

Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$. Pour toute classe conforme C de métriques riemanniennes sur M , on pose $\mu_k^c(M, C) = \inf_{g \in C} \mu_{[\frac{n}{2}], k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$, où $\mu_{p, k}(M, g)$ est la k -ième valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les p -formes coexactes. On démontre que $0 < \mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, [g_{\text{can}}]) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, [g_{\text{can}}])$. On montre aussi que si $n = 0, 2, 3 \bmod 4$ et si g est une métrique lisse telle que $\mu_{[\frac{n}{2}], 1}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = \mu_1^c(M, [g])$, alors il existe une forme propre non nulle de degré $[\frac{n-1}{2}]$ et de valeur propre $\mu_1^c(M, [g])$ qui est de longueur constante. En conséquence, il n'existe pas de métrique extrémale lisse si $n = 4$ et que la caractéristique d'Euler de M est non nulle.

Mots-clefs : formes différentielles, laplacien, métriques conformes, métriques extrémales, inégalités de Sobolev.

ABSTRACT.— Let M^n be an n -dimensional compact manifold, with $n \geq 3$. For any conformal class C of riemannian metrics on M , we set $\mu_k^c(M, C) = \inf_{g \in C} \mu_{[\frac{n}{2}], k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$, where $\mu_{p, k}(M, g)$ is the k -th eigenvalue of the Hodge Laplacian acting on coexact p -forms. We prove that $0 < \mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, [g_{\text{can}}]) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, [g_{\text{can}}])$. We also prove that if g is a smooth metric such that $\mu_{[\frac{n}{2}], 1}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = \mu_1^c(M, [g])$, and $n = 0, 2, 3 \bmod 4$, then there is a non-zero corresponding eigenform of degree $[\frac{n-1}{2}]$ with constant length. As a corollary, on a 4-manifold with non vanishing Euler characteristic, there is no such smooth extremal metric.

Keywords : differential forms, Laplacian, conformal metrics, extremal metrics, Sobolev inequalities.

MSC2000 : 35P15, 58J50

1. Introduction

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe orientable de dimension n . On considère le laplacien de Hodge-de Rham agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p -formes différentielles sur M et défini par $\Delta = d\delta + \delta d$ où la codifférentielle δ est l'adjoint L^2 de d . Le spectre de cet opérateur forme un ensemble discret de nombres positifs ou nuls qu'on notera

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots,$$

où la multiplicité de $\lambda_{p,0}(M, g)$ est le p -ième nombre de Betti de M , les autres valeurs propres étant répétée s'il y a multiplicité.

L'étude du laplacien agissant sur les fonctions, c'est-à-dire du cas $p = 0$, montre que pour $n \geq 3$ et à volume fixé, on peut choisir la métrique de manière à rendre les valeurs propres arbitrairement grande (voir [CD94]), mais que ce n'est pas le cas si on impose à la métrique d'appartenir à une classe conforme donnée, c'est-à-dire que si C est une classe conforme de métrique riemannienne sur M , alors

$$\sup_{g \in C} \lambda_{0,k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} < +\infty, \text{ pour tout } k. \quad (1.1)$$

Cette majoration a été démontrée par A. El Soufi et S. Ilias pour $k = 1$ ([ESI86]), et généralisée par N. Korevaar dans [Ko93]. On peut par ailleurs facilement montrer que $\inf_{g \in C} \lambda_{0,k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = 0$.

Le laplacien agissant sur les formes différentielles de degré quelconque a été moins étudié. B. Colbois et A. El Soufi ont cependant montré récemment que l'inégalité (1.1) ne se généralise pas :

Théorème 1.2 ([CES06]). *Si M est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$ et C une classe conforme sur M , alors*

$$\sup_{g \in C} \inf_{2 \leq p \leq n-2} \lambda_{p,1}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = +\infty. \quad (1.3)$$

Comme la différentielle d commute avec le laplacien, le spectre des 1-formes contient le spectre des fonctions, on peut donc majorer $\lambda_{1,k}$ comme dans (1.1), et il en va de même pour les $n - 1$ formes par dualité de Hodge.

