SPECTRE ET GÉOMÉTRIE CONFORME DES VARIÉTÉS COMPACTES À BORD

par

Pierre Jammes

Résumé.— On montre que sur toute variété compacte M^n à bord, il existe une classe conforme C telle que pour toute métrique $g \in C$ de volume 1, la première valeur propre non nulle du laplacien de Neumann vérifie $\lambda_1(M^n, g) < n \operatorname{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$. On montre une majoration analogue pour la première valeur propre non nulle de Steklov. La démonstration est basée sur une décomposition en anse de la variété. On montre aussi que le volume conforme de (M, C), l'invariant de Friedlander-Nadirashvili et le volume de Möbius de M sont ceux de la sphère (S^n, g_{can}). Si M est un domaine euclidien, hyperbolique ou sphérique, alors C est la classe conforme de la métrique canonique.

Mots-clefs : première valeur propre de Neumann et de Steklov, volume conforme.

Abstract.— We prove that on any compact manifold M^n with boundary, there exist a conformal class C such that for any riemannian metric $g \in C$ of unit volume, the first positive eigenvalue of the Neumann Laplacian satisfies $\lambda_1(M^n, g) < n \operatorname{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{2/n}$. We also prove a similar inequality for the first positive Steklov eigenvalue. The proof relies on a handle decomposition of the manifold. We also prove that the conformal volume of (M, C) is $\operatorname{Vol}(S^n, g_{\text{can}})$, and that the Friedlander-Nadirashvili and the Möbius volume of M are equal to those of the sphere. If M is a domain in a space form, C is the conformal class of the canonical metric.

Keywords : first Neumann and Steklov eigenvalue, conformal volume.

MSC2010 : 35P15, 58J50

1. Introduction

Considérons une variété riemannienne compacte (M^n, g), avec ou sans bord, et notons $\lambda_1(M, g) > 0$ la première valeur propre non nulle du laplacien sur M, en posant les condition de Neumann s'il y a un bord. Il découle des travaux de J. Hersch [**He70**] que sur la sphère de dimension 2, on a

$$\lambda_1(S^2, g) \operatorname{Vol}(S^2, g) \leq 8\pi, \tag{1.1}$$

l'égalité ayant lieu pour la métrique canonique. Mais on sait que cette inégalité ne s'étend pas aux autres surfaces closes (les premiers exemples ont été donnés par P. Buser [**Bu84**]. Voir aussi [**BM01**] et les références qui y sont données) On sait que la borne supérieure de $\lambda_1(M^2, g)\operatorname{Vol}(M^2, g)$ vaut 12π sur le plan projectif ([**LY82**]), $8\pi^2/\sqrt{3}$ sur le tore ([**Na96**], [**Gi09**]), que sur la bouteille de Klein elle s'exprime en fonction d'une intégrale elliptique ([**JNP06**], [**ESGJ06**]), et qu'elle vaut 16π sur la surface orientable de genre 2 ([**JLN$^+$05**], [**Ka13**]). On peut en déduire facilement à l'aide de [**CES03**] que cette borne supérieure est minorée par 12π sur les surfaces closes autres que la sphère. En dimension supérieure ou égale à 3, on sait que $\lambda_1(M^n, g)\operatorname{Vol}(M^n, g)^{2/n}$ n'est pas borné (voir [**Ta79**], [**Mu80**], [**CD94**]).

Récemment, G. Kokarev et N. Nadirashvili ont donné une généralisation de l'inégalité de Hersch sur les surfaces orientables à bord sous des hypothèses conformes. Si g est une métrique sur M, la classe conforme de g est définie par $[g] = \{hg, h \in C^\infty, h > 0\}$.

Théorème 1.1 ([**KN10**]). — *Soit M^2 une surface orientable compacte à bord. Il existe une classe conforme C sur M^2 telle que pour toute métrique $g \in C$, on a $\lambda_1(M^2, g)\operatorname{Vol}(M^2, g) \leq 8\pi$.*

Le but de cet article est de démontrer une généralisation de ce résultat aux variétés compactes à bord (orientables ou non) de dimension quelconque. On va aussi montrer un énoncé du même type pour la première valeur propre du spectre de Steklov. Rappelons que si $\rho \in C^\infty(\partial M)$ est une fonction positive sur le bord de M, le spectre de Steklov est la suite $0 = \sigma_0(M, g, \rho) < \sigma_1(M, g, \rho) \leq \sigma_2(M, g, \rho) \dots$ des réels σ pour lesquels le problème de Steklov, défini par les équations $\Delta f = 0$ dans M et $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma\rho f$ sur ∂M, admet une solution non nulle (voir le paragraphe 2.2 pour plus de détails).

Théorème 1.2. — *Soit M^n une variété compacte à bord de dimension $n \geq 2$. Il existe une classe conforme C sur M^n telle que pour toute métrique $g \in C$,*

$$\lambda_1(M, g)\operatorname{Vol}(M, g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n} \tag{1.2}$$

et

$$\sigma_1(M, g, \rho)\mathcal{M}(\partial M)\operatorname{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} < n\omega_n^{2/n}, \tag{1.3}$$

où $\omega_n = \operatorname{Vol}(S^n, g_{can})$ et $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho \, \mathrm{d}v_g$ désigne la masse totale de la densité ρ.

Si M est un domaine euclidien, sphérique ou hyperbolique, alors ces inégalités sont vraies pour la classe conforme de la métrique canonique.

Remarque 1.3. — L'inégalité (1.2) est optimale : on peut assez facilement faire tendre la première valeur propre vers celle de la sphère à volume fixée dans une classe conforme donnée quelconque, et donc $\sup_{g \in C} \lambda_1(M, g)\operatorname{Vol}(M, g)^{2/n} \geq$

$n\omega_n^{2/n}$ en général (la démonstation donnée dans [**CES03**] pour les variétés closes s'applique aussi aux variétés à bord). La situation est différente pour l'inégalité (1.3). Par exemple, selon l'inégalité de Weinstock [**We54**], qui est un analogue de l'inégalité de Hersch pour le problème de Steklov, on a $\sigma_1(M,g,\rho)\mathcal{M}(\partial M) \leq 2\pi$ si M est homéomorphe à un disque.

Remarque 1.4. — Le théorème 1.2 contraste fortement avec les résultats obtenus récemment par R. Petrides sur les variétés closes. En effet, il montre dans [**Pe13a**] et [**Pe13b**] que pour toute classe conforme C sur une variété close M^n, on a $\sup_{g\in C} \lambda_1(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{2/n} > n\omega_n^{2/n}$, sauf si (M^n, C) est conformément équivalente à la sphère ronde.

Remarque 1.5. — En dimension 2, l'inégalité (1.2) améliore celle de Kokarev et Nadirashvili sur deux points : elle est stricte et on n'a pas besoin de supposer que la surface est orientable.

Remarque 1.6. — Si M est un domaine de $\mathbb{R}^n$, S^n ou H^n, on obtient un majoration de $\lambda_1(M,g)$ en fonction du volume qui est plus faible que celles de Szegö-Weinberger ou de Ashbaugh-Benguria [**AB95**] mais qui vaut pour toute métrique conforme. Dans ce contexte, on peut interpréter l'inégalité (1.2) comme une inégalité de Szegö-Weinberger conforme. Par ailleurs, Colbois, El Soufi et Girouard on donné dans [**CESG11**] une majoration de $\sigma_k(M)\mathcal{M}(\partial M)\operatorname{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}}$ sur les domaines de $\mathbb{R}^n$, S^n ou H^n qui ne dépend que de n et k. La majoration (1.3) ne vaut que pour $k=1$, mais elle a l'avantage d'être plus explicite et conformément invariante.

