

Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— On définit dans cet article un nouvel invariant différentiel des variétés compactes par $V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_g V_c(M, [g])$, où $V_c(M, [g])$ désigne le volume conforme de la variété M pour la classe conforme $[g]$, et on montre que cet invariant est uniformément majoré. La principale motivation est qu'on en déduit une majoration de l'invariant de Friedlander et Nadirashvili défini par $\inf_g \sup_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1(M, \tilde{g}) \text{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{2}{n}}$.

La démonstration consiste à étudier comment évolue l'invariant $V_{\mathcal{M}}(M)$ quand on pratique des chirurgies sur M .

Mots-clés : première valeur propre du laplacien, volume conforme, chirurgies.

ABSTRACT.— We define a new differential invariant a compact manifold by $V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_g V_c(M, [g])$, where $V_c(M, [g])$ is the conformal volume of M for the conformal class $[g]$, and prove that it is uniformly bounded above. The main motivation is that this bound provides a upper bound of the Friedlander-Nadirashvili invariant defined by $\inf_g \sup_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1(M, \tilde{g}) \text{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{2}{n}}$.

The proof relies on the study of the behaviour of $V_{\mathcal{M}}(M)$ when one performs surgeries on M .

Keywords : first eigenvalue of Laplacian, conformal volume, surgeries.

MSC2000 : 58J50, 35P15

1. Introduction

Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n , on notera $\lambda_1(M, g)$ la première valeur propre du laplacien sur M pour la métrique g . Dans [FN99], L. Friedlander et N. Nadirashvili ont défini un nouvel invariant différentiable des variétés compactes en posant

$$\nu(M) = \inf_g \sup_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1(M, \tilde{g}) \text{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{2}{n}}, \quad (1.1)$$

où $[g] = \{h^2g, h \in C^\infty, h > 0\}$ désigne la classe conforme de la métrique riemannienne g . L'invariant $\nu(M)$ est bien défini car on sait que $\sup_{\tilde{g} \in [g]} \lambda_1(M, \tilde{g}) \text{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{2}{n}} < +\infty$ (voir [LY82], [ESI86] et [FN99]).

L'invariant $\nu(M)$ est très mal connu. En dimension 2, on peut déduire de [LY82] que $\nu(S^2) = 8\pi$ et $\nu(\mathbb{R}P^2) = 12\pi$ en utilisant le fait que ces deux surfaces n'ont qu'une seule classe conforme, et A. Girouard a montré dans [Gi] que $\nu(T^2) = \nu(K^2) = 8\pi$, où K^2 désigne la bouteille de Klein. Mais en dimension plus grande, on sait seulement que $\nu(M^n) \geq \nu(S^n) = n \text{Vol}(S^n, g_{\text{can}})^{\frac{2}{n}}$ (voir [FN99] et [CES03]).

L'objet de cet article est de montrer qu'à dimension fixée, l'invariant $\nu(M)$ est uniformément majoré :

Théorème 1.2. *Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour toute variété compacte M de dimension n , on a $\nu(M) < c$.*

La démonstration du théorème 1.2 s'appuie essentiellement sur des arguments géométriques et topologiques, ce qui contraste avec les résultats d'A. Girouard qui utilisent surtout des techniques d'analyse. En effet, le point de départ de la démonstration consiste à se ramener à un problème sur le volume conforme. Cet invariant conforme des variétés compactes est défini par

$$V_c(M, [g]) = \inf_{\substack{N \geq 1 \\ \varphi: (M, [g]) \hookrightarrow S^N}} \sup_{\gamma \in G_N} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (1.3)$$

l'application φ parcourant l'ensemble des immersions conformes de $(M, [g])$ dans S^N , et G_N désignant le groupe de Möbius de dimension N , c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes conformes de S^N . La propriété du volume conforme qui nous intéresse ici est qu'il permet de majorer uniformément la première valeur propre du laplacien sur une classe conforme :

Théorème 1.4. *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, alors*

$$\lambda_1(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \leq n V_c(M, [g])^{\frac{2}{n}}.$$

Ce théorème est démontré pour $n = 2$ dans [LY82], et généralisé en toute dimension par A. El Soufi et S. Ilias dans [ESI86].