Le théorème 1.2 conduit naturellement à se demander si on peut faire tendre les valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham vers zéro dans une classe conforme et à volume fixé, comme c'est le cas pour les fonctions :

Question 1.4 ([Co04]). *Étant donnés $2 \leq p \leq n - 2$ et $k \geq 1$, a-t-on*

$$\inf_{g \in C} \lambda_{p,k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = 0 ? \quad (1.5)$$

On montre — entre autres choses — dans [Ja06] que la réponse est positive pour tout p et k si la dimension n est impaire, et pour tout k et tout $p \neq \frac{n}{2}$ si n est pair. Plus précisément, si on se restreint aux formes différentielles coexactes, la technique utilisée échoue en degré $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} - 1$ si la dimension est paire, et en degré $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ si la dimension est impaire, la question 1.4 restant ouverte dans ces cas.

Nous allons ici achever de répondre à la question 1.4 en montrant que dans les cas restants, on peut en fait minorer uniformément le spectre des formes coexactes, le volume et la classe conforme étant fixés, par une constante strictement positive. La réponse à la question 1.4 dépend donc en général du degré p .

Nous nous appuyeront sur l'existence d'inégalités de Sobolev pour les formes différentielles, et en particulier de l'inégalité suivante, dont on peut trouver la démonstration dans [GT06] :

Théorème 1.6. *Soit (M, g) une variété compacte de dimension n , et $r, s \in]1, +\infty[$ deux réels tels que $1/s - 1/r = 1/n$. Il existe une constante $c(M, g, r, s) > 0$ telle que pour toute p -forme $\theta \in \Omega^p(M, g)$, on a*

$$\inf_{d\zeta=0} \|\theta - \zeta\|_{L^r} \leq c \|d\theta\|_{L^s}. \quad (1.7)$$

Remarque 1.8. La démonstration donnée dans [GT06] étant en grande partie non constructive, elle ne fournit aucune estimée de la constante c .

Dans le cas où $r = \frac{n}{p}$ et $s = \frac{n}{p+1}$, les normes $\|\theta - \zeta\|_r$ et $\|d\theta\|_s$ sont conformément invariantes, et donc la constante c optimale dans l'inégalité (1.7) en restriction aux p -formes est un invariant conforme, qu'on notera

$$K_p(M, [g]) = \sup_{\theta \in \Omega^p(M)} \inf_{d\zeta=0} \frac{\|\theta - \zeta\|_{\frac{n}{p}}}{\|d\theta\|_{\frac{n}{p+1}}}, \quad (1.9)$$

où $[g] = \{h^2 g, h \in C^\infty(M), h > 0\}$ désigne la classe conforme de g .

On va donner une minoration uniforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham en fonction de la constante K_p . On notera $0 < \mu_{p,1}(M, g) \leq \mu_{p,2}(M, g) \leq \dots$ le spectre du laplacien en restriction aux p -formes coexactes. Rappelons que la spectre non nul $(\lambda_{p,k}(M, g))_{k \geq 1}$ du laplacien sur les p -formes est la réunion des spectres $(\mu_{p,k}(M, g))$ et $(\mu_{p-1,k}(M, g))$.

Théorème 1.10. *Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$, C une classe conforme de métriques sur M . Pour toute métrique $g \in C$, on a*

$$\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \geq K_{[\frac{n}{2}]}(M, C)^{-2}.$$

Si n est pair, cette inégalité est optimale.

Remarque 1.11. La théorie de Hodge nous dit que si n est pair, alors $\mu_{\frac{n}{2}-1,i}(M, g) = \mu_{\frac{n}{2},i}(M, g)$ pour tout $i \geq 1$. Comme on l'a déjà remarqué, pour tous les autres degrés p , on sait faire tendre $\mu_{p,i}(M, g)$ vers zéro à volume fixé dans la classe conforme C . On a donc bien complètement répondu à la question 1.4.

Dans [CES03] B. Colbois et A. El Soufi définissent un « spectre conforme » pour les fonctions par $\lambda_k^c(M, C) = \sup_{g \in C} \lambda_{0,k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$. On peut définir de la même manière un spectre conforme pour les formes différentielles par

$$\mu_k^c(M, C) = \inf_{g \in C} \mu_{[\frac{n}{2}],k}(M, g) \text{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}. \quad (1.12)$$

Le théorème 1.10 soulève naturellement la question de l'existence de métriques lisses réalisant $\mu_k^c(M, C)$, en particulier pour $k = 1$. On peut établir le critère suivant :