L'inégalité (1.2) est spécifique à la condition de Neumann. Avec la condition de Dirichlet, on peut faire tendre la première valeur propre vers l'infini dans un classe conforme à volume fixé :

Théorème 1.7. — *Soit M^n une variété compacte à bord de dimension $n \geq 2$. Pour toute classe conforme C sur M^n, on a*

$$\sup_{g\in C} \lambda_1^D(M^n,g)\operatorname{Vol}(M^n,g)^{2/n} = +\infty$$

où $\lambda_1^D(M^n,g)$ désigne la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet.

On montrera en fait ce résultat pour le laplacien agissant sur les formes différentielles de degré $p \geq 2$, le laplacien de Neumann correspondant au cas $p=0$ et le laplacien de Dirichlet au cas $p=n$.

Comme l'article [**KN10**] utilise des techniques spécifiques à la dimension 2 (invariance conforme de la norme L^2 du gradient, fonctions méromorphes sur des courbes hyperelliptiques), la généralisation du théorème 1.1 en grande dimension peut surprendre. Le principe de la démonstration, déjà utilisé dans [**Ja08**], est de faire appel à la théorie du volume conforme développée dans [**LY82**] et [**ESI86**]

et d'utiliser une décomposition en anses de la variété. Dans le cas du spectre de Steklov, on passera par l'intermédiaire du volume conforme relatif introduit par A. Fraser et R.Schoen dans [**FS11**].

La même technique va nous permettre de calculer certains invariants des variétés compactes à bord. Rappelons d'abord quelques définitions. Le volume conforme est un invariant conforme des variétés compactes défini par

$$V_c(M,[g]) = \inf_{\substack{m\geq 1\\ \varphi:(M,[g])\hookrightarrow S^m}} \sup_{\gamma\in G_m} \mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M)), \tag{1.4}$$

l'application φ parcourant l'ensemble des immersions conformes de $(M,[g])$ dans S^m, et G_m désignant le groupe de Möbius de dimension m, c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes conformes de S^m. Nous utiliserons le fait que le volume conforme permet de majorer la première valeur propre du laplacien ([**LY82**], [**ESI86**]) :

$$\lambda_1(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n} \leq nV_c(M,[g])^{2/n}. \tag{1.5}$$

Dans [**FN99**], L. Friedlander et N. Nadirashvili ont défini un nouvel invariant différentiable des variétés compactes en posant

$$\nu(M) = \inf_g \sup_{\tilde g\in[g]} \lambda_1(M,\tilde g)\,\mathrm{Vol}(M,\tilde g)^{2/n}. \tag{1.6}$$

Enfin, j'ai défini dans [**Ja08**] le volume de Möbius d'une variété compacte par

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_{\substack{m\\ \varphi:M\hookrightarrow S^m}} \sup_{\gamma\in G_m} \mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M)), \tag{1.7}$$

la différence avec le volume conforme étant que φ parcourt l'ensemble de toutes les immersions de M dans S^m sans restriction. Il découle de l'inégalité (1.5) que $\nu(M)\leq nV_{\mathcal{M}}(M)^{2/n}$. On peut alors montrer :

Théorème 1.8. — *Soit M^n une variété compacte à bord. Alors*

1. *Il existe une classe conforme C sur M telle que $V_c(M,C)=\omega_n$;*
2. $\nu(M)=n\omega_n^{2/n}$ *;*
3. $V_{\mathcal{M}}(M)=\omega_n$.

De plus, si M est un domaine euclidien, sphérique ou hyperbolique, alors C est la classe conforme de la métrique canonique.

Ces résultats contrastent avec le cas des variétés compactes sans bord. En effet, pour les variétés closes, on a toujours $V_c(M,C)\geq\omega_n$ et il découle des travaux de R. Petrides que l'égalité caractérise la sphère conformément ronde (cf. remarque 1.4). On sait qu'on a aussi $\nu(M)\geq n\omega_n^{2/n}$ mais il existe très peu de variétés sur lesquelles on sait calculer cet invariant, les seuls exemples sont $\nu(S^n)=n\omega_n^{2/n}$, $\nu(\mathbb{R}P^2)=12\pi$ (cela découle du fait que $\mathbb{R}P^2$ n'admet qu'une seule classe conforme), $\nu(T^2)=\nu(K^2)=8\pi$ où K^2 désigne la bouteille de Klein

(voir [**Gi09**]) et les surfaces compactes orientables en général, pour lesquelles l'invariant ν vaut encore 8π ([**Pe13a**]). Enfin, la seule variété close dont on connaît le volume de Möbius est la sphère. En général, on sait seulement que $V_{\mathcal{M}}$ est minoré par ω_n et uniformément majoré à dimension fixée (voir [**Ja08**]).

Comme exemple d'application du théorème 1.8, on peut déduire une majoration de la deuxième valeur propre des opérateurs de Schrödinger sur les domaines euclidiens, sphériques et hyperboliques en utilisant le résultat d'El Soufi et Ilias [**ESI92**] :

Corollaire 1.8. — *Soit M une variété conforme à un domaine compact de $\mathbb{R}^n$ (par exemple domaine de S^n ou H^n) et $V \in C^\infty(M)$. La deuxième valeur propre de l'opérateur de Schrödinger $\Delta + V$ sur M avec condition de Neumann est majorée par $n(\frac{\omega_n}{\mathrm{Vol}(M)})^{2/n} + \overline{V}$, où $\overline{V}$ désigne la valeur moyenne de V.*

On commencera par quelques rappels sur le volume conforme et ses liens avec le spectre de Neumann et de Steklov dans la section 2, on démontrera au passage les théorèmes 1.2 et 1.8 dans le cas des domaines de $\mathbb{R}^n$, S^n et H^n. On traitera ensuite le cas des surfaces, pour lequel les arguments topologiques sont plus simples qu'en dimension quelconque, dans la section 3. Puis nous verrons le cas général dans la section 4. Enfin, la dernière section sera consacrée à la démonstration du théorème 1.7.

Je remercie B. Colbois d'avoir porté l'article [**KN10**] à ma connaissance, ainsi que le rapporteur de l'article, dont les remarques ont permis d'améliorer le texte.

2. Spectre et volume conforme

2.1. Première valeur propre de Neumann. — Les démonstrations des théorèmes 1.2 et 1.8 reposent sur les propriétés des immersions conformes dans la sphère et du volume conforme étudiées dans [**LY82**] et [**ESI86**]. On utilisera en particulier le résultat suivant, en notant G_m le groupe de Möbius de dimension m, c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes conformes de la sphère S^m.

Lemme 2.1 ([**ESI86**]). — *Soit (M^n, g) une variété compacte et $\varphi : M \mapsto S^m$ une immersion conforme de M dans la sphère de dimension m. Il existe un élément γ du groupe de Möbius G_m tel que $\lambda_1(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n} \leq n\,\mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))^{2/n}$.*

Remarque 2.1. — Ce lemme n'est pas énoncé explicitement dans [**LY82**] ou [**ESI86**], mais sa démonstration est contenue dans celle du théorème 2.2 de [**ESI86**]. Par ailleurs, cette majoration est obtenue en appliquant le principe du min-max à des fonctions test qui ne vérifient *a priori* aucune condition de bord. Elle est donc valable pour le laplacien avec la condition de Neumann mais pas la condition de Dirichlet.