On peut déduire immédiatement du théorème 1.4 la majoration $\nu(M) \leq n \cdot \inf_g V_c(M, [g])^{\frac{2}{n}}$. On est donc ramené à majorer l'invariant différentiel $V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_g V_c(M, [g])$, qu'on appellera *volume de Möbius* dans la suite de ce texte. Cette dénomination se justifie par le fait qu'on peut reformuler la définition de cet invariant par

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_{\varphi: M \hookrightarrow S^N} \sup_{\gamma \in G_N} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (1.5)$$

la différence avec le volume conforme étant que φ parcourt l'ensemble de toutes les immersions de M dans S^N sans restriction. La référence aux métriques et aux classes conformes sur M a donc disparu, seuls interviennent la métrique canonique de la sphère S^N et l'action du groupe de Möbius G_N .

On va donc montrer le

Théorème 1.6. *Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour toute variété compacte M de dimension n , on a $V_{\mathcal{M}}(M) < c$.*

L'idée de la démonstration consiste à étudier comment varie le volume de Möbius quand on pratique des chirurgies sur la variété. Nous distinguerons deux cas : dans la section 2 nous traiterons le cas de la dimension 2 en expliquant

les aspects géométriques de la démonstration, et dans la section 3 nous verrons le cas des dimensions plus grandes, pour lequel les aspects topologiques demandent plus de travail.

Notons qu'en dimension 2, le théorème 1.6 peut se déduire des travaux sur les immersions de surfaces dans $\mathbb{R}^3$. On définit la fonctionnelle de Willmore d'une surface Σ immergée dans $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{W}(\Sigma) = \int_{\Sigma} H^2 dv$, où H désigne la courbure moyenne de Σ . D'une part, P. Li et S. T. Yau obtiennent dans [LY82] l'inégalité $V_c(\Sigma) \leq \mathcal{W}(\Sigma)$ et d'autre part R. Kusner a montré dans [Ku89] que toute surface admet une immersion telle que $\mathcal{W}(\Sigma) < 16\pi$. Il en découle immédiatement que dans le théorème 1.6, on peut choisir $c(2) < 16\pi$.

Je remercie enfin Bernd Ammann pour plusieurs discussions instructives autour de la théorie du cobordisme.

2. Dimension 2

Nous allons d'abord reformuler la définition du volume de Möbius. Si γ est un élément quelconque de G_N et r une isométrie de la sphère S^N , alors $\text{Vol}(r \circ \gamma \circ \varphi(M)) = \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M))$ pour toute immersion φ de M dans S^N . On peut donc écrire

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_{\varphi: M \hookrightarrow S^N} \sup_{\gamma \in G'_N} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \quad (2.1)$$

où G'_N est une sous-ensemble de G_N (pas nécessairement un sous-groupe) tel que tout élément de G_N s'écrive sous la forme $r \circ \gamma$ avec $\gamma \in G'_N$ et $r \in \text{SO}(N)$.

Il existe plusieurs choix possibles pour G'_N , mais l'un d'entre eux est particulièrement adapté à la démonstration qui suit. En projetant stéréographiquement la sphère S^N sur $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$, on se ramène à considérer des immersion $\varphi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ en calculant les volumes pour la métrique $g_{S^N} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\text{eucl}}$ où g_{eucl} désigne la métrique euclidienne canonique. On peut alors choisir pour G'_N l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathbb{R}^N$ (voir le théorème 3.5.1 de [Be83]).

Supposons maintenant que $n = 2$. On va montrer que pour une surface compacte M donnée, on peut contrôler le volume de Möbius de la variété $\widetilde{M}$ obtenue par adjonction d'une anse à M en fonction du volume de Möbius de M . On pourra alors conclure par une récurrence sur le genre de la surface.

On commence par fixer un réel $\varepsilon > 0$ et choisir une immersion φ de M dans un espace $\mathbb{R}^N$ telle que

$$\sup_{\gamma \in G'_N} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) - \varepsilon \leq \text{Vol}(\varphi(M)) \leq V_{\mathcal{M}}(M) + \varepsilon, \quad (2.2)$$

c'est-à-dire que φ est proche de réaliser à la fois la borne supérieure et la borne inférieure dans la définition (2.1). On va construire une immersion $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{M}$ à partir de φ et chercher à contrôler $\text{Vol}(\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M}))$ pour tout $\gamma \in G'_N$.

La variété $\widetilde{M}$ est obtenue à partir de M par adjonction d'une anse. On obtient donc une immersion $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{M}$ en ajoutant une anse fine à $\varphi(M)$ (voir figure 1). Dans la suite, cette anse sera un tube centré sur un arc de courbe fixée et de rayon $\delta > 0$ variable. On peut en outre choisir cette courbe de sorte que l'anse ne coupe jamais $\varphi(M)$, quitte à choisir N suffisamment grand.

