

ECOLE DOCTORALE

« SCIENCES FONDAMENTALES ET APPLIQUEES »

RAPPORT DE SOUTENANCE H.D.R.

Pierre Jammes a présenté ses travaux sur le spectre du Laplacien de Hodge sur les formes différentielles de manière à la fois concise et agréable. Il a choisi de parler de trois directions de recherche postérieures à sa thèse : géométrie conforme, spectre des variétés hyperboliques de dimension 3 et étude de la multiplicité des valeurs propres. Dans chacun des cas, il a exposé avec clarté l'état des connaissances et mis en perspective ses plus intéressants résultats.

Le jury reprend à son compte les conclusions des trois rapporteurs. Il souhaite insister sur l'appréciation unanime de ceux-ci quant à la cohérence et l'ampleur du corpus de résultats présentés.

Ses premiers travaux ont consisté à mettre en place une série d'exemples difficiles et profonds qui lui ont permis par la suite de développer une théorie riche et efficace.

Il s'est trouvé à l'avant-garde de la recherche dans ce sujet à tel point que ses travaux ont influencé ses concurrents. Pierre Jammes est sans doute aujourd'hui un des meilleurs spécialistes de géométrie spectrale.

La séance de questions a été l'occasion d'une discussion passionnante. Le jury a été impressionné par la profondeur de la réflexion de Pierre Jammes qui va au-delà de ses travaux. Un grand nombre de questions ouvertes sont dégagées dans le manuscrit dont certaines feront de beaux sujets de thèse.

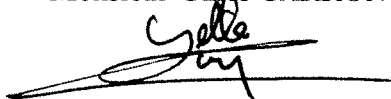
Pour toutes ces raisons, le jury pense que Pierre Jammes possède toutes les qualités pour être un excellent professeur des universités.

En conséquence, il lui décerne le diplôme d'habilitation à diriger des recherches.

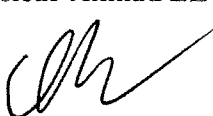
Fait à NICE , le 2 décembre 2011

Signatures des Membres du Jury :

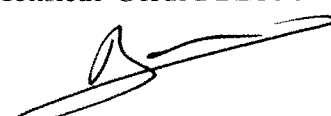
Monsieur Gilles CARRON



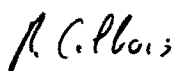
Monsieur Ahmad EL SOUFI



Monsieur Gérard BESSON



Monsieur Bruno COLBOIS



Monsieur Gilles COURTOIS



Monsieur Philippe DELANOË



Rapport sur le rapport d'Habilitation à Diriger les Recherches
de Pierre Jammes :
"Autour de la géométrie du laplacien de Hodge-de Rham".

Pierre Jammes est l'auteur de 10 publications dans des revues internationales à comité de lectures et d'un co-publication. Il a obtenu plusieurs résultats remarquables en géométrie spectrale et une version utile du théorème de la masse positive.

La géométrie spectrale s'attache à décrire les interactions entre la géométrie et le spectre d'opérateurs géométriques (laplacien sur les fonctions, laplacien de Hodge-deRham sur les formes différentielles, l'opérateur de Dirac...). Un exemple célèbre est l'inégalité de J. Cheeger : si (M, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n , on introduit sa constante de Cheeger

$$h(M, g) = \inf_{\Omega \subset M} \frac{\text{vol } \partial\Omega}{\min\{\text{vol } \Omega, \text{vol}(M \setminus \Omega)\}},$$

et alors l'inégalité de Cheeger est la suivante :

$$\frac{h^2}{4} \leq \lambda_1.$$

En fait suivant un travail pionnier de P. Buser, lorsque l'on dispose d'une borne inférieure sur la courbure de Ricci

$$\text{Ricci}_g \geq -\kappa^2 g$$

alors

$$\frac{h^2}{4} \leq \lambda_1 \leq c(n) (h^2 + \kappa h).$$

Ainsi la seule façon de produire des petites valeurs propres non nulles pour le laplacien en gardant une courbure de Ricci minorée est de séparer M en deux parties suivant une hypersurface de volume relatif assez petit.

