a_i) \wedge \omega_i,$$

où e_i désigne l'image de ω_i par l'application $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$. On a vu de plus dans la démonstration du fait 5.5 que φ vérifie

$$(6.3) \quad \delta\varphi = \pi^*(\delta\alpha),$$

et que le fait que e soit injectif implique que les 1-formes harmoniques de M sont exactement les relevés des 1-formes harmoniques de N .

Supposons que φ est de norme 1, c'est-à-dire que $\|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2 = 1$, et qu'elle est orthogonale aux formes harmoniques de M . Le quotient de Rayleigh de φ s'écrit alors

$$(6.4) \quad R(\varphi) = \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i\|^2 + \sum_{i=1}^k \|d\pi^*(a_i)\|^2.$$

Supposons que $R(\varphi) < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ donné. On a en particulier $\|d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i\|^2 < \varepsilon$. Pour tout i , notons $\bar{a}_i$ la valeur moyenne de la fonction a_i . On peut alors écrire

$$(6.5) \quad \|d\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i\|^2 < \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$(6.6) \quad \|d\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\| < \left\| \sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i \right\| + \sqrt{\varepsilon}.$$

Comme les fonctions $(a_i - \bar{a}_i)$ sont de moyennes nulles, leur quotient de Rayleigh est supérieur à $\lambda_{0,1}(N, h)$, et donc $\|a_i - \bar{a}_i\|^2 \leq \frac{\|da_i\|^2}{\lambda_{0,1}(N, h)} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N, h)}$. Par ailleurs, la forme exacte $d\alpha$ est orthogonale à la forme harmonique $\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i \right\|^2 &\leq \left\| d\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i \right\|^2 \\
 &\leq \left(\left\| \sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i \right\| + \sqrt{\varepsilon} \right)^2 \\
 &\leq \left(\sum_{i=1}^k (\|a_i - \bar{a}_i\| \cdot \|e_i\|_\infty) + \sqrt{\varepsilon} \right)^2 \\
 (6.7) \quad &\leq \varepsilon \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^k \|e_i\|_\infty}{\sqrt{\lambda_{0,1}(N, h)}} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Le lemme 3.2 permet d'obtenir une majoration de $\left\| \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i \right\|^2$ en fonction de n , $\lambda_{0,1}(N, h)$ et d'une borne sur la courbure de (M, g) .

Pour tout i , la fonction $a_i - \bar{a}_i$ est orthogonale à $\bar{a}_i$, donc

$$(6.8) \quad \|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k (\|\bar{a}_i\|^2 + \|a_i - \bar{a}_i\|^2) = 1.$$

D'une part, on a déjà vu que chaque terme $\|a_i - \bar{a}_i\|^2$ est majoré par $\frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N, h)}$. D'autre part, comme φ est orthogonale aux relevés des formes harmoniques de (N, h) , α est elle-même orthogonale aux formes harmoniques de N . On peut donc écrire

$$(6.9) \quad \|\alpha\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{1,1}(N, h)} (\|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2).$$

Le terme $\|\delta\alpha\|^2$ est majoré par $R(\varphi)$, donc par ε , et $\|d\alpha\|^2$ est majoré en fonction de a , n et $\lambda_{0,1}(N, h)$ comme dans l'inégalité 6.7. Il découle donc de l'équation (6.8) :

$$(6.10) \quad \sum_{i=1}^k \|\bar{a}_i\|^2 \geq 1 - \tau(n, a, \lambda_{0,1}(N, h), \lambda_{1,1}(N, h))\varepsilon.$$

Si on prend pour ω la 1-forme $\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \omega_i$, on a

$$(6.11) \quad \frac{\|e(\omega)\|^2}{\|\omega\|^2} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i \right\|^2}{\sum_{i=1}^k \|\bar{a}_i\|^2}$$

Selon (6.10), le dénominateur est supérieur à $\frac{1}{2}$ si ε est suffisamment petit. La majoration du numérateur fournie par (6.7) donne alors le résultat souhaité. $\square$

On va maintenant minorer le spectre de e^*e en fonction du volume de la fibre T^k .

fait 6.3. — *Il existe une constante $c(n, a, (N, h)) > 0$ telle que la première valeur propre de e^*e soit minorée par $c \cdot \text{Vol}(T^k)^2$.*

Démonstration. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de e^*e classées dans l'ordre croissant. Comme e est injective, ces valeurs propres sont non nulles et la première vérifie

$$(6.12) \quad \lambda_1 = \frac{\prod_i \lambda_i}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i} = \frac{\text{Det}(e^*e)}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i}.$$

Par ailleurs, les valeurs propres de e^*e vérifient $\lambda_i \leq \|e^*e\|$, donc

$$(6.13) \quad \lambda_1 \geq \frac{\text{Det}(e^*e)}{\|e^*e\|^{k-1}} \geq \frac{\text{Det}(e^*e)}{\|e\|^{2k-2}}.$$