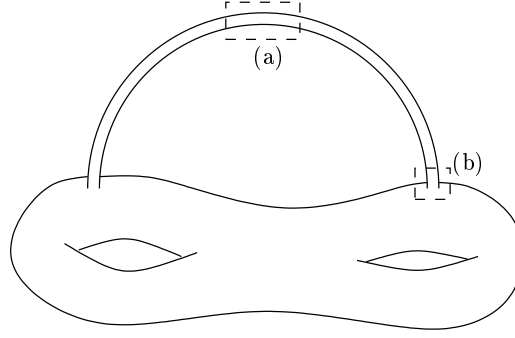


FIG. 1 –

On doit chercher à contrôler le volume de $\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M})$ pour tout $\gamma \in G'_N$. Pour cela, un élément crucial est le fait que si l'anse ou $\varphi(M)$ est projeté près du point ∞ sous l'action de γ , son volume devient négligeable pour la métrique g_{S^N} , même si le rapport d'homothétie de γ est grand : en effet, une homothétie de rapport R va multiplier l'aire euclidienne par R^2 , mais dans la formule $g_{S^N} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2} g_{\text{eucl}}$ la norme de x est de l'ordre de R pour les parties de $\widetilde{\varphi}(\widetilde{M})$ projeté près de l'infini et donc leur aire devient petite quand R devient grand.

Pour tout $\gamma \in G'_N$, on notera R_γ son rapport d'homothétie. Si on se donne une constante $R_0 > 0$, on peut trouver $\delta_0 > 0$ tel que si $\delta < \delta_0$ alors pour tout γ tel que $R_\gamma \leq R_0$ le volume de l'anse transportée par γ reste négligeable, c'est-à-dire que $\text{Vol}(\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) + \varepsilon$ et donc $\text{Vol}(\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq V_{\mathcal{M}}(M) + 3\varepsilon$ d'après (2.1). Si R_0 est suffisamment grand, l'argument précédent s'applique aussi pour $R_\gamma > R_0$ quand l'homothétie γ envoie l'anse près de l'infini, auquel cas son volume est aussi négligeable. Il reste donc à traiter la situation où $R_\gamma > R_0$ et qu'une partie de l'anse reste proche de l'origine, qui se scinde en deux cas : $\varphi(M)$ est envoyé près de l'infini par γ (c'est-à-dire qu'on fait un zoom sur (a) dans la figure 1), ou bien la partie de l'anse proche de l'origine est aussi proche du point d'attache à $\varphi(M)$ (zoom sur (b) dans la figure 1).

Dans le premier cas, on va comparer $\text{Vol}(\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M}))$ au volume d'un cylindre infini (figure 2). Notons $\mathcal{C}$ le cylindre d'équation $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et $x_4 = \dots = x_N = 0$ dans $\mathbb{R}^N$. Si R_0 est suffisamment grand par rapport à la courbure de l'anse, le volume de $\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M})$ peut être approché par celui d'un cylindre

homothétique à $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que

$$\text{Vol}(\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}) + \varepsilon, \quad (2.3)$$

où $V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}) = \sup_{\gamma' \in G'_N} \text{Vol}(\gamma'(\mathcal{C}))$.



FIG. 2 –

Dans le second cas, on peut choisir R_0 suffisamment grand par rapport à la courbure de l'anse et de $\varphi(M)$, de sorte qu'on puisse approcher le volume de $\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})$ par celui d'un plan privé d'un disque auquel on recolle un demi-cylindre (figure 3). On sait que le volume de ce plan pour la métrique sphérique est majoré par le volume de la sphère S^2 (voir [LY82] ou [ESI86]). On a donc dans ce cas la majoration

$$\text{Vol}(\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq 4\pi + V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}) + \varepsilon. \quad (2.4)$$