L'étude du spectre de l'opérateur de Hodge-deRham est beaucoup plus complexe. La multiplicité de la valeur propre nulle est dictée par la topologie puisqu'elle est égale au nombre de Betti du degré concerné et ceci rend plus délicat l'étude de la première valeur propre non nulle. B. Colbois et G. Courtois¹ ont remarqué qu'un argument de compacité permet d'obtenir une minoration de la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-deRham en fonction de bornes sur les courbures sectionnelles, sur le diamètre et d'une minoration du volume. Cependant des bornes explicites sont très difficiles à obtenir. Cela n'a été fait que très récemment par T. Mantuano². Afin de comprendre cette dépendance, on étudie le spectre d'une suite de variétés compactes (M_i^n, g_i) qui s'effondre ($\text{vol}(M_i, g_i) \rightarrow 0$) lorsque les courbures et le diamètre restent bornés. Grâce aux travaux de Cheeger-Gromov, Fukaya et Cheeger-Fukaya-Gromov, on connaît assez bien la géométrie d'une telle suite et la description générale du comportement du spectre du Laplacien de Hodge-deRham a été établie par J. Lott³. L'intuition de J. Lott avait été guidée par les travaux de K. Fukaya qui avait étudié le cas du laplacien sur les fonctions⁴, de B. Colbois et

1. A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p -form, *Manuscripta mathematica*, 68 (1990) p. 143–160.

2. Discretization of Riemannian manifolds applied to the Hodge Laplacian, *Amer. J. Math.* 130 no 6 (2008), p. 1477–1508

3. Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space, *Duke Math. Journal*, 114 (2002), p. 267–306.

4. Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* 87, (1987) 517–547.

G. Courtois⁵ qui avait traité le cas où la suite (M_i, g_i) converge au sens Gromov-Hausdorff vers une variété de dimension $n - 1$ et enfin par un travail remarquable de P. Jammes⁶. Dans cet article, P. Jammes étudie le cas d'un fibré en tores plats au dessus d'un cercle et décrit les petites valeurs propres qui y apparaissent. C'est un travail très riche qui contient une large palette de comportements. En particulier, il permet de trouver un contre-exemple à une minoration explicite de la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-deRham due à Chanillo-Trèves.

Si on veut comprendre la dépendance en le diamètre de la minoration de la première valeur propre non nulle du laplacien de Hodge-deRham, on doit étudier des familles de variétés où le volume est fixé, la courbure reste bornée mais où le diamètre tend vers l'infini. Un tel phénomène se produit lorsque l'on remplit les pointes d'une variété hyperbolique de dimension 3 et de volume fini à l'aide de remplissages de Dehn. Il y a une difficulté liée au fait qu'en degré 1, le spectre essentiel du laplacien de Hodge-deRham d'une variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini est la demi droite $\mathbb{R}_+$. On s'attend donc à ce que le spectre remplisse $\mathbb{R}_+$ à mesure que le diamètre tend vers l'infini. Ceci a été précisé par Dodziuk et McGowan⁷ mais ces auteurs n'avaient pas obtenu de minoration explicite de la première valeur propre non nulle et c'est ce que P. Jammes a récemment réussi à faire⁸. La preuve reprend et améliore dans ce cadre un lemme fameux du à Mc Gowan. Ceci permet à P. Jammes de suivre avec des estimées la construction d'une primitive d'une forme exacte lorsque l'on suit la suite exacte de Mayer-Vietoris reliant la cohomologie des parties minces et épaisses de la variété. Je trouve cette amélioration astucieuse, intéressante et sûrement utile pour obtenir d'autres minorations.

