Prescription du spectre de Steklov dans une classe conforme

Pierre Jammes

Résumé.— Sur toute variété compacte de dimension $n \geq 3$ à bord, on prescrit toute partie finie du spectre de Steklov dans une classe conforme donnée. En particulier, on prescrit la multiplicité des valeurs propres. Sur une surface compacte à bord donnée, on montre que la multiplicité de la k-ième valeur propre est bornée indépendamment de la métrique. Sur le disque, on donne des résultats plus précis : la multiplicité de la 1[re] et la 2[e] valeurs propres non nulles sont au plus 2 et 3 respectivement. Pour le problème de Steklov-Neumann sur le disque, on montre que la multiplicité de la k-ième valeur propre non nulle est au plus $k+1$.

Mots-clefs : spectre de Steklov, prescription de spectre, géométrie conforme.

Abstract.— On any compact manifold of dimension $n \geq 3$ with boundary, we prescribe any finite part of the Steklov spectrum whithin a given conformal class. In particular, we prescribe the multiplicity of the first eigenvalues. On a compact surface with boundary, we show that the multiplicity of the k-th eigenvalue is bounded independently of the metric. On the disk, we give more precise results : the multiplicity of the first and second positive eigenvalues are at most 2 and 3 respectively. For the Steklov-Neumann problem on the disk, we prove that the multiplicity of the k-th positive eigenvalue is at most $k+1$.

Keywords : Steklov eigenvalues, prescription of eigenvalues, conformal geometry.

MSC2010 : 35P15, 58J50

1. Introduction

Étant donnée une variété riemannienne (M, g) compacte à bord et une fonction strictement positive $\rho \in C^0(\partial M)$, le spectre de Steklov de M est l'ensemble des réels σ tels que le système

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{1.1}$$

où ν est un vecteur normal unitaire sortant le long de ∂M, admette des solutions non triviales. Ce spectre est formé de valeurs propres positives notées $0 = \sigma_0(M, g, \rho) < \sigma_1(M, g, \rho) \leq \sigma_2(M, g, \rho) \ldots \to +\infty$. Si $\rho \equiv 1$, alors c'est aussi le spectre de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur M.

Un grand nombre de travaux récents visent à borner ces valeurs propres sous des contraintes géométriques, par exemple avec des hypothèses conformes ([FS11], [Ha11]), ou en fonction d'une constante isopérimétrique ([CESG11]). Le but de cet article vise au contraire à mettre en évidence le fait que ce spectre possède une certaine souplesse et que si la dimension de M est au moins 3, on peut en prescrire toute partie finie, c'est-à-dire que si on se donne une suite finie de réels strictement positifs, il existe une métrique sur M telle que cette suite soit le début du spectre. On va en fait montrer un résultat plus fort, à savoir qu'on peut prescrire simultanément le début du spectre, la multiplicité des valeurs propres, la classe conforme de la variété et la fonction densité ρ sur le bord. On étend ainsi au spectre de Steklov un résultat obtenu par Y. Colin de Verdière pour le laplacien dans [CdV87] et généralisé aux formes différentielles dans [Ja11].

Théorème 1.2. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$. Étant donnée une fonction strictement positive $\rho \in C^0(\partial M)$, un entier $N \geq 1$ et une suite finie de réels strictement positifs $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$, il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g telle que*

$$\sigma_k(M, \rho, \tilde{g}) = a_k$$

pour tout $k \in [1, N]$.

Remarque 1.3. On ne peut pas prescrire simultanément le spectre, le volume et la classe conforme. En effet, si on fixe le volume et la classe conforme, les valeurs propres ne peuvent pas être arbitrairement grandes (cf. [FS11] et [Ha11]). Des obstructions semblables existent pour le laplacien usuel ([ESI86]), le laplacien de Hodge en restriction aux formes différentielles de certains degrés ([Ja07], [Ja08]) et l'opérateur de Dirac ([Am03]). Le théorème 1.2 montre en revanche que même en fixant la classe conforme, on ne peut pas majorer le rapport σ_k/σ_l pour $k > l$.

Remarque 1.4. On sait que la prescription de multiplicité est possible pour les opérateurs de Schrödinger en dimension $n \geq 3$ ([CdV86], [CdV87]) et les opérateurs agissant sur les formes différentielles en dimension $n \geq 4$ ([Ja11], [Ja12]). Mais ce problème n'est toujours pas résolu pour les formes différentielles en dimension 3, ni pour l'opérateur de Dirac, dont on ne sait actuellement prescrire le spectre que si les valeurs propres sont simples ([Da05]).

La principale difficulté consiste à prescrire la multiplicité des valeurs propres. On utilisera pour cela les techniques introduites par Y. Colin de Verdière dans [CdV86] (voir [Ja09] pour une présentation plus détaillée de ce sujet). Les principaux ingrédients sont des théorèmes de convergence spectrale (en particulier de convergence du spectre vers celui d'un domaine de la variété, théorème 3.8 de la section 3), un modèle de valeur propre multiple fourni par un laplacien combinatoire sur des graphes (paragraphe 4.2).

La démonstration du théorème 1.2 échoue en dimension 2, entre autres à cause de l'invariance conforme de la norme L^2 du gradient d'une fonction. On va montrer que cette difficulté ne peut pas être contournée et qu'il existe en fait une obstruction à la prescription de multiplicité en dimension 2. La démonstration suit celles de S. Y. Cheng [Ch76] et G. Besson [Be80] pour majorer la multiplicité des valeurs propres du laplacien.

Théorème 1.5. *Sur toute surface riemannienne compacte orientable à bord (M, g) de genre γ et toute fonction strictement positive $\rho \in C^0(\partial M)$, la multiplicité de $\sigma_k(M, \rho, g)$ est majorée par $4\gamma + 2k + 1$. Si M est non orientable et qu'on note l le nombre de composantes connexes de ∂M, alors la multiplicité de $\sigma_k(M, \rho, g)$ est majorée par $4p + 4k + 1$, où p est l'invariant topologique $1 - \chi(M) - l$.*

Remarque 1.6. Lors de la finalisation de cet article, la démonstration de bornes sur la multiplicité est apparu simultanément dans deux prépublications. Dans [FS12], A. Fraser et R. Schoen ont montré indépendamment le même théorème, avec une démonstration presque identique. Ils montrent aussi que la borne obtenue pour $\sigma_1(S^1 \times [0, 1])$, à savoir 3, est optimale. Simultanément, M. Karpukhin, G. Kokarev, I. Polterovich ont démontré dans [KKP12] une amémioration de ces bornes avec des techniques différentes : ils montrent que la multiplicité de σ_k est majorée par $2p + 2k + 1$ et $2p + 2l + k$, que la surface soit orientable ou non.

Les bornes données par le théorème 1.5 sont les mêmes que celles obtenues par G. Besson pour les valeurs propres de laplacien. Il s'avère que le spectre de Steklov possède des rigidités supplémentaires qu'on va illustrer dans le cas du disque :

Théorème 1.7. *Sur le disque $\mathbb{D}$, la multiplicité de $\sigma_1(\mathbb{D}, \rho, g)$ est au plus 2 et celle de $\sigma_2(\mathbb{D}, \rho, g)$ est au plus 3.*

Remarque 1.8. En utilisant les résultats de [CdV88], on peut facilement construire (par excision d'un petit disque sur la sphère) une métrique sur $\mathbb{D}$ telle que la première valeur propre non nulle du laplacien avec condition de Neumann (ou la seconde pour la condition de Dirichlet) soit de multiplicité 3. En outre, la borne sur la multiplicité de σ_1 est optimale puisque pour la métrique canonique, toutes les valeurs propres non nulles sont doubles.

Remarque 1.9. L'article [AM94], qui traite de la multiplicité des σ_k sur le disque, contient comme cas particulier le fait que la multiplicité de σ_1 est au plus 2 ; on en donnera une démonstration un peu plus directe. En revanche, la borne sur la multiplicité de σ_2 ne semble pas être apparue auparavant dans la littérature.

On va aussi montrer une autre borne sur la multiplicité dans le cas du disque, mais pour une variante du problème de Steklov, à savoir le problème de Steklov-Neumann. Ce problème est défini de la manière suivante : on partitionne le bord ∂M en deux sous-variétés (pas nécessairement connexes) $\partial M = \partial M_S \cup \partial M_N$ et pour une fonction $\rho \in C^0(\partial M_S)$, on pose la condition $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f$ sur ∂M_S et on demande à f de vérifier la condition de Neumann sur ∂M_N (voir paragraphe 2.2 pour plus de détails).

Théorème 1.10. *Étant donnée une partition (non triviale) $\partial\mathbb{D}_S \cup \partial\mathbb{D}_N$ du bord du disque $\mathbb{D}$, la multiplicité de $\sigma_k(\mathbb{D}, \rho, g)$ pour le problème de Steklov-Neumann relativement à cette partition est au plus $k+1$.*

Remarque 1.11. Pour le laplacien, les meilleures bornes connues sont asymptotiquement de l'ordre de $2k$ quand $k \to +\infty$. Par exemple, pour le laplacien de Dirichlet sur le disque, il et montré dans [HOMN99] que la multiplicité de la k-ième valeur propre est au plus $2k-3$. Dans [KKP12], la meilleure borne donnée pour le problème de Steklov sur le disque est $k+2$.

Remarque 1.12. Dans le cas particulier du problème hydrodynamique de ballottement (voir [KK01] ou les rappels du paragraphe 2.2), on sait que la première valeur propre non nulle est simple (cf. [KKM04]). Il est conjecturé que les autres sont simples aussi, mais cette question reste ouverte.