Remarque 2.2. — Dans [**LY82**] et [**ESI86**], le volume de $\gamma\circ\varphi(M)$ est majoré par sa borne supérieure sous l'action de G_m. Pour les immersions que nous allons considérer dans cet article, cette borne supérieure, qui vaudra ω_n, ne sera pas atteinte. C'est la raison pour laquelle les inégalités du théorème 1.2 sont strictes.

On est ainsi ramené au problème de construire une immersion de $M \to S^m$ dont le volume reste strictement inférieur à ω_n sous l'action du groupe de Möbius.

Pour illustrer l'efficacité de cette technique, nous allons montrer dès à présent le théorème 1.2 pour la première valeur propre de Neumann (on verra comment adapter la démonstration au cas de la première valeur propre de Steklov au paragraphe suivant, cf. remarque 2.5), ainsi que le théorème 1.8, dans le cas d'un domaine de l'espace euclidien, hyperbolique ou de la sphère :

Théorème 2.3. — *Soit M un domaine (strict) de $\mathbb{R}^n$, S^n ou H^n. Alors*

1. *la classe conforme C de la métrique canonique sur M vérifie $V_c(M,C) = \omega_n$ et pour toute métrique $g \in C$, $\lambda_1(M^n,g)\,\mathrm{Vol}(M^n,g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n}$;*
2. *$\nu(M) = n\omega_n^{2/n}$;*
3. *$V_{\mathcal{M}}(M) = \omega_n$.*

Démonstration. — Dans le cas d'un domaine de S^n, l'immersion considérée est simplement l'identité. Sous l'action du groupe de Möbius, le domaine M reste un domaine strict, donc son volume reste strictement inférieur à ω_n. On déduit du lemme 2.1 que $\lambda_1(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n} < n\omega_n^{2/n}$ pour toute métrique $g \in C$. Par définition du volume conforme, on en déduit aussi que $V_c(M,C) \leq \omega_n$. Les autres résultats du théorème découlent des inégalités générales $\omega_n \leq V_{\mathcal{M}}(M) \leq V_c(M,C)$ et $n\omega_n^{2/n} \leq \nu(M) \leq nV_{\mathcal{M}}(M)^{2/n}$ montrées dans [**ESI86**], [**FN99**] et [**Ja08**].

Si M est un domaine de $\mathbb{R}^n$ la projection stéréographique donne une immersion conforme dans S^n, et si M est un domaine de H^n on utilise le fait que H^n est conforme à un hémisphère de S^n. Le reste de la démonstration est identique. □

2.2. Première valeur propre de Steklov. — Le problème des valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } M \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma\rho f & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{2.2}$$

où ν est un vecteur unitaire sortant normal au bord et $\rho \in C^\infty(\partial M)$ un fonction densité fixée. On note $\mathcal{M}(\partial M) = \int_{\partial M} \rho \mathrm{d}v_g$ (si $\rho = 1$ on parle de problème de Steklov homogène, et on a dans ce cas $\mathcal{M}(\partial M) = \mathrm{Vol}(\partial M, g)$). L'ensemble des réels σ solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$0 = \sigma_0(M,g,\rho) < \sigma_1(M,g,\rho) \leq \sigma_2(M,g,\rho) \ldots. \tag{2.3}$$

Dans le cas homogène, le spectre de Steklov est aussi connu comme étant le spectre de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann. Le problème de Steklov, déjà étudié à la fin du XIXe siècle et au début du XXe (voir [**St99**], [**St02**] et les références qui y sont données), apparaît dans divers problèmes physiques. Par exemple il permet de modéliser l'évolution d'une membrane libre dont la masse se concentre sur son bord, et il intervient dans certains problèmes de tomographie. Concernant les bornes conformes des σ_i pour tout i, on peut consulter [**Ha11**].

Dans [**FS11**], A. Fraser et R. Schoen ont montré la majoration conforme suivante, dans le cas homogène :

$$\sigma_1(M,g)\,\mathrm{Vol}(\partial M,g)\,\mathrm{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} \leq nV_{rc}(M)^{2/n} \tag{2.4}$$

où $V_{rc}(M)$ est un invariant conforme, baptisé volume conforme relatif, défini par

$$V_{rc}(M,[g]) = \inf_{\substack{m\geq 1\\ \varphi:(M,[g])\hookrightarrow B^{m+1}}} \sup_{\gamma\in G_m} \mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M)), \tag{2.5}$$

où B^{m+1} est la boule unité de $\mathbb{R}^{m+1}$ et φ parcours l'ensemble des immersions conformes dans la boule B^{m+1} telles que $\varphi(\partial M)\subset S^m$. On utilise le fait que l'action du groupe de Möbius sur la sphère S^m s'étend naturellement en une action conforme sur B^{m+1}.

En considérant le cas particulier des immersions $\varphi : M \to S^m$, il est clair que $V_{rc}(M) \leq V_c(M)$. On peut donc déduire immédiatement une majoration de $\sigma_1(M)$ en fonction du volume conforme dans le cas homogène. On va maintenant montrer l'inégalité (2.4) dans le cas non homogène :

Théorème 2.4. — *Soit (M,g) une variété compacte à bord et $\rho\in C^\infty(\partial M)$ une fonction. Si on note $\sigma_1(M,g,\rho)$ la première valeur propre non nulle du problème de Steklov avec densité ρ, alors*

$$\sigma_1(M,g,\rho)\mathcal{M}(\partial M)\,\mathrm{Vol}(M)^{\frac{2-n}{n}} \leq nV_{rc}(M)^{2/n}.$$

Démonstration. — Rappelons d'abord que la valeur propre $\sigma_1(M,g,\rho)$ possède la caractérisation variationnelle suivante (cf. [**Ba80**]) :

$$\sigma_1(M,g,\rho) = \inf_{f\neq 0}\frac{\int_M |\mathrm{d}f|^2\mathrm{d}v_g}{\int_{\partial M} f^2\rho\,\mathrm{d}v_g} \quad \text{où} \quad \int_{\partial M} f\rho\,\mathrm{d}v_g = 0. \tag{2.6}$$

Soit $\varphi : M \to B^{m+1}$ une immersion conforme telle que $\varphi(\partial M)\subset S^m$. Selon le lemme 2.1 de [**ESI92**], il existe un élément $\gamma\in G_m$ tel que si on note $\tilde\varphi = \gamma\circ\varphi$, les coordonnées $\tilde\varphi_i$ de $\tilde\varphi$ vérifient $\int_{\partial M}\tilde\varphi_i\rho\,\mathrm{d}v_g = 0$. En appliquant le principe variationnel (2.6) aux fonctions $\tilde\varphi_i$ on obtient $\sigma_1(M,g,\rho)\int_{\partial M}\tilde\varphi_i^2\rho\,\mathrm{d}v_g \leq \int_M |\mathrm{d}\tilde\varphi_i|^2\mathrm{d}v_g$. Après sommation, en utilisant le fait que $\sum_i\tilde\varphi_i^2 = 1$ sur ∂M et en

appliquant une inégalité de Hölder, on obtient par un calcul devenu classique

$$\sigma_1(M,g,\rho) \leq \frac{\sum_i \int_M |\mathrm{d}\tilde{\varphi}_i|^2 \mathrm{d}v_g}{\sum_i \int_{\partial M} \tilde{\varphi}_i^2 \rho \, \mathrm{d}v_g} \leq \frac{\left(\int_M \left(\sum_i |\mathrm{d}\tilde{\varphi}|^2\right)^{n/2} \mathrm{d}v_g\right)^{2/n}}{\mathcal{M}(\partial M)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{(2-n)/n}}. \tag{2.7}$$