Un autre aspect de la géométrie spectrale exploré par P. Jammes est celui de la prescription du début du spectre de l'opérateur de Hodge-deRham. On connaît en dimension 2 des restrictions sur les petites valeurs propres du laplacien sur les fonctions (résultat sur la multiplicité de Cheng) et grâce à un résultat fondateur de Y. Colin de Verdière⁹, on sait qu'en dimension supérieure, on peut prescrire les premières valeurs propres non nulles du laplacien sur les fonctions. C'est à dire étant données une variété compacte $M^{n>2}$ et une suite finie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\ell$, il y a une métrique riemannienne g sur M^n dont le spectre commence par cette suite finie. P. Jammes s'est attaché à prescrire le début du spectre non nul du laplacien de Hodge-deRham. Il est arrivé à un résultat quasiment définitif à ce sujet en démontrant qu'en dimension plus grande que 6 on peut prescrire simultanément le volume et le début des spectres coexactes sur les p -formes pour $p \in [1, (n - 3)/2]$ avec la restriction que la première valeur propre sur les 1-formes soit simple. Mais je voudrais aussi mentionner un joli travail préliminaire où il prescrit de la multiplicité double à l'aide d'un joli argument topologique basé sur la phase de Berry.

On doit également à P. Jammes une preuve de la masse positive pour les variétés localement conformément plate de dimension paire. Cette preuve reprend des arguments de E. Witten mais elle est valide sans l'hypothèse topologique que la variété soit spin. En fait le théorème de la masse positive était connu pour les variétés localement conformément

5. Petites valeurs propres des p -formes différentielles et classe d'Euler des $\mathbb{S}^1$ fibrés, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 33 (5) (2000), 611–645.

6. Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent, *Manuscripta Math.*, 110 (1), (2003), 13–31.

7. The Spectrum of the Hodge Laplacian for a Degenerating Family of Hyperbolic Three Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347 (6), (1995) 1981–1995.

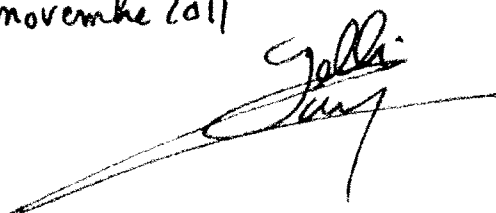
8. Minoration du spectre des variétés hyperboliques de dimension 3, *Bull. Soc. math. France*, à paraître, 2010.

9. Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), (1987) 599–615.

plate grâce à un travail de Schoen et Yau¹⁰ mais en fait la preuve de Schoen et Yau utilise deux arguments différents selon que la dimension est plus grande ou plus petite que 7. La preuve de P. Jammes est beaucoup plus simple et de plus elle s'adapte immédiatement au cas des variétés complètes non compactes, cadre où aucun théorème général de la masse positive n'est connu. J'ai d'ailleurs récemment utilisé ce résultat de P. Jammes afin d'élargir la généralité d'un résultat que j'avais démontré (une classification des variétés complètes à courbure scalaire positive dont l'invariant de Yamabe est celui de la sphère).

En conclusion, P. Jammes présente un ensemble cohérent de travaux en géométrie spectrale qui démontre une vision claire du sujet. Son mémoire est très bien présenté, agréable à lire et ponctué de nombreuses questions intéressantes qui ont matière à fournir des sujets de thèse et des développements passionnants. Sa preuve du théorème de la masse positive illustre la curiosité scientifique de P. Jammes qui va bien au delà de la géométrie spectrale. Je suis donc naturellement très favorable à la soutenance de l'Habilitation à Diriger les Recherches de Pierre Jammes.

Le 2 novembre 2011



Gilles Carron
Université de Nantes,
Gilles.Carron@univ-nantes.fr

10. Proof of the positive mass theorem. II. *Comm. Math. Phys.* **79** (1981), no. 2, 231–260 et Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature. *Invent. Math.* **92** (1988), no. 1, 47–71.

Rapport sur le mémoire présenté par
Pierre JAMMES
en vue de l'habilitation à diriger des recherches

Ce mémoire d'habilitation est constitué d'un ensemble de travaux relevant de plusieurs thématiques de géométrie spectrale des variétés riemanniennes compactes. L'opérateur de Hodge-de Rham Δ^p agissant sur les formes différentielles de degré p est un objet central d'étude. Les principales questions étudiées pour cet opérateur sont :

- l'existence de “petites valeurs propres” et l'exploration des situations géométriques pouvant y donner lieu ;
- les questions de multiplicité et de prescription d'une partie finie du spectre ;
- les bornes conformes sur le spectre.