Y. Colin de Verdière a conjecturé que la multiplicité maximale de la 2ᵉ valeur propre d'un opérateur de Shrödinger sur une surface M est $\mathrm{Chr}(M)-1$ où $\mathrm{Chr}(M)$ est le nombre chromatique de M, c'est-à-dire le nombre de sommets du plus grand graphe complet plongeable dans M. Comme la démonstration du théorème 1.2 repose sur des graphes plongées dans M dont les sommets sont sur le bord de la variété, on peut envisager de transposer cette conjecture au problème de Steklov sous la forme suivante :

Conjecture 1.13. *Sur une surface compacte à bord M, la multiplicité maximale de $\sigma_1(M)$ est $\mathrm{Chr}(M, \partial M) - 1$, où $\mathrm{Chr}(M, \partial M)$ désigne le nombre de sommets du plus grand graphe complet qu'on peut plonger dans M en plaçant les sommets sur ∂M.*

D'après ce qui précède, cette conjecture est vérifiée sur le disque $\mathbb{D}$ et le cylindre $S^1 \times [0,1]$.

La section 2 rappellera quelques propriétés du spectre de Steklov et de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann dont nous auront besoin. Nous montrerons dans la section 3 les théorèmes de convergence spectrale que nous utiliserons, et nous les appliquerons dans la section 4 pour démontrer le théorème 1.2. Enfin, la section 5 sera consacrée au cas de la dimension 2 et à la démonstration des théorèmes 1.5, 1.7 et 1.10.

2. Le problème de Steklov

2.1. Définition du spectre de Steklov

On se donne une variété riemannienne (M, g) compacte à bord telle que ∂M soit C^1 par morceau (dans la suite, g désignera indifféremment la métrique sur M ou la métrique induite sur ∂M). Le problème des valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.1}$$

où ν est un vecteur unitaire sortant normal au bord et $\rho \in C^0(\partial M)$ un fonction densité fixée. L'ensemble des réels σ solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$0 = \sigma_0(M, g, \rho) < \sigma_1(M, g, \rho) \leq \sigma_2(M, g, \rho) \dots . \tag{2.2}$$

Le problème de Steklov, déjà étudié à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et au début du XX$^{\text{e}}$ (voir [St99], [St02] et les références qui y sont données), apparaît dans divers problèmes physiques. Par exemple il permet de modéliser l'évolution d'une membrane libre dont la masse se concentre sur son bord, et il intervient dans certains problèmes de tomographie. On verra au paragraphe qui suit qu'il apparaît aussi en hydrodynamique.

Notre principal outil sera la caractérisation variationnelle suivante du spectre de Steklov (cf. [Ba80]) :

$$\sigma_k(M, g, \rho) = \inf_{V_{k+1} \in H^1(M)} \sup_{f \in V_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\mathrm{d}f|^2 \mathrm{d}v_g}{\int_{\partial M} f^2 \rho \, \mathrm{d}v_g}, \tag{2.3}$$

où V_k parcours les sous-espaces de dimension k de l'espace de Sobolev $H^1(M)$.

Il faut prendre garde au fait que $|f|^2 = \int_{\partial M} f^2 \rho \, \mathrm{d}v_g$ ne définit pas une norme de Hilbert sur $L^2(M)$ (elle est nulle sur les fonctions vérifiant la condition de Dirichlet). En revanche, on peut utiliser les techniques usuelles de min-max en considérant l'espace de Hilbert $L^2(\partial M)$ muni de la métrique $|\cdot|$ qu'on vient de définir, et la forme quadratique $Q(f) = \int_M |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}v_g$ où $\tilde{f}$ est le prolongement harmonique de f. Il sera parfois commode de redéfinir la forme quadratique Q par

$$Q(f) = \inf_{\substack{\tilde{f} \in H^1(M) \\ \tilde{f}_{|\partial M} = f}} \int_M |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}v_g. \tag{2.4}$$

Cette définition sera en particulier applicable dans les situations où on considère une métrique singulière sur M (voir paragraphe 2.3).

Dans le cas homogène, c'est-à-dire quand $\rho \equiv 1$, le spectre de Steklov est aussi connu comme étant le spectre de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, qu'on notera $\Lambda : C^\infty(\partial M) \to C^\infty(\partial M)$, défini comme suit : étant donné une fonction $f \in C^\infty(\partial M)$, on prolonge harmoniquement f dans M et on pose

$$\Lambda f(x) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(x). \tag{2.5}$$

Le spectre de Λ est bien celui de Q car pour une fonction harmonique, on a $\int_M |\mathrm{d}f|^2 \mathrm{d}v_g = \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} \mathrm{d}v_g$.

L'opérateur Λ n'est pas un opérateur différentiel sur ∂M (ce n'est même pas un opérateur local), mais c'est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1 (cf. [Ta96b], ch. 7). En particulier, nous utiliserons le fait qu'il vérifie une inégalité elliptique :

$$\|f\|^2_{H^1(\partial M)} \leq c \int_{\partial M} f \Lambda f \mathrm{d}v_g + c' \|f\|^2_{L^p(\partial M)}, \tag{2.6}$$

où $p \in [1, +\infty]$, les constante c, c' dépendant de p et de la métrique g sur M mais pas de f.

Pour finir, nous auront besoin d'une propriété d'unique prolongement des fonctions propres en dimension 2 :

Théorème 2.7. *Soit f une fonction propre du problème de Steklov sur une surface. Si f s'annule sur un ouvert du bord, alors $f \equiv 0$.*

Démonstration : Soit I un intervalle du bord sur lequel f s'annule. On peut déformer conformément la surface de manière à ce que I devienne géodésique et que la métrique reste inchangée sur le reste du bord. Par invariance conforme de l'harmonicité et de la condition $\partial f/\partial \nu = 0$, f est toujours fonction propre. En notant x un paramètre sur I, on a $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, donc aussi $\partial^2 f/\partial \nu^2 = 0$ puisque f est harmonique. Enfin, comme $\partial f/\partial \nu = 0$ sur I, on a aussi $\partial^2 f/\partial x \partial \nu = 0$ et donc le développement à l'ordre 2 de f est nul le long de I.

Par conséquent, au voisinage d'un point de I, on peut prolonger f par 0 en dehors de M et obtenir une fonction $\tilde{f}$ qui est C^2 et vérifie $\Delta f = 0$. Par unique prolongement des fonctions harmoniques, on a $f \equiv 0$ sur M. ∎

2.2. Le problème de Steklov-Neumann

Étant donné une variété compacte à bord M, on se donne un domaine (ou une union de domaines disjoints) à bord C^1 par morceaux de ∂M qu'on notera ∂M_S, et on pose $\partial M_N = \partial M \backslash \partial M_S$. Si ρ est une fonction sur ∂M_S, le problème de Steklov-Neumann se pose ainsi :

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M_S \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial M_N \end{cases} \tag{2.8}$$

c'est-à-dire qu'on demande à la fonction harmonique f de vérifier la condition de Neumann sur ∂M_N. On appellera respectivement bord de Steklov et bord de Neumann les ensembles ∂M_S et ∂M_N. Les solutions de ce problème interviennent dans l'étude du phénomène hydrodynamique de ballottement (*sloshing problem*) : si on considère un fluide parfait incompressible contenu dans un récipient M avec une surface libre ∂M_S, les petites oscillations périodiques du fluide correspondent aux solutions de (2.8) pour une fonction ρ constante (voir par exemple [KK01]).

Le problème de Steklov-Neumann possède un spectre discret et positif qu'on notera

$$0 = \sigma_0(M, \partial M_S, g, \rho) < \sigma_1(M, \partial M_S, g, \rho) \leq \sigma_2(M, \partial M_S, g, \rho) \ldots \tag{2.9}$$

Le spectre de Steklov-Neumann possède la même caractérisation variationnelle que le spectre de Steklov, à condition de restreindre l'intégrale sur le bord au bord de Steklov :

$$\sigma_k(M, \partial M_S, g, \rho) = \inf_{V_{k+1} \in H^1(M)} \sup_{f \in V_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\mathrm{d}f|^2 \mathrm{d}v_g}{\int_{\partial M_S} f^2 \rho \ \mathrm{d}v_g}, \tag{2.10}$$

où V_k parcours les sous-espaces de dimension k de $H^1(M)$.

L'opérateur Dirichlet-to-Neumann est bien défini sur ∂M_S en considérant des fonctions harmoniques vérifiant la condition de Neumann sur ∂M_N et vérifie toujours l'inégalité elliptique (2.6).

On aura besoin du fait que si on se donne une fonction f sur ∂M_S et qu'on la prolonge en une fonction harmonique (toujours notée f), sa norme L^2 sur ∂M_N est contrôlée par sa norme sur ∂M_S, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de g et ρ telle que $\int_{\partial M_N} f^2 \leq c \int_{\partial M_S} f^2 \rho$. Cela découle du fait que la norme $L^2(\partial M_N)$ de f est contrôlée par sa norme $H^{1/2}(M)$, elle même contrôlée par sa norme $L^2(\partial M_S)$ (cf. [Ta96a], section 4.4).

On utilisera aussi un bref usage du spectre de Steklov-Dirichlet, défini en considérant des fonctions harmoniques qui vérifient la condition $f = 0$ sur $\partial M \backslash \partial M_S$. La propriété de ce spectre qui nous intéressera est qu'il est strictement positif (cf. [Ag05]).