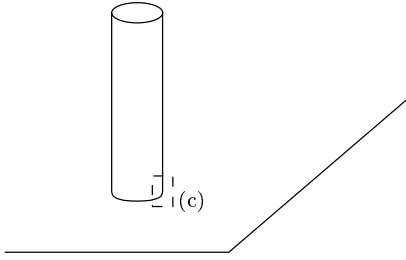


FIG. 3 –

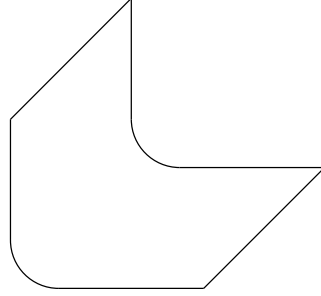


FIG. 4 –

Dans le cas précédent et dans la figure 3, on a considéré que l'immersion $\tilde{\varphi}$ n'est pas lisse au niveau de la jonction de l'anse. Étant donné un réel $R_1 \gg R_0$, on peut lisser $\tilde{\varphi}$ de sorte que les approximations faites précédemment restent valables tant que $R_\gamma \leq R_1$. On choisit R_1 suffisamment grand pour que si $R_\gamma > R_1$, la courbure du cylindre devienne négligeable. La zone (c) dans la figure 3 peut alors être représenté comme sur la figure 4 par deux demi-plans reliés par un quart de cylindre. le volume de $\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})$ peut alors être grossièrement majoré celui de deux plan et un cylindre, c'est-à-dire :

$$\text{Vol}(\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq 8\pi + V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}) + \varepsilon. \quad (2.5)$$

Finalement, quel que soit γ , on a

$$\text{Vol}(\gamma \circ \tilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq \sup \{V_{\mathcal{M}}(M), 8\pi + V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})\} + 3\varepsilon, \quad (2.6)$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Si on pose $c = 8\pi + V_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$, on a donc

$$\sup_{\gamma \in G'_N} \text{Vol}(\gamma \circ \widetilde{\varphi}(\widetilde{M})) \leq \sup \{V_{\mathcal{M}}(M), c\} \quad (2.7)$$

et par conséquent $V_{\mathcal{M}}(\widetilde{M}) \leq \sup \{V_{\mathcal{M}}(M), c\}$.

Comme toutes les surfaces compactes peuvent s'obtenir par adjonction d'anses à partir de la sphère et du plan projectif dont les volumes de Möbius sont inférieurs à c , on en déduit par une récurrence sur le genre de la surface que

$$V_{\mathcal{M}}(M) \leq c \quad (2.8)$$

pour toute surface compacte M .

3. Dimension supérieure ou égale à 3

La démonstration du théorème 1.6 dans le cas général se déroule de la même manière qu'en dimension 2. L'idée est d'étudier comment évolue de volume de Möbius quand on procède sur la variété à des chirurgies, ce qui généralise l'adjonction d'anse.

Plus précisément, si $S^k \hookrightarrow M^n$ est une sphère plongée dans M dont le fibré normal est trivial, on peut trouver un voisinage tubulaire de S^k difféomorphe à $S^k \times B^{n-k}$. Une chirurgie de le long de S^k consiste alors à construire une nouvelle variété $\widetilde{M}$ en privant M de ce voisinage tubulaire $S^k \times B^{n-k}$ et en recollant le long du bord ainsi créé la variété $B^{k+1} \times S^{n-k-1}$, ce procédé pouvant s'effectuer de manière lisse. On appelle degré de la chirurgie la dimension k de la sphère S^k . Par exemple, l'adjonction d'anse vue dans la partie précédente est une chirurgie de degré 0.

Sur le modèle du paragraphe précédent, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Soit $n \geq 3$ et $0 \leq k \leq n - 2$. Il existe une constante $c(n, k) > 0$ telle que si $\widetilde{M}$ est une variété obtenue par chirurgie de degré k sur une variété compacte M de dimension n , alors $V_{\mathcal{M}}(\widetilde{M}) \leq \sup \{V_{\mathcal{M}}(M), c\}$.*

Nous ne détaillerons pas la démonstration car c'est la même qu'en dimension 2 : après avoir choisi une sphère $S^k \hookrightarrow M$ à fibré normal trivial et une immersion $\varphi(M)$ vérifiant (2.2), on obtient une immersion $\widetilde{\varphi}(\widetilde{M})$ en enlevant à $\varphi(M)$ un voisinage tubulaire de $\varphi(S^k)$ de rayon δ et en recollant le long du bord une anse $B^{k+1} \times S^{n-k-1}(\delta)$. Le rôle du cylindre $\mathcal{C}$ est joué par le produit $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$. On voit que pour que le volume de l'anse tende vers zéro quand $\delta \rightarrow 0$, il est indispensable que la sphère S^{n-k-1} soit de dimension au moins 1. C'est la raison pour laquelle on a exclu le cas $k = n - 1$ dans la proposition 3.1.