Théorème 1.13. *Soit g une métrique lisse de volume 1 sur M telle que $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M, g) = \mu_1^c(M, [g])$. Si $n = 3 \bmod 4$, alors il existe une $[\frac{n}{2}]$ -forme propre coexacte non nulle de valeur propre $\mu_1^c(M, [g])$ et de longueur constante. Si n est pair, toutes les formes propres coexacte de degré $\frac{n}{2} - 1$ et de valeur propre $\mu_1^c(M, [g])$ sont de longueur constante.*

Remarque 1.14. On sait que pour les fonctions, la métrique canonique de la sphère maximise la première valeur propre dans sa classe conforme ([ESI86]). En revanche les premières formes propres des formes différentielles pour cette métrique ne sont pas de longueur constante (voir l'appendice de [GM75]). En général, les métriques extrémales ne sont donc pas les mêmes pour les formes et les fonctions.

On peut déduire du théorème 1.13 qu'en dimension 4, il y a une obstruction topologique à l'existence de métriques réalisant l'infimum $\mu_1^c(M, C)$:

Corollaire 1.15. *Si M est une variété compacte de dimension 4 et de caractéristique d'Euler non nulle, il n'existe pas de métrique régulière g de volume 1 telle que $\mu_{1,1}(M, g) = \mu_1^c(M, [g])$.*

On ne connaît pas d'obstruction de ce type pour les fonctions.

Enfin, on va donner une majoration du spectre conforme $(\mu_k^c(M, C))_{k \geq 1}$:

Théorème 1.16. *Pour toute classe conforme C sur la variété compacte M et tout $k \geq 1$, on a*

$$\mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}}) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, C_{\text{can}}),$$

où C_{can} est la classe conforme de la métrique canonique de la sphère.

Il existe une minoration semblable à celle du théorème 1.10 pour l'opérateur de Dirac (voir [Lo86] et [Am03b]). L'étude de métriques extrémales pour cet opérateur a été développée par B. Ammann dans [Am03a], où il montre entre autres l'optimalité de l'équivalent spinoriel du théorème 1.10. Cependant, les techniques utilisées ne sont en général pas immédiatement transposables au cas des formes différentielles ; en particulier l'évolution de l'opérateur de Dirac au cours d'une déformation conforme s'exprime beaucoup plus simplement que celle du laplacien de Hodge-de Rham.

Les théorèmes 1.10 et 1.13 et le corollaire 1.15 seront démontrés dans la section 2 et le théorème 1.16 dans la section 3.

2. Extremum du spectre

On va voir ici comment la constante de Sobolev K_p définie en (1.9) permet de minorer le spectre.

Démonstration du théorème 1.10 : Pour commencer, on considérera le cas où la dimension n est paire.

Soit θ une forme propre coexacte de degré $\frac{n}{2}$, de valeur propre λ . On sait que $\|\mathrm{d}\theta\|_2^2 = \lambda\|\theta\|_2^2$, et en supposant que la métrique g sur M est de volume 1, on peut en outre écrire $\|\mathrm{d}\theta\|_2^2 \geq \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2}}^2$ (inégalité de Hölder). L'inégalité de Sobolev (1.7), en conjonction avec le fait que θ minimise la norme L^2 parmi les primitives de $\mathrm{d}\theta$, assure alors que

$$\begin{aligned} \|\theta\|_2^2 &\leq K_{\frac{n}{2}}(M, [g])^2 \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2}}^2 \leq K_{\frac{n}{2}}(M, [g])^2 \|\mathrm{d}\theta\|_2^2 \\ &\leq K_{\frac{n}{2}}(M, [g])^2 \lambda \|\theta\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

On a donc bien $\lambda \geq K_{\frac{n}{2}}(M, [g])^{-2}$.

En dimension paire, on peut aussi montrer que cette minoration est optimale. Soit $\varepsilon > 0$, et θ une $\frac{n}{2}$ -forme coexacte telle que $\|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2}} = 1$ et

$$K_{\frac{n}{2}}(M, [g]) - \varepsilon \leq \|\theta\|_2 \leq K_{\frac{n}{2}}(M, [g]). \quad (2.2)$$