2.3. Fonctions harmoniques et métriques singulières

Dans la section suivante, on aura à manipuler des métriques discontinues. Si U est un domaine de (M, g) et $\varepsilon \in]0, 1[$ un réel fixé, elles seront de la forme

$$\begin{cases} g_\varepsilon = \varepsilon^2 g & \text{sur } U \\ g_\varepsilon = g & \text{sur } M \backslash U. \end{cases} \tag{2.11}$$

Comme les normes L^2 et de Sobolev pour les métriques g et g_ε sont équivalentes, la théorie spectrale de la forme quadratique $\|\mathrm{d} \cdot \|_{g_\varepsilon}^2$ sur $H^1(M)$ est donc similaire à celle de $\|\mathrm{d} \cdot \|_g^2$. On peut donc définir le prolongement harmonique d'une fonction $f \in C^\infty(\partial M)$ comme étant le prolongement minimisant cette forme quadratique. Cette définition est cohérente avec celle de la forme quadratique Q donnée par (2.4).

Un tel prolongement minimisera en particulier $\|\mathrm{d} \cdot \|_{g_\varepsilon}^2$ en restriction à chacun des domaines U et $M \backslash U$, il sera donc harmonique au sens usuel sur ces deux domaines.

Les mêmes remarques s'appliquent au problème de Steklov-Neumann.

3. Théorèmes de convergence spectrale

3.1. Rappels

Dans cette section, nous allons montrer plusieurs théorèmes de convergence spectrale dont nous aurons besoin pour prescrire le spectre de Steklov. Nous utiliserons pour cela les techniques développées par Y. Colin de Verdière dans [CdV86]. Pour prescrire la multiplicité des valeurs propres, il nous faudra montrer la convergence des espaces propres, et nous aurons aussi besoin d'une certaine uniformité de la convergence, nous reprendrons pour cela les notations de [CdV86] :

Soit E_0 et E_1 sont deux sous-espaces vectoriels de même dimension N d'un espace de Hilbert, munis respectivement des formes quadratiques q_0 et q_1. Si E_0 et E_1 sont suffisamment proches, il existe une isométrie naturelle ψ entre les deux (voir la section I de [CdV86] pour les détails de la construction), on définit alors l'écart entre q_0 et q_1 par $\|q_1 \circ \psi - q_0\|$. Pour deux formes quadratiques Q_0 et Q_1 sur l'espace de Hilbert, on appellera *N-écart spectral entre Q_0 et Q_1* l'écart entre les deux formes quadratiques restreintes à la somme des espaces propres associés aux N premières valeurs propres. Si cet écart est petit, alors les N premières valeurs propres de Q_0 et leurs espaces propres sont proches de ceux de Q_1.

On veut montrer que la convergence spectrale est uniforme pour une certaine famille de spectres limites. Comme dans [CdV86] on dira donc qu'une forme quadratique vérifie l'hypothèse $(*)$ si ses valeurs propres vérifient

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_N < \lambda_N + \eta \leq \lambda_{N+1} \leq M \quad (*)$$

pour un entier N et des réels $\eta, M > 0$ fixés une fois pour toute.

Comme dans [CdV86], on fera appel aux deux lemmes qui suivent. Les constantes N, M et η qui interviennent dans les énoncés font référence à l'hypothèse $(*)$ définie plus haut.

Lemme 3.1 ([CdV86], th. I.7). *Soit Q une forme quadratique positive sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dont le domaine admet la décomposition Q-orthogonale* $\mathrm{dom}(Q) = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_\infty$. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\eta, M, N, \varepsilon) > 0$ (grande) telle que si $Q_0 = Q_{|\mathcal{H}_0}$ vérifie l'hypothèse $(*)$ et que $\forall x \in \mathcal{H}_\infty,\ Q(x) \geq C|x|^2$, alors Q et Q_0 ont un N-écart spectral inférieur à ε.*

Lemme 3.2 ([CdV86], th. I.8). *Soit $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ un espace de Hilbert muni d'une forme quadratique positive Q. On se donne en outre une suite de métriques $|\cdot|_n$ sur $\mathcal{H}$ et une suite de formes quadratiques Q_n de même domaine que Q telles que :*

(i) il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall x \in \mathcal{H},\ C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x|$;
(ii) pour tout $x \in \mathrm{dom}(Q)$, $|x|_n \to |x|$;
(iii) pour tout $x \in \mathrm{dom}(Q)$, $Q(x) \leq Q_n(x)$;
(iv) pour tout $x \in \mathrm{dom}(Q)$, $Q_n(x) \to Q(x)$.

Si Q vérifie l'hypothèse $(*)$, alors à partir d'un certain rang (dépendant de η, M et N), Q et Q_n ont un N-écart spectral inférieur à ε.

Remarque 3.3. Comme on l'a remarqué dans [Ja11], dans le lemme 3.2, on peut affaiblir l'hypothèse $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x|$ en $C_1|x| \leq |x|_n \leq C_2|x| + \varepsilon_n Q_n(x)^{\frac{1}{2}}$ avec $\varepsilon_n \to 0$, la démonstration restant exactement la même (on peut aussi remplacer Q_n par Q dans cette dernière inégalité). En particulier, il n'est pas nécessaire que l'espace de Hilbert $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ soit complet pour $|\cdot|_n$.

Remarque 3.4. On peut aussi remplacer l'hypothèse $x \in \mathrm{dom}(Q) \Rightarrow Q(x) \leq Q_n(x)$ par $Q(x) \leq M \Rightarrow Q(x) \leq (1+\varepsilon_n)Q_n(x)$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

Remarque 3.5. Pour déduire la convergence du spectre et des espaces propres de la convergence des formes quadratiques, on doit en principe se ramener à une norme de Hilbert fixe. Ça ne sera pas nécessaire dans la suite car les étapes de la démonstration où la norme varie seront traitées à l'aide du lemme 3.2.

3.2. Densité et convergence de spectre

Notre premier résultat de convergence sera de montrer qu'avec une densité fixée sur le bord, on peut déformer conformément la métrique de manière à faire tendre le spectre de Steklov vers le spectre correspondant à une autre densité. On peut en outre faire tendre la métrique déformée vers la métrique initiale dans l'intérieur de la variété. On se restreindra au cas où la densité initiale est plus petite que la densité du spectre limite, ce qui sera suffisant pour les applications dans la section suivante.

Théorème 3.6. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte à bord, et $\rho, \bar{\rho} \in C^0(\partial M)$ deux fonctions sur le bord de M telles que $\bar{\rho} \geq \rho$.*

Il existe une famille g_ε de métriques conformes à g sur M telle que :

1. *$\sigma_k(M, g_\varepsilon, \rho)$ tend vers $\sigma_k(M, g, \bar{\rho})$ quand $\varepsilon \to 0$ pour tout $k \geq 0$, avec convergence des espaces propres.*
2. *$g_\varepsilon = (\bar{\rho}/\rho)^{2/(n-1)} g$ sur ∂M.*
3. *g_ε tend vers g uniformément sur tout compact dans l'intérieur de M.*

En outre, si les $\sigma_k(M, g, \bar{\rho})$ vérifient l'hypothèse (∗), alors le N-écart spectral entre (M, g_ε, ρ) et $(M, g, \bar{\rho})$ tend vers 0.

Démonstration : On définit une famille $h_\varepsilon \in C^\infty(M)$ de facteurs conformes de la manière suivante : on fixe $h_\varepsilon(x) = (\bar{\rho}/\rho)^{1/(n-1)}$ pour $x \in \partial M$ et on étend h_ε de manière lisse de sorte que la famille (h_ε) tende simplement vers 1 dans l'intérieur de M, et uniformément sur tout compact ne rencontrant pas le bord. On pose alors $g_\varepsilon = h_\varepsilon^2 g$ pour tout ε.

La famille de métriques g_ε induit les familles de normes et de formes quadratiques

$$Q_\varepsilon(f) = \inf_{\substack{\tilde{f} \in H^1(M) \\ \tilde{f}_{|\partial M} = f}} \int_M h_\varepsilon^{n-2} |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g} \text{ et } |f|_\varepsilon = \int_{\partial M} f^2 \bar{\rho} \, \mathrm{d}_{v_g}. \tag{3.7}$$

Comme $\bar{\rho} \geq \rho$, on peut choisir une suite (h_ε) décroissante, les suites Q_ε et $|\cdot|_\varepsilon$ vérifient alors les hypothèses du lemme 3.2, ce qui suffit pour conclure. ■

3.3. Convergence vers le spectre d'un domaine

Le second théorème consiste à faire converger le spectre de Steklov d'une variété à bord M vers le spectre de Steklov-Neumann d'un domaine U de M, avec la condition de Steklov sur $\partial U_S = \partial U \cap \partial M$ et la condition de Neumann sur le reste du bord de U. Ce résultat étend au spectre de Steklov de théorèmes analogues concernant le laplacien agissant sur les fonctions ([CdV86]) et sur les formes différentielles ([Ja11])

Théorème 3.8. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$, $\rho \in C^\infty(\partial M)$ et U un domaine de M à bord C^1 par morceau tel que $\partial U_S = \partial U \cap \partial M$ soit non vide. Il existe une famille g_ε de métriques sur M conformes à g telle que*

1. *$g = g_\varepsilon$ en restriction à U.*
2. *$\mathrm{Vol}(M, g_\varepsilon) \to \mathrm{Vol}(U, g)$ quand $\varepsilon \to 0$.*
3. *$\sigma_k(M, \rho, g_\varepsilon) \to \sigma_k(U, \partial U_S, \rho_{|\partial U_S}, g_{|U})$ quand $\varepsilon \to 0$ pour tout $k \geq 0$, avec convergence des espaces propres.*

En outre, si les $\sigma_k(U, \partial U_S, \rho_{|\partial U_S}, g_{|U})$ vérifient l'hypothèse ($*$), alors le N-écart spectral entre (M, ρ, g_ε) et $(U, \partial U_S, \rho_{|\partial U_S}, g_{|U})$ tend vers 0.