Dans un travail récent, Pierre Jammes s'est également intéressé au théorème de la masse positive et en a donné une preuve à la Ammann-Humbert sur les variétés de dimension paire qui utilise le laplacien de Hodge-de Rham en degré médian en lieu et place de l'opérateur de Dirac.

Petites valeurs propres

Il s'agit de comprendre si des contraintes géométriques sont oui ou non compatibles avec l'existence de valeurs propres non nulles arbitrairement proches de zéro. L'approche de ce problème consiste à chercher sur une variété différentiable compacte donnée M , une famille à un paramètre de métriques g_ε vérifiant lesdites contraintes géométriques et telle que $\lambda_{p,k}(g_\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε . Dans tout ce rapport, nous noterons $\lambda_{p,k}(g)$ la k -ème valeur propre non nulle de l'opérateur de Hodge-de Rham associé à la métrique g , agissant sur les formes différentielles de degré p .

Ce problème est bien compris dans le cas $p = 0$, i.e. celui du laplacien sur les fonctions, depuis les travaux de Cheeger et de Buser. L'existence de petites valeurs propres est essentiellement liée à la possibilité de partitionner la variété M en deux domaines dont le périmètre commun est faible relativement au volume de chacun d'eux. Par ailleurs, il n'existe pas de petites valeurs propres sous les contraintes de courbure de Ricci minorée et de diamètre majoré.

La situation est beaucoup moins claire en degré supérieur. Colbois et Courtois ont montré d'une part que, contrairement au cas $p = 0$, l'existence

de petites valeurs propres peut avoir lieu à diamètre et courbure sectionnelle bornés, et, d'autre part, que ce phénomène ne peut se produire que si le rayon d'injectivité tend vers zéro, c'est à dire lorsqu'il y a effondrement.

La question qui se pose alors naturellement est celle de la réciproque : quels sont les effondrements qui donnent lieu à de petites valeurs propres ?

Les premiers travaux de Pierre Jammes apportent des réponses significatives à cette question. Faisant suite à des résultats de Colbois-Courtois et de Lott qui montrent l'influence de la cohomologie de l'espace limite de l'effondrement sur l'existence et le nombre de petites valeurs propres, les travaux de Jammes mettent en évidence le rôle joué par la géométrie de l'effondrement. Il considère d'abord le cas d'un fibré en tores qui s'effondre sur sa base à diamètre et courbure bornés et montre que différentes situations peuvent se produire en fonction de la géométrie de l'effondrement. Plus récemment, il a étudié le cas d'un effondrement adiabatique (M, g_ε) associé à un flot riemannien $\mathcal{F}$ sur (M, g) , i.e. $g_\varepsilon = g_V \oplus \varepsilon^2 g_H$. Il montre que l'existence de petites valeurs propres est déterminée par la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$. Plus précisément, le nombre de petites valeurs propres est donné par la formule

$$m_p = \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H^{n-p}(M/\mathcal{F}) - b_p(M).$$

Une particularité importante de ce résultat est que, par comparaison au cas des fibrés en cercles étudié par Colbois et Courtois, ce n'est pas la cohomologie de l'espace limite qui donne lieu aux petites valeurs propres, mais celle de la structure transverse du flot. Une conséquence de ce lien entre petites valeurs propres et cohomologie basique est un critère spectral pour la nullité de la classe d'Alvarez et la non nullité de la classe d'Euler du flot.

Le fait qu'à courbure et diamètre bornés, le rayon d'injectivité tende vers zéro avec la première valeur propre non nulle, suggère la possibilité de minorer cette valeur propre en fonction du rayon d'injectivité, en plus de la courbure et du diamètre. C'est ce que Chanillo et Trèves ont tenté de démontrer en publiant un résultat dont la preuve s'est avéré incorrecte. En fait, Jammes démontre même que le résultat tel que énoncé par Chanillo et Trèves n'est pas vraie en général. Pour cela il construit pour tout entier $k \geq 1$ et toute variété compacte N telle que $b_2(N) \geq k$, un fibré (M, g_ε) en tores T^k au dessus de N qui s'effondre sur sa base et tel que $\lambda_{1,1}(g_\varepsilon)$ et $\lambda_{2,1}(g_\varepsilon)$ tendent vers zéro plus vite que $\text{inj}(g_\varepsilon)^{2k}$.

