Résumé de la thèse de Pierre Jammes

Titre : sur le spectre du laplacien des fibrés en tores qui s'effondrent.

Soutenue le 18 décembre 2003 en présence de B. Colbois (Neuchâtel), G. Courtois (École polytechnique), P. Ghanaat (Fribourg) et F. Sigrist (Neuchâtel).

Mots clefs : effondrements de variétés, laplacien, formes différentielles, petites valeurs propres.
MSC2000 : 58J50, 58C40

Contexte

B. Colbois et G. Courtois ont montré[1] qu'à diamètre et courbure bornés, la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les formes différentielles n'est pas uniformément minorée (ce qui contraste avec la cas du laplacien agissant sur les fonctions) et que si on se donne sur une variété une suite de métriques dont la courbure et le diamètre sont uniformément bornés et telle que la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les formes tende vers zéro (ce qu'on appelle une petite valeur propre) alors le volume de la variété — ou de manière équivalente son rayon d'injectivité — tend aussi vers zéro, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. Ces résultats soulèvent deux questions : si une variété s'effondre, admet-elle une (ou éventuellement plusieurs) petite valeur propres ? Peut-on donner une minoration explicite de la première valeur propre non nulle en fonction du volume ou du rayon d'injectivité de la variété ?

Certaines réponses à ces questions ont déjà été apportés. Un résultat de S. Chanillo et F. Trèves[2] permet d'obtenir une minoration très générale — indépendamment de la topologie — du spectre en focntion du rayon d'injectivité, mais elle n'est *a priori* pas optimale, en particulier en ce qui concerne son comportement asymptotique quand le rayon d'injectivité tend vers zéro. B. Colbois et G. Courtois ont étudié[3] la situation d'un fibré en cercle tendant vers sa base pour la distance de Gromov-Hausdorff et donnent dans ce cas un encadrement précis des valeurs propres tendant vers zéro en fonction de la métrique sur la base, de la topologie du fibré et de la géométrie de l'effondrement. Par ailleurs, dans le cas d'un effondrement quelconque, J. Lott donne une majoration du nombre de petites valeurs propres en fonction de la topologie[4].

Résultats

La 1^{re} partie de la thèse consiste en la recherche d'une réponse détaillée à la 1^{re} question dans des situations topologiques et géométriques particulières. Plus précisément, on considère des fibrés en tores sur le cercle ou le tore $\mathbb{T}^2$, construits comme quotients de groupes de Lie résolubles par des réseaux et munis de métriques invariantes, et on étudie le spectre du laplacien agissant sur les formes différentielles invariantes. Un des principaux résultats est la mise en évidence d'un phénomène nouveau, à savoir que le nombre de petites valeurs propres ne dépend pas uniquement de la topologie du fibré — contrairement au cas des fibrés en cercle — mais aussi de la géométrie de l'effondrement. En particulier, dans le cas des fibrés en tore sur le cercle, on montre que le nombre de petites valeurs propres pour les 1-formes différentielles peut, en fonction de la géométrie de l'effondrement, prendre n'importe quelle valeur inférieure à une borne (éventuellement nulle) déterminée par la topologie du fibré. Dans le cas des formes de degré quelconque, on donne une condition nécessaire à l'existence de petites valeurs propres qui est plus forte que celle donné par Lott pour cette situation topologique.

La 2^{nde} partie de la thèse est consacrée à la minoration du spectre du laplacien. Plus précisément, on cherche à généraliser dans la mesure du possible la minoration obtenue par Colbois et Courtois dans le cas des fibrés en cercle au cas des fibrés principaux en tores. On obtient que si M^n est un fibré principal en tore sur une base N et que son diamètre et sa courbure sectionnelle sont majorés respectivement par d et a, alors la première valeur propre du laplacien agissant sur les 1-formes est minorée quand le fibré s'effondre sur sa base par $c(n, a, d, N) \cdot \mathrm{Vol}(M)^2$, la valeur de l'exposant du volume dans cette estimation étant optimale.

---

[1] B. Colbois et G. Courtois . « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms ». *Manuscripta Mathematica*, 68, p. 143–160, 1990.

[2] S. Chanillo et F. Trèves. « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian ». *Journal of Differential Geometry*, 45 (2), p. 273–287, 1997.

[3] B. Colbois et G. Courtois. « Petites valeurs propres des p-formes différentielles et classe d'Euler des S^1-fibrés ». *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 33, p. 611–645, 2000.

[4] J. Lott. « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space ». *Duke Math. Journal*, 114, p. 267–306, 2002.