Démonstration : La démonstration est similaire à celle du théorème III.1 de [CdV86] et passe par l'intermédiaire, pour un réel $\eta > 0$ petit donné, de la métrique singulière g_η définie par $g_\eta = g$ sur U et $g_\eta = \eta^2 g$ sur $M \backslash U$. Elle se déroule en deux étapes : d'abord, on montre la convergence spectre pour la famille de métriques singulières, puis on approche ces métriques singulières par des métriques lisses. On conclut en se donnant, pour un $\varepsilon > 0$ donné, une métrique g_η tel que l'écart spectral avec le spectre de (U, g) soit inférieur à ε, puis une métrique lisse g_ε tel que l'écart spectral avec g_η soit lui aussi inférieur à ε.

On fera souvent appel à la forme quadratique définie en (2.4), en particulier quand on manipule des métriques singulières.

Étape 1. un réel $\eta > 0$ étant donné, la métrique g_η induit sur $L^2(\partial M)$ la forme quadratique

$$Q_\eta(f) = \inf_{\tilde{f}_{|\partial M} = f} \left(\int_U |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g} + \eta^{n-2} \int_{M \backslash U} |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g} \right) \tag{3.9}$$

et la norme $|f|_{g_\eta} = \int_{\partial U_S} f^2 \rho \, \mathrm{d}_{v_g} + \eta^{(n-1)} \int_{\partial M \backslash \partial U_S} f^2 \rho \, \mathrm{d}_{v_g}$. On va utiliser le lemme 3.1 pour se ramener à un sous-domaine de la forme quadratique puis appliquer le lemme 3.2.

En notant $\mathcal{H}$ le domaine de la forme quadratique Q_η, on définit l'espace $\mathcal{H}_\infty = \{f \in \mathcal{H}, f_{|\partial U_S} = 0\}$ et on note $\mathcal{H}_0$ son orthogonal pour la forme quadratique Q_η. Pour appliquer le lemme 3.1, on doit minorer la forme quadratique Q_η sur $\mathcal{H}_\infty$ en fonction de $|\cdot|_\eta$. Si $f \in \mathcal{H}_\infty$, alors $|f|_\eta^2 = \eta^{(n-1)} \int_{\partial M \backslash \partial U_S} f^2 \rho \, \mathrm{d}_{v_g} = \eta^{(n-1)} |f|^2$ et $Q_\eta(f) \geq \eta^{n-2} \inf_{\tilde{f}_{|\partial M} = f} \int_M |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g} =$

$\eta^{n-2}Q(f)$. On est donc ramené à l'étude du spectre de la forme quadratique Q associée à la métrique initiale g en restriction à l'espace $\mathcal{H}_\infty$, c'est-à-dire à minorer le spectre de Steklov sur M avec condition de Dirichlet sur ∂U_S. Comme 0 n'est pas dans le spectre de Steklov-Dirichlet (cf. paragraphe 2.2), il existe une constante $c > 0$ telle que $Q(f)/|f|^2 > c$ pour tout $f \in \mathcal{H}_\infty$. Par conséquent, $Q_\eta(f)/|f|_\eta \geq c \cdot \eta^{-2}$ pour tout $f \in \mathcal{H}_\infty$. Si η est suffisamment petit, on peut donc appliquer le lemme 3.1 et en déduire que le spectre pour la métrique g_η est proche du spectre de Q_η restreint à $\mathcal{H}_0$.

Il reste à montrer que la limite du spectre de $Q_{\eta|\mathcal{H}_0}$ est le spectre de Steklov-Neumann du domaine U. On utilisera pour cela le lemme 3.2. Puisque $\mathcal{H}_0$ est défini comme le Q_η-orthogonal des fonctions de ∂M nulles sur ∂U_S, une fonction de $\mathcal{H}_0$ est entièrement déterminée par sa restriction à ∂U_S. Plus précisément, parmi les fonctions f dont la valeur sur ∂U_S est fixée, celle qui est dans $\mathcal{H}_0$ est celle minimise la forme quadratique Q_η. C'est donc la restriction au bord du prolongement harmonique (tel qu'on l'a défini au paragraphe 2.3) de $f_{\partial U_S}$ avec condition de Neumann sur $\partial M \backslash \partial U_S$. Dans la suite, on identifiera souvent une fonction sur ∂U_S avec le prolongement ainsi défini.

La norme $|\cdot|_\eta$ converge en décroissant vers la norme $|\cdot|$ définie par $|f| = \int_{\partial U_S} f^2\rho \, \mathrm{d}v_g$. L'hypothèse (ii) et la première inégalité de l'hypothèse (i) du lemme 3.2 sont donc satisfaites. Les hypothèses (iii) et (iv) sont vérifiées pour les mêmes raisons.

Il reste à montrer que la deuxième inégalité de l'hypothèse (i) est vérifiée. Pour cela, on doit majorer $\int_{\partial M \backslash \partial U_S} f^2 \rho \, \mathrm{d}v_g$. Notons $\tilde{f}$ le prolongement de $f_{|\partial U_S}$ qui est harmonique au sens du paragraphe 2.3, c'est-à-dire que $Q_\eta(f) = \int_U |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g} + \eta^{n-2} \int_{M\backslash U} |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}_{v_g}$. Comme on l'a remarqué au paragraphe 2.2, puisque $\tilde{f}$ est harmonique sur $M\backslash U$ avec condition de Neumann sur $\partial M \backslash \partial U_S$, la norme $L^2(\partial M\backslash\partial U_S, \rho)$ de $\tilde{f}$ est contrôlée par sa norme L^2 sur $\partial U \backslash \partial U_S$, c'est-à-dire que $\int_{\partial M\backslash \partial U_S} \tilde{f}^2 \rho \, \mathrm{d}v_g \leq c_1 \int_{\partial U \backslash \partial U_S} \tilde{f}^2 \rho \, \mathrm{d}v_g$. Notons que la constante c_1 est invariante par homothétie, donc indépendante de η, à condition de considérer sur $\partial(M\backslash U)$ la métrique induite par la métrique de $M\backslash U$. En considérant la métrique g_η sur $\partial M \backslash \partial U_S$ et la métrique g sur $\partial U \backslash \partial U_S$ on obtient

$$\int_{\partial M \backslash \partial U_S} \tilde{f}^2 \rho \, \mathrm{d}v_{g_\eta} \quad \leq \quad \eta^{n-1} c_1 \int_{\partial U \backslash \partial U_S} \tilde{f}^2 \mathrm{d}v_g \tag{3.10}$$

On majore le membre de droite à l'aide de l'inégalité elliptique de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann sur ∂U.

$$\begin{aligned} \int_{\partial U \backslash \partial U_S} \tilde{f}^2 \mathrm{d}v_g &\leq \|f\|^2_{L^2(\partial U)} \leq \|f\|^2_{H^1(\partial U)} \\ &\leq c_2 \int_{\partial U} f \frac{\partial f}{\partial \nu} \mathrm{d}v_g = c_2 \int_U |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}v_g \\ &\leq c_2 Q_\eta(f). \end{aligned} \tag{3.11}$$

On a donc finalement $|f|^2_\eta \leq |f|^2 + \eta^{n-1} c_1 c_2 Q_\eta(f)$ ce qui permet d'appliquer le lemme 3.2 et la remarque 3.3.

Étape 2. On doit montrer que pour tout $\eta > 0$, le spectre de Q_η peut être approché par le spectre de métriques lisses conformes à g.

Le paramètre η état fixé, on définit une suite de facteurs conformes h_i tels que la suite (h_i) converge en décroissant vers la fonction $\chi_U + \eta\chi_{M\setminus U}$ et on pose $g_i = h_i^2 g$. Les suites de norme de Hilbert $|\cdot|_i$ et de formes quadratiques Q_i associées à g_i convergent vers $|\cdot|_\eta$ et Q_η en vérifiant les hypothèses du lemme 3.2, ce qui assure la convergence du spectre et des espaces propres. ■

3.4. Convergence vers le spectre du bord

Enfin, nous allons montrer qu'on peut faire tendre le spectre de Steklov homogène (c'est-à-dire que $\rho \equiv 1$) d'une variété à bord M vers le spectre du laplacien sur ∂M, la métrique sur ∂M restant homothétique à la métrique initiale. Bien que ce théorème ne soit pas indispensable pour démontrer le théorème 1.2, on peut l'utiliser si la dimension de ∂M est au moins 3. Il semble aussi intéressant en lui-même et fournit un exemple d'application du théorème démontré au paragraphe précédent.

Théorème 3.12. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$. Il existe une famille g_ε de métriques sur M conformes à g et homothétiques à g le long de ∂M telle que $\sigma_k(M, g_\varepsilon) \to \lambda_k(M, g)$ quand $\varepsilon \to 0$ pour tout $k \geq 0$.*

En outre, si les $\lambda_k(M, g)$ vérifient l'hypothèse $(*)$, alors le N-écart spectral entre le spectre de Steklov de (M, g_ε) et le spectre du laplacien de $(\partial M, g)$ tend vers 0.

Démonstration : Le principe de la démonstration consiste à se ramener au cas d'un voisinage collier du bord (avec la condition mixte Steklov-Neumann) en utilisant le théorème 3.8. On va procéder en trois étapes : d'abord montrer la convergence du spectre d'un voisinage collier de ∂M muni d'une métrique produit, puis traiter le cas de la restriction de métrique g à ce voisinage collier, et enfin montrer la convergence du spectre de M.

Étape 1. On va déterminer l'asymptotique (quand $\eta \to 0$) du spectre de la variété produit $\partial M \times [0, \eta]$ pour un métrique produit, avec la condition de Steklov sur $\partial M \times \{0\}$ et la condition de Neumann sur $\partial M \times \{\eta\}$.