Supposons dans un premier temps que la forme $\mathrm{d}\theta$ soit partout non nulle. Sa longueur est donc partout non nulle et on peut définir une nouvelle métrique par $g_h = h^2 g$ avec $h = |\mathrm{d}\theta|^{\frac{2}{n+2}}$; on notera $|\cdot|_h$ et $\|\cdot\|_{p,h}$ les normes ponctuelle et L^p pour cette métrique. Le volume pour la nouvelle métrique est $\mathrm{Vol}(M, g_h) = \int_M h^n \mathrm{d}v_g = \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2}}^{\frac{2n}{n+2}} = 1$, et surtout la longueur de la forme $\mathrm{d}\theta$ pour la métrique g_h est constante : en effet, $|\mathrm{d}\theta|_h = h^{-(\frac{n}{2}+1)} |\mathrm{d}\theta| = 1$. La forme θ étant de degré $\frac{n}{2}$, elle est coexacte quel que soit le choix de la métrique dans $[g]$, on peut donc facilement majorer $\mu_{\frac{n}{2},1}(M, g_h)$ à l'aide de son quotient de Rayleigh :

$$\mu_{\frac{n}{2},1}(M, g_h) \leq \frac{\|\mathrm{d}\theta\|_{2,h}^2}{\|\theta\|_{2,h}^2} = \frac{\|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2},h}^2}{\|\theta\|_{2,h}^2} \leq (K_{\frac{n}{2}}(M, [g]) - \varepsilon)^{-2}. \quad (2.3)$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient bien que $\mu_1^c(M, [g]) = K_{\frac{n}{2}}(M, [g])^{-2}$.

Si la forme $\mathrm{d}\theta$ s'annule quelque part, on doit modifier légèrement la démonstration. On se donne un réel $\delta > 0$ et on pose $h = (|\mathrm{d}\theta| + \delta)^{\frac{2}{n+2}}$. On a alors $|\mathrm{d}\theta|_h = \frac{|\mathrm{d}\theta|}{|\mathrm{d}\theta| + \delta} \leq 1$, et donc $\|\mathrm{d}\theta\|_{2,h} \leq \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+2},h}$. Comme $\mathrm{Vol}(M, g_h) \rightarrow 1$ quand $\delta \rightarrow 0$, on retrouve l'inégalité (2.3) en passant à la limite.

Considérons maintenant la situation où n est impaire. Soit θ une forme propre coexacte de degré $[\frac{n}{2}]$ et de valeur propre λ . Par définition de K_p ,

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une forme θ' de degré $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ telle que $\|\theta'\|_{\frac{2n}{n-1}} \leq (K_{\frac{n}{2}}(M, [g]) + \varepsilon) \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+1}}$. On a par conséquent

$$\begin{aligned} \|\theta\|_2^2 &\leq \|\theta'\|_2^2 \leq \|\theta'\|_{\frac{2n}{n-1}}^2 \leq (K_{\frac{n}{2}}(M, [g]) + \varepsilon)^2 \|\mathrm{d}\theta\|_{\frac{2n}{n+1}}^2 \\ &\leq (K_{\frac{n}{2}}(M, [g]) + \varepsilon)^2 \|\mathrm{d}\theta\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient la même conclusion qu'en dimension paire. ■

On va maintenant établir le critère du théorème 1.13 pour l'existence de métriques extrémales.

Démonstration du théorème 1.13 : On se donne une métrique g sur M de volume 1 telle que $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}(M, g) = \mu_1^c(M, [g])$. On va ici encore donner deux démonstrations distinctes selon la parité de la dimension.

Dans le cas où la dimension n est paire, il est commode de raisonner sur la longueur de formes propres exactes de degré $\frac{n}{2} + 1$ et de conclure par dualité de Hodge : si θ est une forme propre coexacte de degré $\frac{n}{2} - 1$, alors $*\theta$ est une forme propre exacte de degré $\frac{n}{2} + 1$ de même longueur et de même valeur propre.

Considérons donc une forme propre exacte ω de degré $\frac{n}{2} + 1$ et de valeur propre $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}(M, g)$, et notons φ la forme propre coexacte de degré $\frac{n}{2}$ telle que $\mathrm{d}\varphi = \omega$. On va étudier les variations du quotient de Rayleigh de φ pour des petites déformations conformes de la métrique. On se donne une fonction $u \in C^\infty(M)$, et on définit pour tout $\varepsilon > 0$ la métrique $g_\varepsilon = (1 + \varepsilon u)^2 g$. On peut imposer les conditions de normalisation que le volume reste constant au 1^{er} ordre par rapport à ε c'est-à-dire que $\int_M u \mathrm{d}v_g = 0$, et que $\|\varphi\|_2 = 1$.