Comme l'immersion $\tilde{\varphi}$ est conforme, on a aussi $\tilde{\varphi}^*(g_{\mathrm{eucl}}) = \frac{1}{n}\left(\sum_i |\mathrm{d}\tilde{\varphi}|^2\right) g$ et donc

$$\left(\int_M \left(\sum_i |\mathrm{d}\tilde{\varphi}|^2\right)^{n/2} \mathrm{d}v_g\right)^{2/n} = n\,\mathrm{Vol}(\tilde{\varphi}(M))^{2/n} = n\,\mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M))^{2/n}. \tag{2.8}$$

Par définition, $\mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M))$ est majoré par $V_{rc}(M)$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.5. — L'inégalité (1.3) du théorème 1.2 se démontre de la même manière que l'inégalité (1.2) en remplaçant le lemme 2.1 par les inégalités (2.7) et (2.8). En particulier, le cas des domaines euclidiens se traine comme dans le théorème 2.3.

3. Première valeur propre des surfaces à bord

Comme dans [**Ja08**], nous allons commencer par reformuler le problème en projetant stéréographiquement la sphère S^m sur $\mathbb{R}^m$. Rappelons d'abord que si γ est un élément quelconque de G_m et r une isométrie de la sphère S^m, alors $\mathrm{Vol}(r\circ\gamma\circ\varphi(M)) = \mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M))$ pour toute immersion φ de M dans S^m. On peut donc se ramener à étudier l'action d'un sous-ensemble G'_m de G_m (pas nécessairement un sous-groupe) tel que tout élément de G_m s'écrive sous la forme $r\circ\gamma$ avec $\gamma\in G'_m$ et $r\in \mathrm{SO}(m)$.

Il existe plusieurs choix possibles pour G'_m, mais l'un d'entre eux est particulièrement adapté à la démonstration qui suit. En projetant stéréographiquement la sphère S^m sur $\mathbb{R}^m\cup\{\infty\}$, on se ramène à considérer des immersions $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^m\cup\{\infty\}$ en calculant les volumes pour la métrique $g_{S^m} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\mathrm{eucl}}$ où g_{eucl} désigne la métrique euclidienne canonique. On peut alors choisir pour G'_m l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathbb{R}^m$ (voir le théorème 3.5.1 de [**Be83**]).

La difficulté par rapport au cas des domaines traités dans la section précédente est de trouver une immersion de M dans une sphère telle que le volume de l'immersion reste strictement inférieure à $\mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}})$ sous l'action du groupe de Möbius. Le reste de la démonstration est identique.

On va donc montrer l'existence d'une telle immersion dans le cas où $n=2$ en utilisant une décomposition en anses de la surface à bord. Précisons qu'une adjonction d'anse à une surface à bord consiste à coller un produit $[0,1]\times[0,1]$ sur la surface en identifiant $\{0\}\times[0,1]$ et $\{1\}\times[0,1]$ avec deux intervalles du bord

de la surface. Les adjonction d'anses sont de trois types topologiques différents, représentés sur la figure 1, selon que le nombre de composante connexe du bord augmente de 1, diminue de 1 ou reste constant (auquel cas la surface obtenue est non orientable).

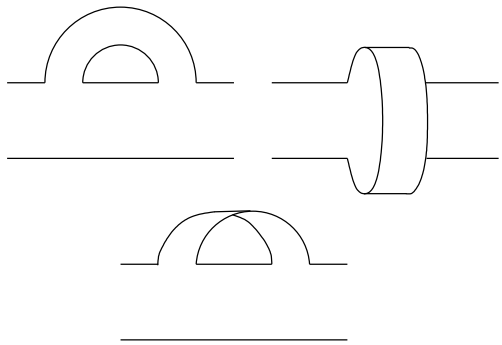

FIGURE 1. Adjonctions d'anses à une surface à bord

La décomposition en anse peut alors s'énoncer ainsi :

Lemme 3.1. — *Toute surface compacte à bord de caractéristique d'Euler χ s'obtient topologiquement à partir du disque par adjonction de $1-\chi$ anses.*

Démonstration. — On se base sur le fait qu'une surface compacte est entièrement déterminée par sa caractéristique d'Euler, le nombre de composantes du bord et son orientabilité ([**Hi94**], théorème 3.1). Remarquons aussi qu'ajouter une anse diminue de 1 la caractéristique d'Euler.

Commençons par le cas des surfaces orientables. Pour obtenir une surface de caractéristique χ et ayant p composantes de bord, il suffit d'attacher au disque $k = (p-\chi)/2$ anses qui créent une composante de bord, puis $k' = 1-(p+\chi)/2$ anses qui connectent deux composantes de bord différentes (pour une surface orientable, p et χ ont la même parité, donc k et k' sont bien entiers). La caractéristique d'Euler de la surface obtenue est bien $1-k-k' = \chi$ et le nombre de composantes connexes du bord est $1+k-k' = p$.

Pour obtenir une surface non orientable de caractéristique χ et ayant p composantes de bord, on attache $p-1$ anses qui créent une composante de bord, puis $2-\chi-p$ anses qui ne changent pas le nombre de composantes du bord. □

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une immersion dont l'aire est contrôlée sous l'action du groupe de Möbius.

Théorème 3.1. — *Soit M une surface compacte à bord. Il existe une immersion $\varphi : M \to S^3$ telle que $\mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < 4\pi$ pour tout élément γ du groupe de Möbius G_3 de S^3.*

Démonstration. — Étant donnée une décomposition en anse de la surface, et deux paramètres $\delta, \varepsilon > 0$ petits, on se donne un plongement de la surface dans $\mathbb{R}^3$ telle que les anses aient une largeur (pour la métrique euclidienne g_{eucl}) égale à ε et que la courbure du plongement (plus précisément la norme de la seconde forme fondamentale) soit majorée par δ (les valeurs de δ et ε seront fixées plus loin). On lisse le bord à la jonction des anses et on note $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ le plongement obtenu. La figure 2 représente un tel plongement pour un tore privé de deux disques.

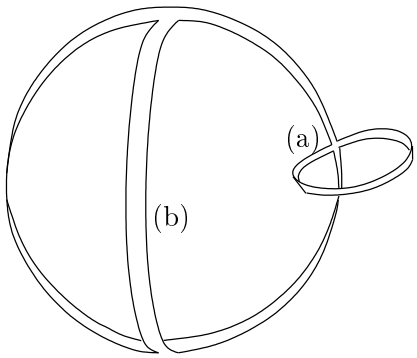

FIGURE 2.