Par ailleurs, P. Jammes obtient pour une classe de variétés à diamètre et courbure bornés, une minoration du $\lambda_{1,1}$ par le carré du volume, ce qui entraîne une minoration par le rayon d'injectivité. Ce résultat rend plausible de conjecturer une minoration analogue de $\lambda_{p,1}$ par le carré du volume sur des classes générales de variétés à diamètre et courbure bornés.

Dans un travail récent, P. Jammes étudie ce problème de petites valeurs propres dans le cadre de la géométrie hyperbolique en dimension 2 et 3.

Multiplicité des valeurs propres et prescription d'une partie finie du spectre

Dans le cas $p = 0$, il est bien connu que la multiplicité des valeurs propres du laplacien sur une surface compacte est majorée en fonction du genre de la surface alors qu'elle peut être arbitrairement grande en dimension 3 ou plus. D'après les résultats fondamentaux de Y. Colin de Verdière, nous savons même que sur une variété M de dimension $n \geq 3$, toute famille finie non décroissante de nombres positifs est le début du spectre du laplacien d'une métrique riemannienne sur M . En dimension 2, la même conclusion vaut pour les familles strictement croissantes (i.e. prescription sans multiplicité). Par la suite, Lohkamp a montré qu'il était possible de prescrire, en même temps que le début du spectre, plusieurs autres invariants riemanniens globaux tel que le volume.

Une partie conséquente du travail de recherche de P. Jammes consiste à étendre les résultats de Colin de Verdière et de Lohkamp au cas du laplacien de Hodge-de Rham. Il montre en particulier que sur toute variété compacte orientable de dimension $n \geq 6$, il est possible de prescrire simultanément et de manière arbitraire le début du spectre du laplacien de Hodge-de Rham en degré $p \in [2, \frac{n-3}{2}]$ et le volume. Un résultat similaire est également établi pour le laplacien de Witten (une sorte laplacien de Hodge-de Rham perturbé). Bien que la stratégie de la preuve soit semblable à celle de Colin de Verdière, il est appréciable que Jammes ait réussi à s'appropriier les techniques de Colin de Verdière et les adapter au cas plus abstrait du laplacien de Hodge-de Rham.

Une autre contribution originale de Pierre Jammes à cette thématique est un théorème qui montre la possibilité de prescrire sur toute variété compacte de dimension $n \geq 5$ et dans une classe conforme fixée, le début du spectre, sans multiplicité, du laplacien de Hodge-de Rham pour tous les degrés $p \in [2, \frac{n-3}{2}]$ simultanément, ainsi que le volume. Ce résultat englobe les résultats antérieurs montrant que dans une classe conforme donnée, il n'est pas possible de majorer (ni de minorer) les valeurs propres en fonction du volume en degré $p \in [2, \frac{n-3}{2}]$, et ce contrairement à ce qui se passe en degré zéro. Le problème reste cependant ouvert en degré 1 et en degré médian $\frac{n}{2}$ pour les variétés de dimension paire.

Bornes conformes

Si C est une classe conforme de métriques riemanniennes de volume 1 sur une variété compacte M , alors les valeurs propres du laplacien scalaire ($p = 0$) sont uniformément bornées sur C . De plus, la première valeur est majorée par le volume conforme $V_c(M, C)$ introduit par Li et Yau. Ceci conduit à introduire deux invariants différentiables de la variété M , l'un spectral l'autre volumique (dit volume de Moëbius) :

$$\nu_1(M) = \inf_C \sup_{g \in C} \lambda_{0,1}(M, g) \quad \text{et} \quad V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_C V_c(M, C)$$

où l'infimum est pris sur toutes les classes conformes de métriques de volume 1 sur M . Ces deux invariants sont reliés par l'inégalité $\nu_1(M) \leq n V_{\mathcal{M}}(M)^{\frac{2}{n}}$ où l'égalité a lieu lorsque M est la sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n .