L'image de e est un sous-espace de $\text{Ker } \Delta^2(N)$ de dimension k , engendré par un sous-réseau du réseau des formes harmoniques entières de N . Si on restreint e et e^* à ce sous-espace, on peut écrire $\text{Det}(e^*e) = (\text{Det } e)^2$, où $\text{Det } e$ est le déterminant d'une matrice de e écrite dans des bases orthonormées de $\mathcal{G}^*$ et $\text{Im } e$, ce qui donne

$$(6.14) \quad \lambda_1 \geq \frac{(\text{Det } e)^2}{\|e\|^{2k-2}}.$$

Le lemme 3.2 donne une majoration de $\|e\|$ en fonction de n et de la borne a sur la courbure de M , il ne reste donc qu'à minorer $\text{Det } e$. Notons $\text{Det}' e$ le déterminant de la matrice de e dans la base canonique de $\mathcal{G}^* = \mathbb{R}^{k^*}$ et une base orthonormée de $\text{Im } e$. On a alors $\text{Det } e = (\text{Det}' e)(\text{Vol } T^k)$. Comme les images dans $\text{Ker } \Delta^2(N)$ des éléments de la base canonique de $\mathcal{G}^*$ sont des formes entières, le déterminant $\text{Det}' e$, qui est aussi le volume de $e([0, 1]^k)$, est un multiple du volume d'un domaine fondamental du réseau des formes entières dans $\text{Im } e$. Comme par ailleurs $\text{Det}' e$ est non nul, il sera donc minoré par le volume de ce domaine fondamental. Si on note ρ le minimum des normes des 2-formes harmoniques entières non nulles, ce volume est minoré par le volume d'une boule de rayon $\frac{\rho}{2}$ dans $\text{Im } e$, et donc minoré par une constante ne dépendant que de n et de la métrique h de N . On peut donc bien écrire

$$\lambda_1 \geq c(n, a, (N, h)) \cdot \text{Vol}(T^k)^2.$$

$\square$

Nous allons maintenant supposer que e n'est pas injective. Notons l la dimension de son noyau. Le premier nombre de Betti de M est alors $b_1(N) + l$. En effet, on a vu que si une 1-forme $\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i$ est harmonique, cela signifie, d'après (6.2) et (6.3) :

$$(6.15) \quad \Delta\alpha = 0, da_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0.$$

Comme les fonctions a_i sont constantes, l'ensemble des a_i tels que $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0$ est exactement le noyau de e . L'espace des formes harmoniques de M est donc l'espace engendré par les relevés des formes harmoniques de N et les formes verticales induites par les éléments de noyau de e .

On peut reprendre la démonstration précédente en prenant pour $(\omega_i)_i$ une base de $\mathcal{G}^*$ telle que $\omega_{k-l+1}, \dots, \omega_k$ soit une base de $\text{Ker } e$ (le fait que la forme φ est orthogonale aux formes harmoniques se traduit par le fait que $a_{k-l+1}, \dots, a_k = 0$) et en étudiant e^*e restreint à l'orthogonal de $\text{Ker } e$. On obtient de la même façon le résultat du fait 6.2, à savoir que la première valeur propre du laplacien sur M est minorée à une constante multiplicative près par la première valeur propre de $(e^*e)_{|(\text{Ker } e)^\perp}$.

Pour minorer le spectre de $(e^*e)_{|(\text{Ker } e)^\perp}$, on doit être un peu plus attentif dans la manipulation des bases de $\mathcal{G}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (\omega_1, \dots, \omega_k)$ une base orthonormée de $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{B}' = (\omega'_1, \dots, \omega'_k)$ une base du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*$, telles que $(\omega_1, \dots, \omega_l)$ et $(\omega'_1, \dots, \omega'_l)$ soient des bases de $\text{Ker } e$ (comme l'image du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*$ est contenue dans un réseau, le noyau de e est effectivement engendré par des éléments entiers). La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

où P_1 est un bloc carré de taille l . Si se donne une base orthonormée de $\text{Im } e$, la matrice de e s'écrit sous la forme $(0, A)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(0, A')$ dans la base $\mathcal{B}'$, où A et A' sont des blocs carrés de taille $k-l$ et vérifient $A' = AP_3$.