Comme φ est de degré $\frac{n}{2}$, elle reste coexacte et de norme 1 quel que soit ε . Le développement de son quotient de Rayleigh est

$$\begin{aligned} R_{g_\varepsilon}(\varphi) &= \|\omega\|_{2, \varepsilon}^2 = \int_M |\omega|_{g_\varepsilon}^2 \mathrm{d}v_{g_\varepsilon} = \int_M |\omega|^2 (1 + \varepsilon u)^{-2} \mathrm{d}v_g \\ &= \int_M |\omega|^2 \mathrm{d}v_g - 2\varepsilon \int_M u |\omega|^2 \mathrm{d}v_g + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comme la métrique g minimise $\mu_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1}(M, g)$ parmi les métriques de volume 1 dans sa classe conforme, le terme d'ordre 1 du développement précédent est nul, c'est-à-dire que $\int_M u |\omega|^2 \mathrm{d}v_g = 0$, quelle que soit la fonction u d'intégrale nulle, ce qui n'est possible que si $|\omega|$ est constant.

Traitions maintenant le cas où $n = 3 \bmod 4$. On va en fait raisonner sur l'opérateur $(*\mathrm{d})$ agissant sur l'espace des formes coexactes de degré $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. C'est un opérateur autoadjoint qui est une racine carrée du laplacien et qui laisse stable les espaces propres de Δ . Pour chaque valeur propre μ du laplacien sur cet espace, l'espace propre associé est donc un espace propre de $(*\mathrm{d})$ ou se décompose en la somme orthogonale de deux espaces propres de $(*\mathrm{d})$ de

valeurs propres $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$. Une forme propre φ de $(\ast d)$ a la particularité de vérifier $|\mathrm{d}\varphi| = \sqrt{\mu}|\varphi|$ en tout point. On note ω une forme propre coexacte du laplacien de norme 1, de valeur propre $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M, g)$ et qui est aussi forme propre de $(\ast d)$, et on va calculer le développement au 1^{er} ordre du quotient de Rayleigh (pour le laplacien) de ω par rapport à ε .

Remarquons d'abord qu'au 1^{er} ordre, la norme $\|\delta\omega\|_{g_\varepsilon}^2$ est nulle : en effet, $\|\delta\omega\|_{g_\varepsilon} = \|\mathrm{d} \ast_{g_\varepsilon} \omega\|_{g_\varepsilon} = \|\mathrm{d}[(1 + \varepsilon u) \ast_g \omega]\|_{g_\varepsilon} = \varepsilon \|(1 + \varepsilon u)^{-1} \mathrm{d}u \wedge \ast\omega\|_g$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} R_{g_\varepsilon}(\omega) &= \frac{\|\mathrm{d}\omega\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\omega\|_{g_\varepsilon}^2} + o(\varepsilon) \\ &= \frac{\int_M |\mathrm{d}\omega|_g^2 (1 + \varepsilon u)^{-1} \mathrm{d}v_g}{\int_M |\omega|_g^2 (1 + \varepsilon u) \mathrm{d}v_g} + o(\varepsilon) \\ &= \|\mathrm{d}\omega\|_g^2 - \varepsilon \int_M u(|\mathrm{d}\omega|^2 + \|\mathrm{d}\omega\|^2 |\omega|^2) \mathrm{d}v_g. \end{aligned} \quad (2.6)$$

On conclut comme dans le cas de la dimension paire en utilisant le fait que $|\mathrm{d}\omega|^2 = \|\mathrm{d}\omega\|^2 |\omega|^2$ en tout point. ■

Remarque 2.7. Si $n = 1 \bmod 4$, la démonstration précédente n'est pas valide car l'opérateur $(\ast d)$ n'est pas autoadjoint.

Démonstration du corollaire 1.15 : Il suffit de remarquer qu'en dimension 4, l'existence d'une métrique extrémale implique l'existence d'une 1-forme partout non nulle, et donc que la caractéristique d'Euler est nulle. ■

3. Majoration du spectre conforme

Pour finir, nous allons démontrer les majorations du spectre conforme énoncées dans l'introduction.