La clef de la démonstration est que si $\gamma \in G_3'$, l'aire des parties de $\gamma \circ \varphi(M)$ projetées près de ∞ devient négligeable pour la métrique g_{S^3}, même si le rapport d'homothétie de γ est grand (cf. [**Ja08**]). En effet, une homothétie de rapport R va multiplier l'aire euclidienne par R^2, mais dans la formule $g_{S^3} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\text{eucl}}$ la norme de x est de l'ordre de R pour les parties de $\varphi(M)$ projetées près de l'infini et donc leur aire devient petite quand R devient grand (de l'ordre de R^{-2}). On va maintenant préciser cette majoration.

Quand ε est petit, l'aire de $\gamma \circ \varphi(M)$ est négligeable sauf si le rapport d'homothétie de γ est grand et qu'une partie de $\gamma \circ \varphi(M)$ reste près de l'origine. On va donc se placer dans le cas où γ est une homothétie centrée en un point p de la surface et dont le rapport R est grand, et étudier l'aire de la surface quand $R \to \infty$.

On considère la boule B de centre p et de rayon 1 et on sépare la surface en deux morceaux $\varphi(M) \cap B$ et $\varphi(M) \backslash B$. Pour δ et ε suffisamment petit, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que l'aire $V_1 = \text{Vol}(\gamma \cdot (\varphi(M) \backslash B))$ vérifie $V_1 \leq c_1 R^{-2}$ pour R assez grand. En outre, pour R fixé, l'aire V_1 est asymptotiquement proportionnelle à ε quand ε tend vers 0. La constante c_1 tend donc vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Pour estimer l'aire $V_2 = \text{Vol}(\gamma \cdot (\varphi(M) \cap B))$, on considère la projection orthogonale π de la surface sur son plan tangent $\mathcal{P}$ en p. Cette projection prend

par exemple l'une des formes représentées sur la figure 3 selon que p est près d'une jonction d'anse ou pas. Le cas où p est situé sur le bord de la surface sera précisé à la fin de la démonstration.

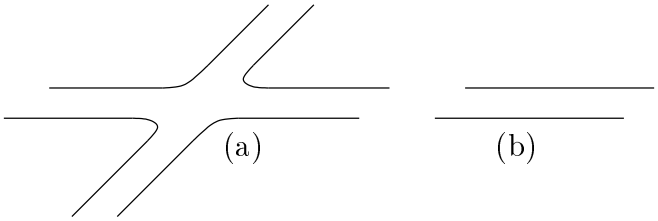

FIGURE 3.

Le paramètre δ majore la courbure de $\varphi(M)$, donc celle de $\gamma \cdot \varphi(M)$ est majorée par δ/R (pour la métrique euclidienne). Si δ est suffisamment petit, l'angle entre le plan tangent en un point $x \in \gamma \cdot (\varphi(M) \cap B)$ proche de p et le plan $\mathcal{P}$ est majoré (au premier ordre par rapport à $\|x-p\|$) par $\frac{\delta}{R}\|x-p\|$. Le jacobien de π au point x sera donc encadré grossièrement par $1 \pm 2\frac{\delta}{R}\|x-p\|$. Cette estimation est faite pour la métrique euclidienne, mais la densité de la mesure sphérique décroit à la même vitesse en x et $\pi(x)$ quand x s'éloigne de p, donc elle reste valable pour la métrique sphérique.

On a donc une majoration de la forme

$$|V_2' - V_2| \leq 2 \int_{\pi\circ\gamma\cdot(\varphi(M)\cap B)} \frac{\delta}{R}\|x-p\| \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

où $V_2' = \mathrm{Vol}(\pi \circ \gamma \cdot (\varphi(M) \cap B))$, l'intégrale étant calculée pour la métrique sphérique. Comme le rapport $\|x-p\|/R$ reste borné, on peut trouver une constante c_2 tel que l'intégrale du membre de droite soit majorée (pour la métrique sphérique) par $c_2\delta R^{-2}$ pour R assez grand. En outre, pour R fixé, la largeur du domaine d'intégration $\pi \circ \gamma \cdot (\varphi(M) \cap B)$ est proportionnelle à ε, donc la constante c_2 tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Pour conclure, on va distinguer le cas où p est dans l'intérieur de la surface et le cas où p est sur le bord. Dans considérons d'abord le cas où p est à l'intérieur. La projection stéréographique envoie le plan $\mathcal{P}$ sur une sphère ronde plongée dans S^3, son aire pour la métrique sphérique est donc majorée par celle d'une sphère équatoriale, c'est-à-dire 4π. Par conséquent l'aire V_2' est majorée par $4\pi - \mathrm{Vol}(U)$, où U est le complémentaire de $\pi \circ \gamma \cdot (\varphi(M) \cap B)$ dans $\mathcal{P}$. L'aire $\mathrm{Vol}(U)$ est de l'ordre de R^{-2} quand $R \to \infty$, et elle croît quand ε décroît.

Finalement, l'aire $V_1 + V_2$ est majorée par $c_1R^{-2} + c_2\delta R^{-2} + 4\pi - \mathrm{Vol}(U)$. Comme les constantes c_1 et c_2 tendent vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, on peut bien trouver un ε tel que $c_1R^{-2} + c_2\delta R^{-2} - \mathrm{Vol}(U)$ soit toujours strictement négatif. On obtient que $\mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < 4\pi$ pour tout R.

Quand p est sur le bord, la projection de la surface sur $\mathcal{P}$ tend vers un demi-plan quand $R \to \infty$. Par conséquent, le domaine U défini précédemment tend vers le demi-plan complémentaire dans $\mathcal{P}$, et en particulier son aire ne tend pas vers 0. La majoration précédente est donc *a fortiori* vraie dans ce cas.

Les estimations précédentes dépendent *a priori* du point p, mais par compacité de la surface le choix des constantes peut être fait uniformément sur la surface. Finalement, on a bien $\mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < 4\pi$ pour tout γ. □

4. Variétés à bord de dimension quelconque

La démonstration en dimension quelconque utilise des arguments géométriques semblables à ceux de dimension 2, mais les arguments topologiques sont plus techniques. Dans le même esprit que [**Ja08**], on fera appel à une décomposition en anses de la variété. On se référera aux livres [**Ra02**] (chapitres 1, 2 et 6) et [**Ko93**] (chapitre VI et VII) pour les aspects topologiques de la démonstration.

Soit M une variété compacte à bord et $S^{k-1} \hookrightarrow \partial M$ une sphère plongée dans le bord de M dont le fibré normal (dans ∂M) est trivial. Un voisinage tubulaire de S^{k-1} dans ∂M est alors un produit trivial $S^{k-1} \times B^{n-k}$. Ajouter une k-anse le long de S^{k-1} consiste à coller une variété produit $B^k \times B^{n-k}$ (dont le bord est la réunion des deux variétés $B^k \times S^{n-k-1}$ et $S^{k-1} \times B^{n-k}$ recollées le long de $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$) sur un voisinage tubulaire de la sphère S^{k-1}. C'est un résultat classique de la théorie du cobordisme qu'on peut obtenir n'importe quelle variété connexe compacte à bord par adjonctions successives d'un nombre fini d'anses à partir d'une boule ([**Ra02**] théorème 2.2 ; [**Ko93**] ch. VII, théorème 1.1 et 1.2). En outre, on peut faire en sorte qu'on n'ait pas à utiliser de n-anse, c'est-à-dire à « boucher » un bord en y collant une boule ([**Ko93**], ch. VII, théorème 6.1). La démonstration des théorèmes 1.2 et 1.8 va consister à raisonner par récurrence sur le nombre d'anses. Comme en dimension 2, il suffit de montrer l'existence d'une immersion dont le volume est uniformément contrôlé sous l'action du groupe de Möbius :

Théorème 4.1. — *Soit M une variété compacte à bord de dimension n. Il existe une immersion $\varphi : M \to S^m$ pour un entier m suffisamment grand telle que $\mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) < \mathrm{Vol}(S^n, g_{can})$ pour tout élément γ du groupe de Möbius G_m de S^m.*

Démonstration. — Si M est une boule, n'importe quel plongement $\varphi : M \to S^n$ convient.