L'invariant $\nu_1(M)$ a été étudié par plusieurs auteurs et nous savons qu'il est minoré par $\nu_1(\mathbb{S}^n)$. Pierre Jammes a étudié le comportement de $V_{\mathcal{M}}(M)$ quand on pratique des chirurgies sur la variété. Comme toute variété de dimension n s'obtient par un nombre fini de chirurgies à partir d'un nombre fini d'espaces modèles, cela lui permet de déduire une borne supérieure de $V_{\mathcal{M}}(M)$ qui ne dépend que de la dimension. Par conséquent, l'invariant $\nu_1(M)$ est encadré par deux constantes qui ne dépendent que de la dimension.

Ces résultats sont à comparer avec ceux obtenus par plusieurs auteurs sur les invariants différentiels définis de manière analogue à $\nu_1(M)$ mais en remplaçant le laplacien par le laplacien conforme (i.e. le laplacien pénalisé par la courbure scalaire) ou l'opérateur de Dirac.

En rapport avec ces résultats, P. Jammes montre en collaboration avec B. Ammann, que la première valeur propre strictement positive du laplacien conforme n'est bornée supérieurement sur aucune classe conforme de métriques de volume 1. Ils font de même pour l'opérateur de Dirac ainsi que tout opérateur elliptique conformément covariant qui vérifie une propriété d'invariance sur les cylindres.

Le cas de l'opérateur de Hodge-de Rham agissant sur les formes différentielles de degré $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est particulièrement intéressant car présente un comportement qui contraste avec celui du laplacien sur les fonctions. P. Jammes montre par exemple que la première valeur propre de cet opérateur est minorée sur toute classe conforme C de métriques de volume 1. De plus, il donne une condition nécessaire pour que l'infimum sur C de la première valeur propre soit atteint par une métrique lisse. Il est assez surprenant de noter que cette condition n'est par exemple jamais réalisée en dimension 4 lorsque la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété est non nulle. Par ailleurs, P. Jammes montre que l'infimum de la k -ème valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham en

degré $[\frac{n}{2}]$ sur C est majoré par celui de la sphère munie de sa classe conforme canonique.

Conclusion

Les travaux de Pierre Jammes comportent un ensemble de résultats profonds qui constituent une contribution substantielle à la géométrie spectrale. Ils s'inscrivent clairement dans le cadre d'un véritable programme de recherche cohérent et ambitieux, que l'auteur mène à bien avec succès. Ses travaux récents sur la masse positive et le volume de Moëbius mettent en évidence le large spectre de compétences qu'il a acquises sur les outils topologiques et analytiques en géométrie riemannienne.

Pierre Jammes s'est imposé comme un spécialiste reconnu de géométrie spectrale. Il a acquis une expertise de tout premier plan sur les propriétés spectrales du laplacien de Hodge-de Rham. L'œuvre scientifique qu'il a accompli justifie pleinement que Pierre Jammes soit habilité à diriger des recherches.

Tours le 07 novembre 2011

Ahmad El Soufi

October 10, 2011

John Lott
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720-3840

Report on the manuscript “Autour de la géométrie du laplacien de Hodge-de Rham” by Pierre Jammes

This habilitation thesis is a comprehensive body of work on spectral geometry. I discuss below two main topics of the habilitation thesis, namely small eigenvalues of the differential form Laplacian, and extremizing the smallest positive eigenvalue of the Laplacian within a conformal class. There are other interesting results contained in the habilitation thesis concerning multiplicities of eigenvalues, and a new approach to the Yamabe problem.

Small eigenvalues of the differential form Laplacian :

There has been much work on estimating the spectrum of the scalar Laplacian, on a compact Riemannian manifold, in terms of the geometry. A natural question is how to extend this work to the spectrum of the differential form Laplacian. The interest here is that the dimension of the kernel of the p -form Laplacian is topological in nature, so one can wonder how topology affects the rest of the spectrum.