Démonstration du théorème 1.16 : Pour démontrer l'inégalité $\mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$, on va montrer qu'on peut faire tendre le spectre et le volume de M vers celui d'une sphère dans la classe conforme C . On s'appuiera sur un théorème de convergence de spectre obtenu par C. Anné et B. Colbois dans [AC95] pour les variétés compactes reliées par des anses fines qu'on appliquera à la variété M reliée par une anse à une sphère (voir figure 1).

Plus précisément, on considère une métrique $g \in C$ sur M telle que $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M, g) > \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$ (le volume de g n'importe pas à ce stade de la démonstration, et on aura seulement besoin pour conclure qu'on peut le choisir arbitrairement petit), et pour tout réel $\delta > 0$ et tout entier $k \geq 1$, on se donne une métrique $g_{k,\delta}$ sur la sphère S^n conforme à la métrique canonique telle que $\mu_{[\frac{n}{2}],k}(S^n, g_{k,\delta}) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}}) + \delta$ et $\text{Vol}(S^n, g_{k,\delta}) = 1$.

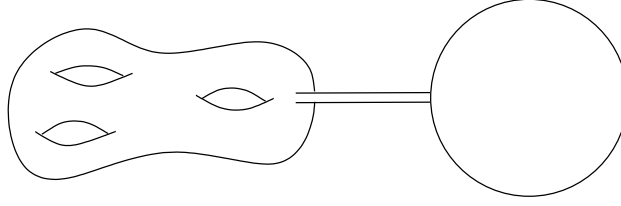


FIG. 1 –

On fixe deux points $x \in M$ et $y \in S^n$ qui seront les points d'attache de l'anse, et on déforme les métriques g et $g_{k,\delta}$ en des métriques g_δ et $g'_{k,\delta}$ telles que g_δ (resp. $g'_{k,\delta}$) soit euclidienne sur une boule de centre x (resp. y) et de rayon δ et que $g'_{k,\delta}$ soit conforme à $g_{k,\delta}$ (c'est possible puisque la métrique canonique de la sphère est conformément plate). En suivant un procédé déjà utilisé dans [CES06] et [Ja06], on déforme ensuite la métrique sur la boule euclidienne de centre x afin d'obtenir la figure 1 : pour tout $0 < \varepsilon \leq \delta$, on définit une fonction $h_{1,\varepsilon}$ sur M par $h_{1,\varepsilon} = 1$ en dehors de la boule de centre x , et

$$h_{1,\varepsilon}(r) = \begin{cases} e^{\frac{L}{\varepsilon}} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}}, \\ \frac{\varepsilon}{r} & \text{si } \varepsilon e^{-\frac{L}{\varepsilon}} \leq r \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{si } \varepsilon \leq r \leq \delta, \end{cases} \quad (3.1)$$

où r est la coordonnée radiale sur la boule $B(x, \delta)$. Si on munit M de la métrique $h_{1,\varepsilon}^2 g_\delta$, la boule $B(x, \varepsilon)$ devient isométrique à la réunion d'un cylindre de longueur L et d'une boule euclidienne de rayon ε reposant sur le bord du cylindre. On peut projeter stéréographiquement — donc de manière conforme — cette boule sur une calotte sphérique reposant sur le bord du cylindre et donc trouver une fonction $h_{2,\varepsilon}$ telle que $(M, h_{2,\varepsilon}^2 g_\delta)$ soit la variété de la figure 1. Comme la métrique $g'_{k,\delta}$ sur la sphère est conforme à la métrique canonique, on peut trouver une fonction $h_{3,\varepsilon}$ telle que $(M, h_{3,\varepsilon}^2 g_\delta)$ soit la variété obtenue en reliant (M, g_δ) et $(S^n, g'_{k,\delta})$ par une anse de longueur L et de rayon ε reposant sur les bords des boules de centre x et y et de rayon ε . Le théorème B de [AC95] nous dit alors que $(\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M, h_{3,\varepsilon}^2 g_\delta))_{i \geq 1}$ tend vers la réunion de $(\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M, g_\delta))_{i \geq 1}$ et $(\mu_{[\frac{n}{2}],i}(S^n, g'_{k,\delta}))_{i \geq 1}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (dans [AC95], le résultat de convergence concerne les valeurs propres $\lambda_{p,1}$ et fait intervenir des valeurs propres pour les 1-formes qui sont fonction de la longueur L de l'anse, mais on peut en déduire par théorie de Hodge la convergence en restriction aux formes coexactes et que les 1-formes propres liées à l'anse sont nécessairement exactes).