Des arguments classiques de la théorie du cobordisme permettent maintenant de déterminer quels variétés on peut obtenir à partir d'une variété donnée à l'aide de chirurgie de degré au plus $n - 2$. Rappelons que deux variétés compactes (pas nécessairement connexes) M_1 et M_2 de dimension n sont

cobordantes s'il existe une variété à bord W de dimension $n + 1$ dont le bord est l'union disjointe de $M_1 \sqcup M_2$ et que la relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des variétés compactes. Plus précisément, on appelle *cobordisme non orienté* cette relation. Nous aurons besoin en outre d'une autre notion de cobordisme, appelée *cobordisme orienté* définie uniquement sur les variétés orientées : une orientation sur la variété à bord W induit une orientation sur son bord, deux variétés orientées M_1 et M_2 de dimension n sont alors cobordantes s'il existe une variété orientée W dont le bord est la réunion de M_1 et $-M_2$, $-M$ désignant la variété M munie de son orientation opposée. Rappelons aussi que deux variétés orientées peuvent être cobordantes au sens du cobordisme non orienté sans l'être au sens du cobordisme orienté. Dans la suite de ce texte, les cobordismes entre variétés orientables seront toujours considérés au sens orienté.

La démonstration du théorème 1.6 va se poursuivre en traitant de manière analogue, mais distincte, les cas des variétés orientables et non orientables.

Proposition 3.2. *Soit M_1 et M_2 deux variétés connexes compactes de même dimension $n \geq 3$. Si M_1 et M_2 sont cobordantes et toutes deux orientables (resp. non orientables), alors M_2 peut être obtenue à partir de M_1 par une suite finie de chirurgies de degré au plus $n - 2$.*

Démonstration : Dans le cas orientable, le résultat découle classiquement de la théorie du h -cobordisme (voir la proposition 4.3 de [ADH06]).

Je n'ai pas trouvé trace du cas non orientable dans la littérature, mais il s'avère qu'on peut en donner une démonstration plus directe que dans le cas orientable. Si deux variétés sont cobordantes, on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie de chirurgies, on peut en outre pratiquer ces chirurgies dans un ordre de degré croissant ([Ko07], ch. VII, théorème 9). Une variété non orientable reste non orientable après des chirurgies de degré 0 à $n - 2$, on peut donc se ramener au cas où on peut passer de M_1 à M_2 uniquement par des chirurgies de degré $n - 1$. On va montrer que ces chirurgies de degré $n - 1$ peuvent être remplacées par des chirurgies de degré 1.

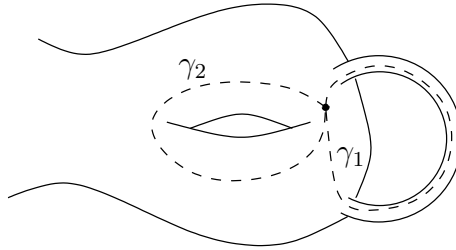


FIG. 5 –

Remarquons d'abord que l'opération inverse d'une chirurgie de degré k est une chirurgie de degré $n - k - 1$. En partant de M_2 , on peut donc obtenir M_1 en pratiquant des chirurgies de degré 0, c'est-à-dire en ajoutant des anses.

Ces chirurgies peuvent *a priori* être de deux types, orientable (comme celle qui permet de passer de S^2 à T^2) ou non orientable (comme pour passer de S^2 à K^2). Dans le premier cas, on peut détruire l'anse à l'aide du lemme d'élimination de Smale (voir [Ko07], ch. VI, théorème 7.4) en pratiquant une chirurgie le long d'un cercle γ_1 traversant l'anse comme sur la figure 5. Dans le cas non orientable, le lacet γ_1 n'est *a priori* pas orientable (c'est-à-dire que son fibré normal n'est pas trivial et par conséquent son voisinage tubulaire n'est pas un produit $S^1 \times B^{n-1}$) et ne permet donc pas de chirurgie. Mais comme M_2 est non orientable, on peut trouver un second lacet non orientable γ_2 dans M_1 qui est indépendant de l'anse, le lacet $\gamma_1 + \gamma_2$ est alors orientable et permet une chirurgie qui supprime l'anse. ■

On déduit aisément des propositions 3.1 et 3.2 que le volume de Möbius est uniformément majoré sur une classe de cobordisme orienté et sur l'ensemble des variétés non orientables d'une classe de cobordisme non orienté.

Il reste à montrer qu'à dimension fixée, on peut trouver dans les deux cas un majorant indépendant de la classe de cobordisme. Le cas non orientable est le plus simple : R. Thom a entièrement déterminé dans [Th54] l'ensemble des classes de cobordisme non orienté (théorème IV.12), en particulier, il n'y en a qu'un nombre fini à dimension fixée.