Supposons qu'une variété à bord M vérifie la conclusion du théorème ; on va montrer qu'elle reste vraie pour une variété $\tilde{M}$ obtenue en ajoutant une k-anse qu'on notera $\mathcal{A}$.

On note φ l'immersion de M dans S^m telle que $\mathrm{Vol}(\gamma\circ\varphi(M)) < \mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}})$ pour tout γ. Comme dans le paragraphe précédent, on projette stéréographiquement S^m sur $\mathbb{R}^m \cup \infty$ et on se restreint aux éléments $\gamma \in G'_m$. On va construire une immersion $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{M}$ en collant une anse $\mathcal{A} = B^k \times B^{n-k}$ sur $\varphi(M)$ (pour ne pas alourdir le texte, on identifiera les variétés à leur immersion). Le long de la sphère d'attache $S^{k-1} \hookrightarrow \partial M$, on commence par coller une boule B^k de manière à ce que le long de S^{k-1}, l'espace tangent à B^k soit contenu dans l'espace tangent de M. Quitte à augmenter la dimension de la sphère S^m, on peut faire en sorte que B^k ne rencontre pas M (c'est-à-dire que $M \cup B^k$ est plongée). L'anse $B^k \times B^{n-k}$ est ensuite obtenue en épaississant B^k et en lissant $\tilde{M}$ le long de l'attache de l'anse (voir figure 4). Si le rayon ε (pour la métrique euclidienne de R^m) de B^{n-k} est suffisamment petit, l'immersion $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{M}$ ainsi obtenue est un plongement. Comme dans le cas des surfaces, on choisira plus loin un ε négligeable devant la courbure de la boule B^k.

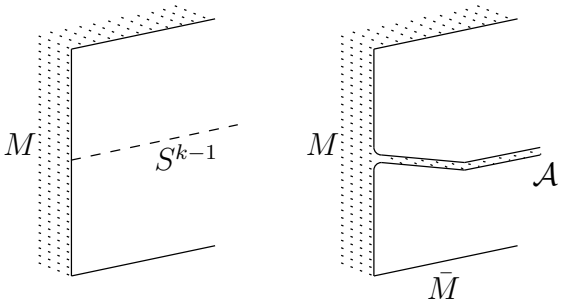

FIGURE 4. Voisinage de l'attache d'une anse

Il reste à choisir ε de manière à contrôler le volume de ce plongement quand on fait agir le groupe G'_m. Il est clair que sous l'action des translations le volume de M atteint un maximum (en effet, le volume de $\gamma \cdot M$ tend alors vers zéro à l'infini pour la métrique g_{S^m}). Ce maximum est strictement plus petit que $\mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}})$ par hypothèse, et le volume de l'anse reste majoré par une borne qui tend vers 0 quand ε tend vers 0 (il est essentiel ici pour contrôler le volume de la k-anse que k soit différent de n). On peut donc choisir ε de sorte que le volume de $\tilde{M}$ reste strictement plus petit que $\mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}})$ sous l'action des translations.

On est donc ramené à l'étude du volume sous l'action des homothéties. On considère une homothétie γ centrée en un point p et de rapport R. Le problème est de majorer le volume de $\tilde{M}$ quand $p \in \tilde{M}$ et R est grand (si R est inférieur à une borne donnée, on peut rendre le volume de l'anse négligeable et conclure comme dans le cas des translations). On va en fait montrer par récurrence un

résultat plus précis, à savoir qu'il existe une constante c_M telle que

$$\mathrm{Vol}(\gamma \cdot M) \leq \mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}}) - c_M R^{-n} \tag{4.1}$$

quand $R \to \infty$. On va distinguer quatre cas, selon que p est sur M, dans l'anse $\mathcal{A}$, sur le bord de l'anse ou près de la jonction des de $\mathcal{A}$ et M.

Supposons que p soit dans M. Par hypothèse de récurrence, M vérifie la majoration (4.1). Quand $R \to \infty$, l'anse $\mathcal{A}$ tend vers l'infini et son volume pour la métrique sphérique est majorée par cR^{-n} où c est une constante qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. On a donc $\mathrm{Vol}(\gamma \cdot \bar{M}) \leq \mathrm{Vol}(\gamma \cdot M) + cR^{-n} \leq \mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}}) - (c_M - c)R^{-n}$. Pour ε suffisamment petit, la constante $(c_M - c)$ est positive ce qui permet de conclure. On peut noter que cette démonstration reste valable si p est sur le bord de M.

Si p est dans intérieur de l'anse $\mathcal{A}$, on raisonne comme en dimension 2. On note $\mathcal{A}'$ un petit voisinage de p on note π la projection orthogonale sur l'espace tangent à $\mathcal{A}$ en p, et par le même calcul que dans la section précédente on obtient l'existence d'une constante c (dépendant de la courbure de l'anse) telle que

$$|\,\mathrm{Vol}(\pi(\gamma \cdot \mathcal{A}')) - \mathrm{Vol}(\gamma \cdot \mathcal{A}')| \leq cR^{-n}. \tag{4.2}$$

Comme $\gamma \cdot M$ et $\gamma \cdot (\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}')$ tendent vers le point à l'infini quand $R \to \infty$, il existe une constante c telle que $\mathrm{Vol}(\gamma \cdot M) + \mathrm{Vol}(\gamma \cdot (\mathcal{A} \backslash \mathcal{A}')) \leq cR^{-n}$. En notant U le complémentaire de $\pi(\gamma \cdot \mathcal{A}')$ dans le plan tangent on a $\mathrm{Vol}(\pi(\gamma \cdot \mathcal{A}')) = \mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}}) - \mathrm{Vol}(U)$, avec $\mathrm{Vol}(U) \sim c' R^{-n}$ quand $R \to \infty$ pour une constante c' qu'on peut rendre arbitrairement grande en faisant tendre ε vers 0 (c'est-à-dire qu'on peut choisir à partir de quelle valeur de R ce volume devient négligeable). On a finalement $\mathrm{Vol}(\gamma \cdot \bar{M}) \leq \mathrm{Vol}(S^n, g_{\mathrm{can}}) - c'' R^{-n}$ avec une constante c'' qui est bien positive si ε est suffisamment petit.

Si p est sur le bord de l'anse $\mathcal{A}$, on modifie la démonstration précédente comme en dimension 2 : $\gamma \cdot \bar{M}$ tend vers un demi-espace de $T_p\bar{M}$ quand R tend vers l'infini, donc le volume de U ne tend pas vers 0 et la conclusion reste vraie.

Si p est près de la jonction avec l'anse $\mathcal{A}$, la démonstration est la même que si $p \in \mathcal{A}$.