On peut déduire ce spectre du spectre de Steklov de $\partial M \times [0, 2\eta]$ (avec condition de Steklov sur les deux bords) par symétrie : en effet, on peut partitionner les valeurs propres de $\partial M \times [0, 2\eta]$ en deux, selon que les fonctions propres sont symétriques ou antisymétriques. Ces fonctions propres vérifient la condition de Neumann sur $\partial M \times \{\eta\}$ dans le premier cas et la condition de Dirichlet dans le second cas. Le spectre de $\partial M \times [0, \eta]$ avec condition mixte est donc le spectre de Steklov de $\partial M \times [0, 2\eta]$ restreint aux fonctions symétriques.

Le spectre de Steklov de $\partial M \times [0, 2\eta]$ a été calculé explicitement dans [CESG11] (lemme 6.1) en fonction du spectre du laplacien sur ∂M : si ∂M est de volume 1 et si on note λ_k ses valeurs propres et u_k ses fonctions propres, alors le spectre non nul de $\partial M \times [0, 2\eta]$ restreint aux fonctions symétriques est $\sqrt{\lambda_k}\tanh(\eta\sqrt{\lambda_k})$ les fonctions propres associées étant $\cosh(\sqrt{\lambda_k}t)u_k(x)$, où x désigne un point de ∂M et t la coordonnée sur l'intervalle. Le spectre de Steklov-Neumann de $\partial M \times [0,\eta]$ se comporte donc asymptotiquement comme $\eta\lambda_k$ quand $\eta \to 0$. En pratiquant une homothétie sur $\partial M \times [0,\eta]$, on peut donc faire tendre son spectre vers λ_k. On peut facilement vérifier à l'aide de l'expression des fonctions propres qu'il y a bien convergence des espaces propres.

Étape 2. Étant donnée la variété à bord (M,g) et un réel $\eta > 0$ petit, on considère le η-voisinage collier M_η de ∂M, c'est-à-dire que $M_\eta = \{x \in M, d(x,\partial M) \leq \eta\}$. Pour η suffisamment petit, M_η est difféomorphe au produit de ∂M avec un intervalle. On considère alors le problème de Steklov-Neumann sur M_η comme dans l'étape 1.

Quand η tend vers 0, la métrique g restreinte à M_η est de plus en plus proche d'une métrique produit. Plus précisément, il existe une famille de réels $\tau_\eta > 1$ telle que $\tau_\eta \to 1$ quand $\eta \to 0$ et $1/\tau_\eta g_\eta \leq g_{|M_\eta} \leq \tau_\eta g_\eta$, où g_η désigne la métrique produit sur $\partial M \times [0,\eta]$. Comme la constante τ_η contrôle aussi l'écart entre les normes de Hilbert et les formes quadratiques pour le problème de Steklov-Neumann sur (M_η, g) et (M_η, g_η), on peut appliquer le lemme 3.2 et la remarque 3.4 pour obtenir la convergence spectrale comme dans l'étape 1.

Étape 3. Pour pouvoir conclure, il on aura besoin de faire tendre le spectre de Steklov de M vers celui de M_η en restant dans la classe conforme de g. On va utilise pour cela le théorème 3.8 :

Un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit $\eta > 0$ et un rapport d'homothétie $r_\eta > 0$ tels que le spectre de $(M_\eta, r_\eta^2 g)$ soit ε-proche de celui de $(\partial M, g)$. Puis, en appliquant le théorème 3.8 avec $U = M_\eta$, on obtient une métrique g'_η sur M tel que le spectre de (M, g'_η) soit ε-proche de celui de $(M_\eta, r_\eta^2 g)$. Quand ε tend vers 0, on a ainsi convergence du spectre et des espaces propres de (M, ρ, g_ε) vers ceux du laplacien sur $(\partial M, g)$. ∎

4. Prescription du spectre

4.1. L'hypothèse de transversalité d'Arnol'd

Pour prescrire la multiplicité des valeurs propres de Steklov nous utilisons, selon la méthode introduite par Colin de Verdière, trois ingrédients : les théorèmes de convergence spectrale démontrés dans les sections précédentes, des modèles de valeurs propres multiples déjà connus et une propriété de stabilité vérifiée par ces modèles. Nous allons commencer par rappeler cette dernière. On verra au paragraphe suivant comment utiliser des graphes complets comme modèles de spectre avec multiplicité.

On suppose qu'on a une famille d'opérateurs $(P_a)_{a\in B^k}$, où B^k est la boule unité de $\mathbb{R}^k$ (en pratique, P_a est l'opérateur Dirichlet-to-Neumann associé à une métrique g_a), tels que P_0 possède une valeur propre λ_0 d'espace propre E_0 et de multiplicité N. Pour les petites valeurs de a, P_a possède des valeurs propres proches de λ_0 dont la somme des espaces propres est de dimension N.

Comme dans la définition de l'écart spectral, on identifie cette somme à E_0 et on note q_a la forme quadratique associée à P_a transportée sur E_0.

Définition 4.1 ([CdV88]). *On dit que λ_0 vérifie l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd si l'application $\Psi : a \mapsto q_a$ de B^k dans $\mathcal{Q}(E_0)$ est essentielle en 0, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\Phi : B^k \to \mathcal{Q}(E_0)$ vérifie $\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$, alors il existe $a_0 \in B^k$ tel que $\Phi(a_0) = q_0$.*

Une propriété cruciale est que si Φ provient d'une famille (P'_a) d'opérateurs, alors λ_0 est valeur propre de P'_{a_0} de multiplicité N et vérifie la même propriété de transversalité, ce qui justifie qu'on parle de stabilité de la multiplicité. Comme remarqué dans [CdV88], on peut généraliser cette définition à une suite finie de valeurs propres.

4.2. Voisinages tubulaires de graphes

Dans [CdV88], Y. Colin de Verdière a montré qu'un graphe complet muni d'un laplacien combinatoire et d'une métrique appropriée possède une (ou plusieurs) valeur propre multiple vérifiant la propriété de transversalité d'Arnol'd. Dans ce paragraphe, nous allons utiliser ce résultat pour construire une variété dont on prescrit le début du spectre Steklov-Neumann avec multiplicité.

On note Γ un graphe fini, S l'ensemble de ses sommets et A l'ensemble de ses arêtes. On se donne une métrique sur ce graphe en associant à chaque arête $a_i \in A$, une longueur $l_i > 0$. Le laplacien combinatoire sur Γ est l'opérateur agissant sur les fonctions $S \to \mathbb{R}$ induit par la forme quadratique $q(f) = \sum_{a_i \in A} l_i \mathrm{d}_{a_i}(f)^2$, avec $\mathrm{d}_a(f) = (f(x) - f(y))/l_i$, x et y étant les extrémités de l'arête a_i. L'espace des fonctions $\mathbb{R}^S$ sur les sommets est muni de sa structure euclidienne canonique.

On utilise alors le résultat de Colin de Verdière suivant :

Théorème 4.2 ([CdV88], section 4). *Étant donné une suite $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$, il existe une métrique sur le graphe complet à $N+1$ sommets dont le spectre est la suite (λ_i). De plus, ce spectre vérifie la propriété de transversalité d'Arnol'd.*

Il reste à construire une famille de variétés dont le début du spectre ressemble à celui d'un graphe complet. Ces variétés, qu'on notera Ω_ε, seront localement des domaines euclidiens. Le graphe Γ sera plongeable isométriquement dans Ω_ε, les sommets étant situés sur le bord de Steklov de la variété (construire Ω_ε comme étant globalement un domaine euclidien nécessiterait d'imposer des contraintes sur les longueurs l_i, ce qu'on veut éviter).

Plus précisément, deux réels $c > 0$ et ε étant fixé, on se donne pour chaque sommet $s_j \in S$ une demi-boule B_j de rayon $c\varepsilon$ (dans la suite, utilisera l'indice j pour les sommets du graphe et on réservera l'indice i pour les arêtes). La constante c sera fixée plus loin. Pour chaque arête $a_i \in A$, on se donne ensuite un cylindre C_i de rayon ε et de longueur $l_i - 2c\varepsilon$. Si on note j et j' les indices des sommets extrémités de l'arête a_i, et qu'on place les boules B^{n-1} qui bordent le cylindre C_i tangentiellement aux demi-boules B_j et $B_{j'}$, on peut plonger isométriquement l'arête a_i dans la réunion de C_i, B_j et $B_{j'}$,en identifiant les sommets s_j et $s_{j'}$ avec les centres de B_j et $B_{j'}$. En répétant le procédé pour chaque arête, le graphe Γ se plonge isométriquement dans la réunion des demi-boules B_j et des cylindres C_i. Pour construire le domaine Ω_ε, on va prolonger le cylindre C_i en un cylindre C_i' dont les extrémités seront dans les demi-boules. Chaque boule B_j étant vue localement comme un domaine euclidien, on construit une application de $C_i' = B^{n-1} \times [0, l_i]$ dans la réunion des C_i et des voisinages des B_j telle que :

- $B^{n-1} \times [c\varepsilon, l_i - c\varepsilon]$ est envoyé isométriquement sur C_i ;
- pour $t \in [0, c\varepsilon]$ et $[l_i - c\varepsilon, l_i]$, chaque boule $B^{n-1} \times \{t\}$ est plongée isométriquement dans le voisinage de la demi-boule B_j correspondante ;
- $B^{n-1} \times \{0\}$ et $B^{n-1} \times \{1\}$ sont envoyé sur le bord équatorial de B_j ;
- l'application obtenue est 1-lipschitzienne.