Le spectre de $(e^*e)_{|(\text{Ker } e)^\perp}$ est celui de A^*A . On peut écrire, comme dans la démonstration du fait 6.3 :

$$(6.16) \quad \lambda_1 \geq \frac{\text{Det } A^*A}{\|A^*A\|^{k-l-1}} \geq \frac{(\text{Det } A)^2}{\|A\|^{2(k-l-1)}},$$

où λ_1 est la première valeur propre non nulle de e^*e . De plus, on a $\text{Det } A' = \text{Det } A \cdot \text{Det } P_3$ et donc

$$(6.17) \quad \text{Det } A = \frac{\text{Det } A'}{\text{Det } P_3} = \text{Det } A' \frac{\text{Det } P_1}{\text{Det } P}.$$

Le déterminant de A' est, comme précédemment, minoré par le covolume du réseau des formes entières dans $\text{Im } e$, et $\text{Det } P$ s'interprète géométriquement comme l'inverse du volume de T^k .

Il reste à minorer $\text{Det } P_1$. Comme $\text{Ker } e$ est engendré par des éléments entiers de $\mathcal{G}^*$, l'orthogonal de $\text{Ker } e$ pour la dualité définit un sous-tore T^{k-l} de T^k . De plus, le dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}(T^k/T^{k-l})$ du quotient T^k/T^{k-l} est isomorphe à $\text{Ker } e$. La matrice P_1 est donc la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$ dans une base du réseau des entiers de $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$, et par conséquent $\text{Det } P_1$ est l'inverse du volume de T^k/T^{k-l} pour la métrique quotient. Le diamètre de T^k/T^{k-l} est majoré par ε , comme celui de T^k , et par conséquent son volume aussi.

Références

- [ALK00] J. A. ÁLVAREZ LÓPEZ & Y. A. KORDYUKOV – « Adiabatic limits and spectral sequences for riemannian foliations », *Geom. funct. anal.* **10** (2000), no. 5, p. 977–1027.
- [Bes08] A. L. BESSE – *Einstein Manifolds*, Classics in Mathematics, Springer Verlag, 2008.
- [BT82] R. BOTT & L. W. TU – *Differential form in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.
- [Car84] Y. CARRIÈRE – « Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates », *Math. Z.* **186** (1984), p. 393–400.
- [CC90] B. COLBOIS & G. COURTOIS – « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p -forms », *Manuscripta Math.* **68** (1990), no. 2, p. 143–160.
- [CC00] ———, « Petites valeurs propres des p -formes différentielles et classe d'Euler des S^1 -fibrés », *Ann. scient. Éc. norm. sup. (4)* **33** (2000), no. 5, p. 611–645.
- [CFG92] J. CHEEGER, K. FUKAYA & M. GROMOV – « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 2, p. 327–372.
- [CG86] J. CHEEGER & M. GROMOV – « Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I », *J. Differential Geom.* **23** (1986), no. 3, p. 309–346.
- [CT97] S. CHANILLO & F. TRÈVES – « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *J. Differ. Geom.* **45** (1997), no. 2, p. 273–287.
- [Dod82] J. DODZIUK – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.* **85** (1982), no. 3, p. 438–443.
- [For95] R. FORMAN – « Spectral Sequences and Adiabatic Limits », *Comm. Math. Phys.* **168** (1995), no. 1, p. 57–116.

- [GHL87] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, 1987.
- [Gro80] M. GROMOV – « Paul Levy’s isoperimetric inequality », *Prépublication IHÉS* (1980), paru dans [Gro99].
- [Gro99] ———, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, 1999.
- [Her60] R. HERMANN – « A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifold be a fibre bundle », *Proc. of Am. Math. Soc.* **11** (1960), p. 236–242.
- [Jam03] P. JAMMES – « Sur le spectre des fibrés en tore qui s’effondrent », *Manuscripta Math.* **110** (2003), no. 1, p. 13–31.
- [Jam05] ———, « Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles », *Sémin. théor. spectr. géom.* **23** (2005), p. 115–124.
- [Jam10] ———, « Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens », *Ann. inst. Fourier* **60** (2010), no. 1, p. 257–290.
- [Jam11] ———, « Autour de la géométrie du laplacien de Hodge-de Rham », Habilitation à diriger des recherches, université Nice Sophia Antipolis, déc. 2011.
- [Li80] P. LI – « On the Sobolev constant and the p -spectrum of a compact riemannian manifold », *Ann. scient. Éc. norm. sup. (4)* **13** (1980), p. 451–469.
- [Lot02] J. LOTT – « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. Journal* **114** (2002), no. 2, p. 267–306.
- [LY80] P. LI & S. YAU – « Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold », in *Proceedings Symposium on Pure Math.*, vol. 36, 1980, p. 205–239.
- [Man08] T. MANTUANO – « Discretization of Riemannian manifolds applied to the Hodge Laplacian », *Amer. J. Math.* **130** (2008), no. 6, p. 1477–1508.
- [Ram05] S. RAMANAN – *Global calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 65, Amer. Math. Soc., 2005.
- [Sch80] W. SCHMIDT – *Diophantine approximations*, Lecture notes in mathematics, vol. 785, Springer Verlag, 1980.