It is not hard to see that there is a number $C(K, D, V, n, p) > 0$ so that if an n -dimensional Riemannian manifold has geometric bounds of the form $|Riem| \leq K$, $diam \leq D$ and $vol \geq V$, then the k -th positive eigenvalue of the p -form Laplacian is bounded below by $C(K, D, V, n, p)$. For the scalar Laplacian, i.e. when $p = 0$, one can dispense with the lower volume bound. However, examples of Colbois and Courtois show that for $p > 0$, one can have arbitrarily small positive eigenvalues of the p -form Laplacian in the collapsing case, i.e. when the volume goes to zero, for given curvature and diameter bounds.

One wants to understand what governs the existence of small positive eigenvalues of the p -form Laplacian. Pierre Jammes and I did some independent but related work on this question. My results were in terms of the cohomology of a certain flat superconnection that appears in the collapsing limit. Pierre Jammes was looking at the important case of torus bundles. There was some overlap in our results. For example, in the case of a torus bundle over a circle, we both showed that there are no small positive eigenvalues if the holonomy of the torus bundle is semisimple. However, Pierre Jammes obtained more refined results. He showed that for torus bundles, the smallest positive eigenvalue of the 1-form Laplacian can be estimated from below in terms of the square of the volume, but

cannot be estimated from below in terms of the square of the injectivity radius. (Again, one is assuming curvature and diameter bounds.) These are very good results. The proof of the second statement involves collapsing a T^2 -bundle in the direction of an irrational angle on the tori, in which case the diophantine properties of the angle plays a role.

As a nice application of these ideas, Pierre Jammes estimated the smallest positive eigenvalue of the 1-form Laplacian on a compact hyperbolic 3-dimensional manifold. The answer is in terms of the diameter, the volume and the number of connected components of the thin part of the manifold, in the sense of Margulis.

Extremizing the smallest positive eigenvalue of the Laplacian, within a conformal class

It is known that one cannot control the smallest positive eigenvalue λ_1 of the scalar Laplacian just in terms of the volume V . However, in a fixed conformal class, Korevaar and then Friedlander-Nadirashvili showed that the scale-invariant quantity $\lambda_1 V^{2/n}$ is bounded above, where n is the dimension. Friedlander-Nadirashvili defined a smooth topological invariant $\nu_1(M)$ of a closed manifold M by taking the infimum over all conformal classes of the above supremum, and showed that it is positive. That is, for any $\epsilon > 0$ and any Riemannian metric g on M , there is a conformally related metric g' for which $\lambda_1 V^{2/n} \geq \nu_1(M) - \epsilon$. The invariant ν_1 is only known for S^2 , RP^2 , T^2 and the Klein bottle.

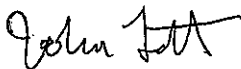
Pierre Jammes showed that there is a number $c(n) < \infty$ so that for all closed n -dimensional manifolds M , one has $\nu_1(M) \leq c(n)$. The proof is very innovative and uses the Li-Yau conformal volume, along with surgery arguments.

Pierre Jammes has done related work about the eigenvalues of the Dirac operator and the differential form Laplacian, when restricted to a conformal class. For example, in work with Ammann, he showed that for any conformal class on a closed spin manifold of dimension greater than one, the supremum of $\lambda_1(D)V^{\frac{1}{n}}$ is infinite. Here $\lambda_1(D)$ is the smallest positive eigenvalue of the Dirac operator.

In summary, Pierre Jammes has produced an impressive body of results. His papers follow a coherent path of thought from his first paper to his latest preprints. The originality of his work is evident.

The habilitation thesis of Pierre Jammes is very carefully written. Numerous interesting open questions are presented, which indicate research directions for him and his future doctoral students. I strongly recommend that this thesis be approved for the degree Habilitation à Diriger les Recherches.

Yours truly,



John Lott
Professor of Mathematics
University of California - Berkeley