Les extrémités des cylindres ne sont donc pas isométriques à la métrique produit mais légèrement tordus à l'intérieur des boules (cf. figure 1). En outre, on fait en sorte que les images de chaque C_i' soient disjointes (on choisit c assez grand pour que ça soit possible). Ces précisions techniques faciliteront l'étude du spectre.

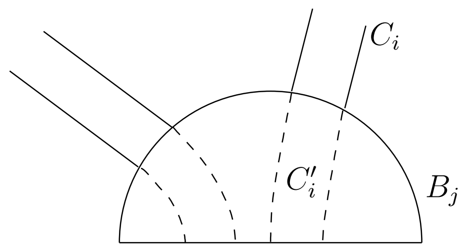

FIGURE 1 – Construction locale de Ω_ε

On peut remarquer que quand ε tend vers 0, Ω_ε tend vers le graphe Γ pour la distance de Gromov-Hausdorff.

En considérant la condition de Steklov sur les boules équatoriales des demi-boules B_j et la condition de Neumann sur le reste du bord de Ω_ε, on va montrer que le début du spectre de Ω_ε tend vers le spectre du graphe, à une constante multiplicative près :

Théorème 4.3. *Le N-écart spectral entre le spectre de Steklov-Neumann de Ω_ε et le spectre de $c^{n-1}\Delta_\Gamma$, où Δ_Γ désigne le laplacien combinatoire sur Γ, tend vers 0 quand ε tend vers 0.*

Démonstration : La démonstration se déroule en deux étapes. D'abord, on décompose l'espace des fonctions harmoniques (pour le problème de Steklov-Neumann) sur Ω_ε en deux sous-espaces pour appliquer le lemme 3.1, puis on montre la convergence en se restreignant à l'un des sous-espaces. On note

$\partial\Omega_{\varepsilon,S}$ le bord de Steklov de Ω_ε, $\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}$, $1 \le j \le N$ ses composantes connexes et $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions harmoniques sur Ω_ε vérifiant la condition de Neumann sur $\partial\Omega_\varepsilon \backslash \partial\Omega_{\varepsilon,S}$.

Étape 1. On définit l'espace $\mathcal{H}_0$ comme étant l'espace des fonctions harmoniques de Ω_ε constantes sur chacune des N composantes connexes du bord de Steklov. L"orthogonal de $\mathcal{H}_0$ pour la forme quadratique Q associée à l'opérateur Λ contient les fonction constantes, qui sont aussi dans $\mathcal{H}_0$. On définit donc $\mathcal{H}_\infty$, comme l'espace des fonctions Q-orthogonales à $\mathcal{H}_0$ et d'intégrale nulle sur $\partial\Omega_{\varepsilon,S}$. Si $f \in \mathcal{H}_0$ et si g est Q-orthogonale à H_0, alors on a, en notant f_j la valeur de f sur $\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}$: $(f, \Lambda g) = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,S}} f \frac{\partial g}{\partial\nu} = \sum_j f_j \int_{\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}} \frac{\partial g}{\partial\nu}$. Comme $(f, \Lambda g)$ est nul pour tout $f \in \mathcal{H}_0$, on en déduit que $\int_{\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}} \frac{\partial g}{\partial\nu} = 0$ pour tout j. On a donc

$$\mathcal{H}_\infty = \left\{ f \in \mathcal{H},\ \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,S}} f = 0,\ \int_{\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}} \frac{\partial f}{\partial\nu} = 0 \text{ pour tout } j \right\}. \tag{4.4}$$

On doit minorer la forme quadratique Q sur l'espace $\mathcal{H}_\infty$. Pour cela, on va passer par l'intermédiaire du domaine $D = \cup_j B_j$. Mais comme la restriction des formes harmoniques de Ω_ε ne vérifient pas la condition de Neumann sur les hémisphères qui bordent les B_j on va d'abord reformuler l'expression du bas du spectre de Q sur $\mathcal{H}_\infty$. On pose, pour toute fonction $\tilde{f} \in C^\infty(F)$ telle que $\int_{\partial\Omega_{\varepsilon,S}} \tilde{f} = 0$,

$$\tilde{Q}(\tilde{f}) = \inf_{\substack{f_{|\partial\Omega_{\varepsilon,S}} = \tilde{f} \\ \int_{\partial\Omega^j_{\varepsilon,S}} \frac{\partial f}{\partial\nu} = 0}} \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathrm{d}f|^2. \tag{4.5}$$

On peut vérifier que la borne inférieure de $\tilde{Q}$ (pour $\|\tilde{f}\|_2 = 1$) coïncide bien avec le bas du spectre de Q sur $\mathcal{H}_\infty$.

On définit les espaces $\mathcal{H}^D$, $\mathcal{H}^D_\infty$ et les formes quadratiques Q^D, $\tilde{Q}^D$ en remplaçant Ω_ε par D dans les définitions de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_\infty$, Q et $\tilde{Q}$. Comme $D \subset \Omega_\varepsilon$, $\tilde{Q}$ est minoré par la forme quadratique $\tilde{Q}^D$. La première valeur propre de $Q_{\mathcal{H}_\infty}$ est donc minorée par la première valeur propre de $Q^D_{\mathcal{H}_\infty}$. Le domaine D possède N composantes connexes, donc la multiplicité de 0 dans spectre de Steklov de D est N, les fonctions propres étant les fonctions constantes sur chaque B_j. La première valeur propre de $Q^D_{\mathcal{H}_\infty}$ est donc la $(N+1)$-ième valeur propre de D, qui est la première valeur propre non nulle $\sigma_1(B(\varepsilon))$ de la demi-boule de rayon $c\varepsilon$. Cette valeur propre se comporte comme ε^{-2} quand $\varepsilon \to 0$, ce qui permet d'appliquer que lemme 3.1.

Étape 2. On doit maintenant comparer les spectres de $Q_{\mathcal{H}_0}$ et de la forme quadratique q associée au laplacien combinatoire sur Γ. Les deux domaines des formes quadratiques sont en bijection de manière évidente, en identifiant une fonction sur les sommets s_j de Γ avec une fonction constante sur chaque F_j, prenant les mêmes valeurs. Les normes sur les deux espaces sont différentes. On notera $|\cdot|_\Gamma$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^S$, la norme sur $\mathcal{H}_0$ est alors $|\cdot| = (c\varepsilon)^{n-1}\omega_{n-1}|\cdot|_\Gamma$, où ω_{n-1} désigne le volume de la boule euclidienne canonique de dimension $n-1$.

Étant donnée f est une fonction sur S, on construit une fonction test $\bar{f}$ sur Ω_ε prenant les mêmes valeurs que f sur chaque F_j, constante sur chaque demi-boule B_j et prolongée de manière affine sur les cylindres C_i constituant le domaine Ω_ε. On a $Q(f) \leq Q(\bar{f}) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\mathrm{d}\bar{f}|^2 = \varepsilon^{n-1}\omega_{n-1}\sum_{a_i\in A}\frac{1}{l_i-2c\varepsilon}(f(x_i)-f(y_i))^2$, où x_i et x_i sont les extrémités de l'arête a_i, donc $\limsup_{\varepsilon\to 0} Q(f)/|f|^2 \leq c^{n-1}q(f)/|f|^2_\Gamma$.

Réciproquement, étant donné une fonction $f \in \mathcal{H}_0$, on construit une fonction test sur les arêtes du graphe Γ. À partir de la donnée de f sur l'image d'un cylindre $C'_i = B^{n-1}\times[0,\varepsilon,l_i]$, on définit une fonction $\tilde{f}$ sur l'intervalle $[0,l_i]$ par moyennation sur chaque boule B^{n-1}, c'est-à-dire que $\tilde{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_{n-1}}\int_{B^{n-1}} f(x,t)\mathrm{d}x$. On a alors, en utilisant le fait que plongement de C'_i dans Ω_ε est 1-lipschitzien,

$$|\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_{n-1}}\int_{B^{n-1}} |\mathrm{d}f|^2\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

On obtient ainsi une fonction $\tilde{f}$ sur Γ qui est C^1, qui coïncide avec f sur les sommets et qui vérifie $\varepsilon^{n-1}\omega_{n-1}\|\mathrm{d}\tilde{f}\|^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon}|\mathrm{d}f|^2 = Q(f)$. Comme sur le graphe, on a $\|\mathrm{d}\tilde{f}\|^2 \geq q(f)$, on obtient que $\liminf_{\varepsilon\to 0} Q(f)/|f|^2 \geq c^{n-1}q(f)/|f|^2_\Gamma$.

On a finalement montré que $Q(f)/|f|^2$ converge simplement vers $c^{n-1}q(f)/|f|^2_\Gamma$ quand $\varepsilon \to 0$. Comme on travaille sur des espaces de dimension finie, cela suffit pour assurer la convergence du spectre et des espaces propres des deux opérateurs. ■

4.3. Application à la prescription de spectre

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer le théorème 1.2. La méthode la plus directe serait d'utiliser le théorème 3.12 de convergence du spectre vers celui du bord et les résultats de prescription obtenus par Colin de Verdière dans [CdV87] (on peut les adapter de manière à prescrire la classe conforme). Cependant, cette méthode ne fonctionne que si la dimension du bord est au moins 3. On va donc procéder autrement en utilisant les plongements de graphes construits au paragraphe précédent.

Démonstration du théorème 1.2 : D'après le théorème 4.2, il existe un graphe complet Γ ayant le spectre voulu, avec la propriété de stabilité. On va transplanter ce spectre dans la variété M en commençant par traiter le cas $\rho = 1$.

On commence par déformer la variété M en respectant la classe conforme et de manière à pouvoir plonger isométriquement le graphe Γ dans M en plaçant les sommets sur ∂M. Comme la dimension de M est plus grande que 3, on peut le faire sans que les arêtes se croisent. On note g la métrique obtenue sur M.