Comme en dimension 2, on peut choisir le paramètre ε uniforme par rapport à p par compacité. □

5. Grandes valeurs propres du laplacien de Dirichlet

On va maintenant démontrer le théorème 1.7. On va en fait prouver un résultat plus général, à savoir qu'on peut faire tendre toutes les valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham vers l'infini en fixant le volume et la classe conforme, à l'exception des valeurs propres du laplacien de Neumann.

Rappelons quelques définitions. Le laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles de la variété M, est défini par

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M), \tag{5.1}$$

où d désigne la différentielle extérieure et δ sont adjoint L^2. On considérera la condition de bord suivante, dite absolue, en notant j l'inclusion $\partial M \hookrightarrow M$ et N un champ de vecteur normal au bord :

$$(A) \quad \begin{cases} j^*(\iota_N \omega) = 0 \\ j^*(\iota_N \mathrm{d}\omega) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

On notera $0 = \lambda_{p,0}(M,g) < \lambda_{p,1}(M,g) \leq \lambda_{p,2}(M,g) \leq \dots$ son spectre en restriction aux p-formes, en répétant les valeurs propres non nulles s'il y a multiplicité (la multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est un invariant topologique : c'est le nombre de Betti $b_p(M)$).

Avec la condition de bord (A), le laplacien de Hodge-de Rham restreint aux 0-formes, c'est-à-dire aux fonctions, est le laplacien de Neumann. En degré $p = n$, les valeurs propres sont celles du laplacien de Dirichlet. En effet, si f est une fonction et $\mathrm{d}v_g$ la forme volume, alors $\Delta(f\mathrm{d}v_g) = (\Delta f)\mathrm{d}v_g$, et $f\mathrm{d}v_g$ vérifie la condition (A) si et seulement si f vérifie la condition de Dirichlet.

Théorème 5.1. — *Soit M^n une variété compacte à bord de dimension $n \geq 2$. Pour toute classe conforme C sur M^n, il existe une famille de métriques $g_t \in C$, $t > 0$ telle que, pour tout $p \geq 2$, on a $\lambda_{p,1}(M,g_t)\,\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/n} \to +\infty$ quand t tend vers $+\infty$.*

Remarque 5.2. — On ne peut pas faire tendre $\lambda_{1,1}(M,g_i)\,\mathrm{Vol}(M,g_i)^{2/n}$ vers l'infini. En effet, comme la différentielle extérieure commute avec le laplacien, le spectre resteint aux 1-formes contient le spectre du laplacien de Neumann.

Remarque 5.3. — Sur les variétés closes, on sait qu'on peut faire tendre $\lambda_{p,1}(M)\,\mathrm{Vol}(M)^{2/n}$ vers l'infini en fixant le volume et la classe conforme, mais seulement pour $p \in [2, n-2]$ (voir [**CES06**]). La méthode, devenue classique pour faire tendre les valeurs propres de certains opérateurs vers l'infini, consiste à déformer une petite boule de la variété en un cylindre très long (cf. [**GP95**], [**AB00**], [**CES06**], [**AJ12**]). Nous allons ici adapter cette technique à la présence d'un bord.

Démonstration. — On procédera en trois étapes. D'abord, se ramènera au cas où la métrique est euclidienne au voisinage d'un point du bord. On construira ensuite une famille de métriques qui fait tendre le volume vers l'infini et on montrera enfin que le spectre de la variété est uniformément minoré pour cette famille de métriques.

La première étape se base sur le résultat de J. Dodziuk [**Do82**] selon lequel, si deux métriques sont proches pour la distance de Lipschitz, alors leurs spectres sont proches aussi. Plus précisément, si deux métriques g et $\tilde{g}$ vérifient $\tau^{-1}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, alors $\tau^{-(3n-1)}\lambda_{p,1}(M,\tilde{g}) \leq \lambda_{p,1}(M,g) \leq \tau^{3n-1}\lambda_{p,1}(M,\tilde{g})$ et $\tau^{-n/2}\,\mathrm{Vol}(M,\tilde{g}) \leq \mathrm{Vol}(M,g) \leq \tau^{n/2}\,\mathrm{Vol}(M,\tilde{g})$. Si $h \in C^\infty(M)$ est une fonction strictement positive et que $\tau^{-1}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, alors on a aussi $\tau^{-1}hg \leq \tilde{h}g \leq \tau hg$. On peut en déduire que si on peut faire tendre $\lambda_{p,1}(M,hg)\,\mathrm{Vol}(M,hg)^{2/n}$ vers

l'infini en faisant varier h, alors $\lambda_{p,1}(M, h\tilde{g})\,\mathrm{Vol}(Mh\tilde{g})^{2/n}$ tend aussi vers l'infini. Autrement dit, il suffit de montrer le théorème 1.7 pour une classe conforme particulière, le résultat général s'en déduit.

On peut donc se placer dans le cas où la classe conforme contient une métrique g qui est euclidienne dans un voisinage d'un point du bord. On peut alors adapter la construction de [**CES06**] dans ce contexte. On sait qu'une boule euclidienne peut être déformée de manière conforme en la réunion d'un cylindre et d'un hémisphère. Plus précisément, si on note r la coordonnée radiale sur la boule euclidienne $B(\varepsilon, g_{\mathrm{eucl}})$ de rayon ε et qu'on pose

$$h_\varepsilon(r) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{r} & \text{si } \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}} \leq r \leq \varepsilon, \\ e^{\frac{L}{\varepsilon}} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}}, \end{cases} \tag{5.3}$$

alors la boule $B(\varepsilon, h_\varepsilon^2 g_{\mathrm{eucl}})$ est isométrique à la réunion d'un cylindre de rayon ε et de longueur L et d'un hémisphère de rayon ε. Appliquée à une demi-boule centré en un point du bord et en prolongeant la fonction h_ε par 1 en dehors de cette demi-boule, cette déformation conforme crée un demi-cylindre de longueur L au bout duquel est collé un quart de sphère, comme sur la figure 5. On note g_L la métrique obtenue.

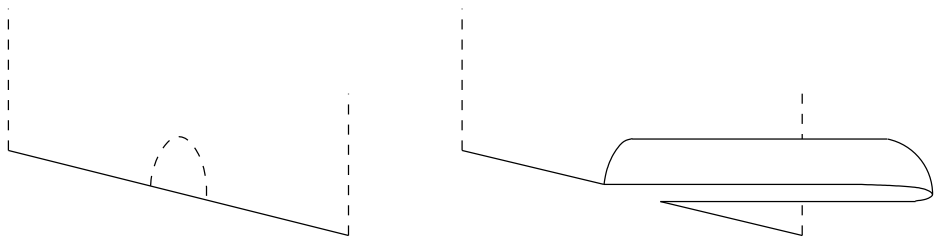

FIGURE 5. déformation de la métrique sur le bord de la variété

On peut alors minorer le spectre de la variété obtenue par la même technique que dans [**GP95**] et [**CES06**]. On recouvre la variété M par trois ouverts U_i, $i = 1, 2, 3$ définis de la manière suivante : U_1 est formé de la réunion de $M \backslash B(\varepsilon)$ et d'une portion du demi-cylindre de longueur 1, l'ouvert U_2 est formé du demi-cylindre de longueur L et U_3 est formé du quart de sphère et de d'une portion de demi-cylindre adjacente de longueur 1.