Dans le cas orientable, on utilisera le fait que l'ensemble Ω_n des classes de cobordisme de dimension n peut être muni d'une structure de groupe abélien en posant $M_1 + M_2 = M_1 \sqcup M_2$ (l'élément neutre étant la classe de la sphère). R. Thom a aussi montré dans [Th54] que ce groupe est de type fini (théorème IV.15), il suffit donc de majorer le volume de Möbius d'une somme de variétés.

Proposition 3.3. *Si M_1 et M_2 deux variétés compactes de même dimension $n \geq 3$ alors $V_{\mathcal{M}}(M_1 \sqcup M_2) \leq \sup(V_{\mathcal{M}}(M_1), V_{\mathcal{M}}(M_2))$.*

Démonstration : On se donne deux immersions φ_i , $i = 1, 2$ de M_i dans une même espace $\mathbb{R}^N$ muni de la métrique sphérique, pour un entier N suffisamment grand, telles que

$$\sup_{\gamma \in G'_N} \text{Vol}(\gamma \circ \varphi_i(M_i)) - \varepsilon \leq \text{Vol}(\varphi_i(M_i)) \leq V_{\mathcal{M}}(M_i) + \varepsilon. \quad (3.4)$$

On se donne par ailleurs une translation $t_{\vec{v}}$ de vecteur $\vec{v}$, et on définit une immersion $\varphi : M_1 \sqcup M_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ en posant $\varphi|_{M_1} = \varphi_1$ et $\varphi|_{M_2} = t_{\vec{v}} \circ \varphi_2$.

Si $\vec{v}$ est suffisamment grand, le volume de $\varphi|_{M_2}$ est négligeable et on a $\text{Vol}(\varphi(M)) \leq \text{Vol}(\varphi_1(M_1)) + \varepsilon$. Si on se donne un élément $\gamma \in G'_N$ on a $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M_1)) \leq \text{Vol}(\varphi_1(M_1)) + \varepsilon$, et tant que $\gamma \circ \varphi(M_2)$ reste près de l'infini, son volume est négligeable.

Si $\gamma \circ \varphi(M_2)$ se rapproche de l'origine, deux situations peuvent se produire. La première est que $\gamma \circ \varphi(M_1)$ est envoyé près de l'infini, et on a alors

$$\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) \leq \text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M_2)) + \varepsilon \leq V_{\mathcal{M}}(M_2) + 3\varepsilon. \quad (3.5)$$

La seconde possibilité est que $\gamma \circ \varphi(M_1)$ et $\gamma \circ \varphi(M_2)$ soient tous les deux proches de l'origine, mais alors le rapport d'homothétie de γ est petit et le volume des deux immersions est négligeable.

Dans tous les cas, on a bien $\text{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)) \leq \sup(V_{\mathcal{M}}(M_1), V_{\mathcal{M}}(M_2)) + 3\varepsilon$.

■

À partir d'une majoration du volume de Möbius sur des représentants des générateurs du groupe de cobordisme orienté, on obtient donc cette majoration sur des représentants de toutes les classes de cobordisme.

Références

- [ADH06] B. AMMANN, M. DAHL et E. HUMBERT – « Surgery and harmonic spinors », prépublication, 2006, math.DG/0606224.
- [Be83] A. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Springer Verlag, 1983.
- [CES03] B. COLBOIS et A. EL SOUFI – « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the “conformal spectrum” », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.
- [ESI86] A. EL SOUFI et S. ILIAS – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.
- [FN99] L. FRIEDLANDER et N. NADIRASHVILI – « A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian », *Internat. Math. Res. Notices*, 17, p. 939–952, 1999.
- [Gi] A. GIROUARD – « Fundamental tone, concentration of density to points and conformal degeneration on surfaces », *Canad. J. Math.*, à paraître, math.SP/0510279.
- [Ko07] A. KOSINSKI – *Differential manifolds*, Dover publications, 2007.
- [Ku89] R. KUSNER – « Comparison surfaces for the Willmore problem », *Pacific J. Math.*, 138 (2), p. 317–345, 1989.
- [LY82] P. LI et S.T. YAU – « A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces », *Invent. Math.*, 69 (2), p. 269–291, 1982.
- [Th54] R. THOM – « Quelques propriétés globales des variétés différentiables », *Comment. Math. Helv.*, 28, p. 17–86, 1954.

Pierre JAMMES
 Université d'Avignon
 laboratoire de mathématiques
 33 rue Louis Pasteur
 F-84000 Avignon
 Pierre.Jammes@univ-avignon.fr