A priori, la métrique au voisinage du plongement de Γ n'est pas euclidienne, on ne peut donc pas plonger isométriquement un ouvert Ω_ε (construit au paragraphe précédent) au voisinage de Γ. Cependant, pour tout ε on peut déformer (de manière non conforme) la métrique g en une métrique g_ε telle que les graphes soient toujours plongés isométriquement et que Γ possède un voisinage isométrique au domaine Ω_ε. On peut de plus faire en sorte que $\frac{1}{\tau_\varepsilon} g_\varepsilon \leq g \leq \tau_\varepsilon g_\varepsilon$, pour une famille de réels $\tau_\varepsilon > 1$ telle que $\tau_\varepsilon \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$.

On peut maintenant appliquer les résultats de convergence spectrale de la section précédente. Pour un $\delta > 0$ petit donné, on peut trouver un ε tel que le N-écart spectral entre Γ et Ω_ε soit inférieur à δ. En utilisant les arguments de la démonstration du théorème 3.12 (étape 2), on peut choisir ε suffisamment petit pour que le N-écart spectral entre $(\Omega_\varepsilon, g_\varepsilon)$ et (Ω_ε, g) soit inférieur à δ. Enfin, on peut faire converger le spectre de M vers celui de (Ω_ε, g) d'après le théorème 3.8, et en particulier déformer g de manière conforme de sorte que le N-écart spectral entre M et (Ω_ε, g) soit lui aussi inférieur à δ. On peut donc rentre le N-écart spectral entre M et Γ arbitrairement petit, et ce de manière conforme.

Traitons maintenant le cas où ρ varie. Quitte à multiplier les a_i par une constante, on peut supposer que $\rho \leq 1$. Il suffit d'ajouter une étape à la construction précédente et d'utiliser le théorème 3.6 pour faire tendre le spectre de la variété (M, ρ) vers celui de M sans densité. $\blacksquare$

5. Multiplicité en dimension 2

5.1. Lignes nodales des fonctions propres

On va montrer dans cette section les obstructions à la prescription de multiplicité en dimension 2 (théorème 1.5, 1.7 et 1.10). Comme dans le cas du laplacien, les deux principaux ingrédients sont le théorème nodal de Courant et le théorème de Cheng sur la structure local de l'ensemble nodal. Dans toute la suite du texte, les fonctions propres considérées seront les fonctions harmoniques sur M et pas leur restriction à ∂M. En particulier, les lignes et les domaines nodaux seront considérés sur M.

Avec ces précisions, le théorème nodal de Courant est valide pour les problèmes de Steklov et Steklov-Neumann, quel que soit la dimension :

Théorème 5.1. *Le nombre de domaines nodaux de la k-ième fonction propre du problème de Steklov (ou de Steklov-Neumann) est au plus égal à $k+1$.*

La démonstration (essentiellement la même que dans le cas du laplacien) est donnée dans [KS69] pour la dimension 2, et elle se généralise immédiatement en toute dimension.

Contrairement aux fonctions propres du laplacien, les fonctions propres de Steklov ont la particularité que leurs domaines nodaux rencontrent toujours le bord. Cette propriété a déjà été utilisée, par exemple dans [BKPS10], et nous y feront appel pour démontrer le théorème 1.7 :

Lemme 5.2. *Tout domaine nodal rencontre le bord de la variété. Dans le cas du problème de Steklov-Neumann, tout domaine nodal rencontre le bord de Steklov.*

Démonstration : Soit f une fonction harmonique non nulle et D un domaine nodal de f ne rencontrant pas le bord de Steklov de la variété. Comme f est harmonique et nulle sur le bord de D (ou vérifie la condition de Neumann le long du bord de Neumann de la variété), elle est uniformément nulle dans D. Par conséquent, elle est nulle partout. ∎

Dans [Ch76], S. Y. Cheng a décrit la structure locale de l'ensemble nodal des fonctions propres du laplacien en dimension 2. On peut les appliquer aux fonctions harmoniques, et le lemme qui précède permet de préciser certaines propriétés topologiques des domaines et des lignes nodales, en particulier leur incompressibilité (Une partie d'une surface est dite incompressible si son groupe fondamental s'injecte dans celui de la surface). L'énoncé qui suit rassemble ces résultats :

Théorème 5.3. *Supposons que M est de dimension 2. Si f est une fonction propre du problème de Steklov, alors :*

1. *Les domaines nodaux de f sont incompressibles.*
2. *L'ensemble nodal de f intérieur à M est la réunion d'un nombre fini de courbes C^2 qui sont soit des cercles immergés, soit des arcs immergés dont les extrémités sont sur ∂M.*
3. *La réunion de ces courbes forme un graphe fini dont les composantes connexes sont incompressibles.*
4. *Soit p un point intérieur à M. Si p est un point critique de f situé sur l'ensemble nodal et que l'ordre d'annulation de f en p est k, alors au voisinage de p l'ensemble nodal est la réunion de k courbes s'intersectant en p, de courbure géodésique nulle en p et formant un système équiangulaire (en particulier, les sommets du graphe nodal intérieur à M sont de degré pair).*
5. *Tout point du bord où f s'annule est l'extrémité d'une ligne nodale intérieure à M.*
6. *Chaque composante connexe du bord contient un nombre pair d'extrémités du graphe nodal.*
7. *Dans le cas du problème de Steklov-Neumann, si p est un point du bord de Neumann où f s'annule, l'ordre d'annulation k de f en p est fini et le point p est un zéro isolé en restriction à ∂M_N. Au voisinage de p dans M, l'ensemble nodal est la réunion de k arcs partant de p, de courbure géodésique nulle en p et dont l'extension par réflexion par rapport au bord forme un système équiangulaire.*

On appliquera en particulier les propriétés d'incompressibilité au cas du disque. On obtient alors :

Corollaire 5.4. *Si M est homéomorphe à un disque, alors les domaines nodaux sont homéomorphes à des disques et les composantes connexes du graphe nodal sont des arbres.*

Démonstration du théorème 5.3 : Comme $\Delta f = 0$ dans l'intérieur de M, on peut appliquer le résultat de S. Y. Cheng (théorème 2.5 de [Ch76]). En particulier, l'ensemble nodal est la réunion de courbes immergées (les lignes nodales) qui sont localement en nombre fini, cette réunion étant homéomorphe à un graphe localement fini. Cependant, comme l'intérieur de la surface n'est pas compact, on doit vérifier la finitude globale du graphe nodal, qui découle des deux points suivants :

(i) le nombre de lignes nodales est fini ;

(ii) les points d'intersection des lignes nodales sont en nombre fini.

Le point (i) se déduit du théorème de Courant : le nombre de domaines délimités par un ensemble de lignes nodales est au moins égal au nombre de ces lignes ; par conséquent le nombre total de lignes nodales est majoré par le nombre de domaines nodaux, en particulier il est fini. On montre le point (ii) à l'aide de la formule d'Euler-Poincaré appliquée à la surface : comme les domaines nodaux sont en nombre fini et que leur caractéristique d'Euler est majorée par 1, la caractérisque d'Euler du graphe nodal est minorée en fonction de la topologie de la surface et du nombre de domaines. Or, les sommets du graphe sont de deux types : d'une part les extrémités des lignes nodales, qui sont en nombre fini et de degré 1 ; d'autre part les intersections de lignes, qui sont de degré au moins 4. Si les sommets de degré 4 sont en nombre infini, la caractéristique d'Euler du graphe serait donc $-\infty$, ce qui contredit la formule d'Euler-Poincaré.

On en déduit de ce qui précède les points 2 et 4 du théorème et le fait que le graphe nodal est fini.

Soit D un domaine nodal et γ une courbe de D non contractile dans D. Si γ est contractile dans M, alors elle entoure un domaine nodal D' distinct de D. En outre, γ sépare D' de ∂M, ce qui contredit le lemme 5.2. Par conséquent, D est incompressible. Le même argument montre l'incompressibilité du graphe nodal. On obtient ainsi les points 1 et 3.

Montrons le point 5. Supposons que p est un point du bord qui n'est pas l'extrémité d'une ligne nodale. Le point p n'est donc pas situé à la frontière entre deux domaines nodaux, il est contenu dans un domaine nodal D sur lequel on supposera que f est positive. D'après le théorème d'unique prolongement 2.7 il n'y a pas de ligne nodale le long du bord, on peut donc trouver un petit voisinage U de p délimité par une courbe de niveau $f(x) = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ petit. En restriction à D, f est la première fonction propre du problème de Steklov-Dirichlet avec condition de Dirichlet sur les ligne nodales qui bordent D à l'intérieur de M. Or, si on définit la fonction test $\tilde{f}$ par $\tilde{f} = \varepsilon$ sur U et $\tilde{f} = f$ sur $D \backslash U$, le quotient de Rayleigh de $\tilde{f}$ est strictement plus petit que celui de f, ce qui contredit que f soit la première fonction propre sur D.

Le fait qu'un nombre pair de lignes nodales rejoigne chaque composante du bord découle du fait que le signe de la fonction propre change chaque fois qu'on traverse une ligne nodale.

Reste à traiter le cas du problème de Steklov-Neumann. On considère deux copies de la variété M qu'on recolle de manière symétrique le long du bord de Neumann et on note M' la surface obtenue. Comme le problème de Steklov est conformément invariant en dimension 2, on peut lisser la métrique le long du recollement de manière conforme et symétrique. Les fonctions propres sur M correspondent alors aux fonctions propres sur M' qui sont symétriques. On peut en particulier leur appliquer les résultats de Cheng (point 4). La symétrie de la fonction implique la symétrie des lignes nodales (sur M') au voisinage du bord de Neumann de M. On doit encore montrer que le bord de Neumann ne contient pas de ligne nodale : une fonction harmonique f sur M' est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe g (en munissant M' de la structure complexe induite par la structure conforme). Si f est une fonction propre symétrique, alors la condition de Neumann et l'équation de Cauchy-Riemann implique que $\mathrm{Im}(g)$ est constante le long du bord de Neumann de M. On peut choisir g de sorte que cette constante soit nulle, les zéros de f sur le bord de Neumann sont donc les zéros d'une fonction holomorphe. Par conséquent ils sont isolés.