Les intersections $U_1 \cap U_2$ et $U_2 \cap U_3$ sont topologiquement le produit d'un intervalle et d'une boule, leur cohomologie est donc triviale en degré $p \geq 1$ (y compris en degré n et $n-1$, à la différence de la construction de [**CES06**]), ce qui permet d'appliquer le lemme de McGowan [**Mc93**] (plus précisément, on utilise l'énoncé donné dans [**GP95**], lemme 1) pour tout les degrés $p \geq 2$: il existe des constantes $a, b, c > 0$ ne dépendant pas de L telles que

$$\lambda_{p,1}(M, g_L) \geq \frac{a}{\frac{b}{\mu_p(U_2)} + c} \text{ pour } p \geq 2, \tag{5.4}$$

où $\mu(U_2)$ désigne la plus petite valeur propre non nulle du laplacien de Hodge sur U_2 en degré p (avec la condition de bord absolue).

Comme l'ouvert U_2 est un produit riemannien, son spectre est déterminé par la formule de Künneth et on peut montrer que $\mu(U_2)$ est minoré indépendamment de L (le calcul est le même que dans [**GP95**] et [**CES06**]).

On obtient finalement que $\lambda_{p,1}(M, g_L)$ reste uniformément minoré pour $p \geq 2$ quand $L \to +\infty$ tandis que $\mathrm{Vol}(M, g_L) \to +\infty$, ce qui permet de conclure. □

Références

[AB95] M. Ashbaugh et R. Benguria – « Sharp upper bound to the first nonzero Neumann eigenvalue for bounded domains in spaces of constant curvature », *J. London Math. Soc. (2)*, 52 (2), p. 402–416, 1995.

[AB00] B. Ammann et C. Bär – « Dirac eigenvalues and total scalar curvature », *J. Geom. Phys.*, 33, p. 229–234, 2000, math.DG/9909061.

[AJ12] B. Ammann et P. Jammes – « The supremum of first eigenvalues of conformally covariant operators in a conformal class », Dans *Variational Problems in Differential Geometry*, volume 394 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–23, Cambridge University Press, 2012, arXiv :0708.0529.

[Ba80] C. Bandle – *Isoperimetric inequalities and applications*, volume 7 de *Monographs and Studies in Mathematics*, Pitman, 1980.

[Be83] A. Beardon – *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1983.

[BM01] R. Brooks et E. Makover – « Riemann surfaces with large first eigenvalue », *J. Anal. Math.*, 83, p. 243–258, 2001.

[Bu84] P. Buser – « On the bipartition of graphs », *Discrete Appl. Math.*, 9 (1), p. 105–109, 1984.

[CD94] B. Colbois et J. Dodziuk – « Riemannian metrics with large λ_1 », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122 (3), p. 905–906, 1994.

[CES03] B. Colbois et A. El Soufi – « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the "conformal spectrum" », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.

[CES06] B. Colbois et A. El Soufi – « Eigenvalues of the Laplacian acting on p-forms and metric conformal deformations », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 134 (3), p. 715–721, 2006, math.DG/0409242.

[CESG11] B. Colbois, A. El Soufi et A. Girouard – « Isoperimetric control of the Steklov spectrum », *J. Funct. Anal.*, 261 (5), p. 1384–1399, 2011, arXiv :1103.2863.

[Do82] J. Dodziuk – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85 (3), p. 438–443, 1982.

[ESGJ06] A. El Soufi, H. Giacomini et M. Jazar – « A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle », *Duke Math. J.*, 135 (1), p. 181–202, 2006.

[ESI86] A. El Soufi et S. Ilias – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.

[ESI92] A. El Soufi et S. Ilias – « Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications », *J. Funct. Anal.*, 103 (2), p. 294–316, 1992.

[FN99] L. Friedlander et N. Nadirashvili – « A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian », *Internat. Math. Res. Notices*, 17, p. 939–952, 1999.

[FS11] A. Fraser et R. Schoen – « The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces », *Adv. Math.*, 226 (5), p. 4011–4030, 2011.

[Gi09] A. Girouard – « Fundamental tone, concentration of density to points and conformal degeneration on surfaces », *Canad. J. Math.*, 61 (3), p. 548–565, 2009, math.SP/0510279.

[GP95] G. Gentile et V. Pagliara – « Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 123 (12), p. 3855–3858, 1995.

[Ha11] A. Hassannezhad – « Conformal upper bounds for the eigenvalues of the Laplacian and Steklov problem », *J. Funct. Anal.*, 261 (11), p. 3419–3436, 2011.

[He70] J. Hersch – « Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 270, p. A1645–A1648, 1970.

[Hi94] M. W. Hirsch – *Differential topology*, volume 33 de *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, 1994.

[Ja08] P. Jammes – « Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies », *Geom. Dedicata*, 135, p. 29–37, 2008.

[JLN+05] D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, N. Nigam et I. Polterovich – « How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two ? », *Int. Math. Res. Not.*, 63, p. 3967–3985, 2005.

[JNP06] D. Jakobson, N. Nadirashvili et I. Polterovich – « Extremal metric for the first eigenvalue on a Klein bottle », *Canad. J. Math.*, 58 (2), p. 381–400, 2006.

[Ka13] M. A. Karpukhin – « Maximization of the first nontrivial eigenvalue on the surface of genus two », prépublication, arXiv :1309.5057, 2013.

[KN10] G. Kokarev et N. Nadirashvili – « On first Neumann eigenvalue bounds for conformal metrics », Dans *Around the research of Vladimir Maz'ya. II*, volume 12 de *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 229–238, Springer, 2010.

[Ko93] A. Kosinski – *Differential manifolds*, Academic Press Inc., 1993.

[LY82] P. Li et S.T. Yau – « A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces », *Invent. Math.*, 69 (2), p. 269–291, 1982.

[Mc93] J. McGowan – « The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.

[Mu80] H. Mutô – « The first eigenvalue of the Laplacian on even-dimensional spheres », *Tôhoku Math. J. (2)*, 32 (3), p. 427–432, 1980.

[Na96] N. Nadirashvili – « Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces », *Geom. Funct. Anal.*, 6 (5), p. 877–897, 1996.

[Pe13a] R. Petrides – « Existence and regularity of maximal metrics for the first Laplace eigenvalue on surfaces », prépublication, arXiv :1310.4697, 2013.

[Pe13b] R. Petrides – « On a rigidity result for the first conformal eigenvalue of the Laplacian », prépublication, arXiv :1310.4698, 2013.

[Ra02] A. Ranicki – *Algebraic and geometric surgery*, Oxford University Press, 2002.

[St99] W. Stekloff – « Sur l'existence des fonctions fondamentales », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 128 (1), p. 808–810, 1899.

[St02] W. Stekloff – « Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique (suite et fin) », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 19 (2), p. 455–490, 1902.

[Ta79] S. Tanno – « The first eigenvalue of the Laplacian on spheres », *Tôhoku Math. J. (2)*, 31 (2), p. 179–185, 1979.

[We54] R. Weinstock – « Inequalities for a classical eigenvalue problem », *J. Rational Mech. Anal.*, 3, p. 745–753, 1954.

Pierre Jammes
Laboratoire J.-A. Dieudonné
Université Nice Sophia Antipolis — CNRS (UMR 7351)
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02, France
pjammes@unice.fr