■

Démonstration du corollaire 5.4 : Si M est un disque, l'incompressibilité des domaines nodaux implique qu'ils sont simplement connexes, donc que ce sont des disques.

Les composantes connexes du graphe nodal sont planaires, et leur incompressiblité signifie qu'ils sont sans cycle. Donc ce sont des arbres. ■

5.2. Bornes sur la multiplicité

On peut maintenant démontrer les théorèmes 1.5, 1.7 et 1.10. En ce qui concerne le théorème 1.5, on reprendra les arguments de [Ch76] et [Be80], qui sont moins précis que ceux de [Na88] mais plus faciles à adapter au problème de Steklov.

Démonstration du théorème 1.5 : Supposons que la surface M soit orientable. On note E_k l'espace propre associé à la valeur propre $\sigma_k(M)$ et m_k sa multiplicité. Selon [Be80], si $m_k > 4\gamma+2k+1$, il existe un point x dans l'intérieur de M et une fonction propre $f \in E_k$ telle que l'ordre d'annulation de f en x soit strictement supérieur à $2\gamma + k$. Localement, il existe donc au moins $4\gamma + 2k + 2$ arcs nodaux partant de p.

Si on « ferme » la surface en quotientant chaque composante du bord sur un point, tous les arcs nodaux se referment, et il existe donc au moins $2\gamma+k+1$ lacets distincts C^1 par morceaux dans l'ensemble nodal. Or, Cheng a montré ([Ch76], lemme 3.1) que ces lacets décomposent la surface en au moins $k + 2$

composantes connexes. La fonction f possède donc au moins $k+2$ domaines nodaux, ce qui contredit le théorème de Courant.

Comme dans [Be80], le cas des surfaces non orientables se traite par passage à un revêtement à deux feuillets. La surface obtenue en quotientant les bords est de caractéristique d'Euler $p = (1 - \chi(M) - l)$. Les arguments des [Be80] donnent alors la majoration $m_k \leq 4p + 4k + 3$. ∎

Démonstration du théorème 1.7 : On note E l'espace propre associé à la valeur propre $\sigma_i(M, \rho, g)$ pour $i = 1$ ou 2.

Soit p un point intérieur au disque. Si E est de dimension au moins 4, il existe une fonction propre non nulle $f \in E$ telle que f et $\mathrm{d}f$ soient nuls en p. Le point p est donc un sommet du graphe nodal de f et il en part au moins quatre arêtes. Comme le graphe nodal est un arbre dont les feuilles sont sur le bord, il délimite au moins quatre domaines nodaux. Il y a donc contradiction avec le théorème de Courant.

Supposons maintenant que $i = 1$ et que E soit de dimension 3. Si p_0 est un point du bord, le sous-espace des fonctions $f \in E$ telles que $f(p_0) = 0$ est de dimension au moins 2. Pour tout point p du bord distinct de p_0, il existe donc une fonction f_p, qu'on supposera de norme 1, telle que $f(p) = f(p_0) = 0$. Comme chacun de ces points est nécessairement l'extrémité d'un ligne nodale et que la fonction f_p a exactement deux domaines nodaux, p_0 et p sont les extrémités de l'unique ligne nodale de f_p.

Le bord est donc partagé en deux intervalles, I_p^+ et I_p^-, d'extrémités p_0 et p, sur lesquels la fonction f_p est respectivement positive et négative. En faisant tendre p vers p_0, on peut faire tendre la longueur de I_p^- vers 0. Comme les fonctions f_p sont normées et que E est de dimension finie, la famille f_p admet une limite f (quitte à extraire une sous-famille). La fonction f est alors positive ou nulle sur la totalité du bord, puisque l'évaluation en un point est une forme linéaire continue sur E. Par conséquent, f est de signe constant, ce qui est impossible puisque c'est une fonction propre de la valeur propre σ_1. ∎

Démonstration du théorème 1.10 : On note I une composante connexe du bord de Neumann $\partial\mathbb{D}_N$ et on choisit $k+1$ points distincts $x_1, \ldots, x_{k+1}$ dans I. Supposons que la multiplicité de $\sigma_k(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D}_S, \rho, g)$ soit supérieure ou égale à $k+2$. On peut alors trouver une fonction propre f associée à cette valeur propre qui s'annule en tous les points x_i, $i \in [1, k+1]$. En vertu du point 6 du théorème 5.3, chaque x_i appartient à une composante connexe du graphe nodal qui joint x_i à un point du bord de Steklov, ces composantes étant distinctes. L'ensemble nodal sépare donc $\mathbb{D}$ en au moins $k+2$ composantes connexes, ce qui contredit le théorème de Courant. ∎

Références

[Ag05] M. S. Agranovich – « On a mixed Poincaré-Steklov Type Spectral Problem in a Lipschitz Domain », *Russ. J. Math. Phys.*, 13 (3), p. 239–244, 2005.

[AM94] G. Alessandrini et R. Magnanini – « Elliptic equations in divergence form, geometric critical points of solutions, and Stekloff eigenfunctions », *SIAM J. Math. Anal.*, 25 (5), p. 1259–1268, 1994.

[Am03] B. Ammann – « A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue », *Differ. Geom. Appl.*, 18 (1), p. 21–32, 2003.

[Ba80] C. Bandle – *Isoperimetric inequalities and applications*, volume 7 de *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman, 1980.

[Be80] G. Besson – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier*, 30 (1), p. 109–128, 1980.

[BKPS10] R. Bañuelos, T. Kulczycki, I. Polterovich et B. Siudeja – « Eigenvalue inequalities for mixed Steklov problems », *Amer. Math. Soc. Transl.*, 231, p. 19–24, 2010.

[CdV86] Y. Colin de Verdière – « Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien », *Comment. Math. Helv.*, 61 (2), p. 254–270, 1986.

[CdV87] Y. Colin de Verdière – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), p. 99–615, 1987.

[CdV88] Y. Colin de Verdière – « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 184–193, 1988.

[CESG11] B. Colbois, A. El Soufi et A. Girouard – « Isoperimetric control of the Steklov spectrum », *J. Funct. Anal.*, 261 (5), p. 1384–1399, 2011, arXiv :1103.2863.

[Ch76] S. Y. Cheng – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.*, 51 (1), p. 43–55, 1976.

[Da05] M. Dahl – « Prescribing eigenvalues of the Dirac operator », *Manuscripta Math.*, 118 (2), p. 191–199, 2005, math.DG/0311172.

[ESI86] A. El Soufi et S. Ilias – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.

[FS11] A. Fraser et R. Schoen – « The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces », *Adv. Math.*, 226 (5), p. 4011–4030, 2011.

[FS12] A. Fraser et R. Schoen – « Eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball », prépublication, 2012, arXiv :1209.3789.

[Ha11] A. Hassannezhad – « Conformal upper bounds for the eigenvalues of the Laplacian and Steklov problem », *J. Funct. Anal.*, 261 (11), p. 3419–3436, 2011.

[HOMN99] T. Hoffmann-Ostenhof, P. W. Michor et N. Nadirashvili – « Bounds on the multiplicity of eigenvalues for fixed membranes », *Geom. Funct. Anal.*, 9 (6), p. 169—-1188, 1999.

[Ja07] P. Jammes – « Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.

[Ja08] P. Jammes – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, 83 (3), p. 521–537, 2008, math.DG/0601738.

[Ja09] P. Jammes – « Sur la multiplicité des valeurs propres d'une variété compacte », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 26, p. 1–11, 2009.

[Ja11] P. Jammes – « Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham », *Comment. Math. Helv.*, 86 (4), p. 967–984, 2011, arXiv :0804.0104.

[Ja12] P. Jammes – « Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Witten », *Trans. Amer. Math. Soc*, 364 (6), p. 2825–2845, 2012, arXiv :1003.5391.

[KK01] N. D. Kopachevsky et S. G. Krein – *Operator approach to linear problems of hydrodynamics, Vol 1 : Self-adjoint problems for an ideal fluid*, Birkaüser, 2001.

[KKM04] V. Kozlov, N. Kuznetsov et O. Motygin – « On the two-dimensional sloshing problem », *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460 (2049), p. 2587—-2603, 2004.

[KKP12] M. Karpukhin, G. Kokarev et I. Polterovich – « Multiplicity bounds for Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces », prépublication, 2012, arXiv :1209.4869.

[KS69] J. R. Kuttler et V. G. Sigillito – « An inequality of a Stekloff eigenvalue by the method of defect », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (2), p. 357—-360, 1969.

[Na88] N. Nadirashvili – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.*, 61 (1), p. 225–238, 1988.

[St99] W. Stekloff – « Sur l'existence des fonctions fondamentales », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 128 (1), p. 808–810, 1899.

[St02] W. Stekloff – « Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin) », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 19 (2), p. 455–490, 1902.

[Ta96a] M. Taylor – *Partial differential equations I*, Springer Verlag, 1996.

[Ta96b] M. Taylor – *Partial differential equations II*, Springer Verlag, 1996.

Pierre Jammes
Laboratoire J.-A. Dieudonné
Université Nice Sophia Antipolis — CNRS (UMR 7351)
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02, France
pjammes@unice.fr