On peut choisir les métriques g_δ et $g'_{k,\delta}$ telles que $\tau(\delta)^{-1} g_\delta \leq g \leq \tau(\delta) g_\delta$ et $\tau(\delta)^{-1} g'_{k,\delta} \leq g_{k,\delta} \leq \tau(\delta) g'_{k,\delta}$ avec $\tau(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. Un résultat de J. Dodziuk ([Do82], théorème 3.3) permet alors d'affirmer que $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M, g_\delta) \rightarrow \mu_{[\frac{n}{2}],i}(M, g)$ et $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(S^n, g'_{k,\delta}) \rightarrow \mu_i^c(S^n, C_{\text{can}})$ pour tout

$i \geq 1$ quand $\delta \rightarrow 0$. On peut donc trouver une suite de fonctions (h_δ) telle que $\mu_{[\frac{n}{2}],k}^c(M, h_\delta^2 g_\delta) \rightarrow \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$ quand $\delta \rightarrow 0$ (on utilise le fait que le spectre de (M, g) est minoré par $\mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$). Les métriques $h_\delta^2 g_\delta$ ne sont pas conformes à la métrique g , mais on a $\tau(\delta)^{-1} h_\delta^2 g_\delta \leq h_\delta^2 g \leq \tau(\delta) h_\delta^2 g_\delta$ ce qui assure que $\mu_{[\frac{n}{2}],k}^c(M, h_\delta^2 g)$ tend aussi vers $\mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$ quand δ tend vers zéro. Comme la métrique g peut être choisie de volume arbitrairement petit, on peut en outre faire tendre le volume vers 1. On a donc bien $\mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$.

On peut démontrer l'inégalité $\mu_k^c(S^n, C_{\text{can}}) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, C_{\text{can}})$ en utilisant la même technique. On se donne une métrique $g_\delta \in C_{\text{can}}$ sur S^n telle que $\mu_{[\frac{n}{2}],1}^c(S^n, g_\delta) \leq \mu_1^c(S^n, C_{\text{can}}) + \delta$ et $\text{Vol}(S^n, g_\delta) = 1$, et on déforme conformément la sphère — en répétant $k - 1$ fois le procédé précédent — de manière à la rendre isométrique à k sphères munies de la métrique g attachées par des anses de rayon ε (figure 2). Quand ε tend vers zéro, le

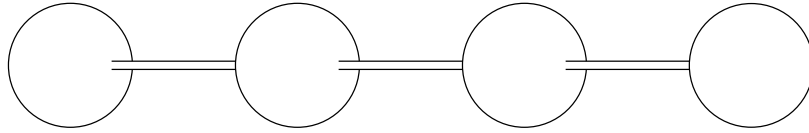


FIG. 2 —

volume de la sphère tend vers k et les k premières valeurs propres sur les $[\frac{n}{2}]$ -formes coexactes tendent vers $\mu_{[\frac{n}{2}],1}^c(S^n, g_\delta)$, ce qui permet d'affirmer que $\mu_k^c(S^n, C_{\text{can}}) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_{[\frac{n}{2}],1}^c(S^n, g_\delta)$. On conclut en faisant tendre δ vers zéro. ■

Références

- [AC95] C. ANNÉ et B. COLBOIS — « Spectre du laplacien agissant sur les p -formes différentielles et écrasement d'anses », *Math. Ann.*, 303 (3), p. 545–573, 1995.
- [Am03a] B. AMMANN — « The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions », prépublication, 2003, math.DG/0309061.
- [Am03b] B. AMMANN — « A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue », *Differ. Geom. Appl.*, 18 (1), p. 21–32, 2003.
- [CD94] B. COLBOIS et J. DODZIUK — « Riemannian metrics with large λ_1 », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122 (3), p. 905–906, 1994.
- [CES03] B. COLBOIS et A. EL SOUFI — « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the “conformal spectrum” », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.

- [CES06] B. COLBOIS et A. EL SOUFI – « Eigenvalues of the laplacian acting on p -forms and metric conformal deformations », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 134 (3), p. 715–721, 2006, math.DG/0409242.
- [Co04] B. COLBOIS – « Spectre conforme et métriques extrémales », *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, 22, p. 93–101, 2004.
- [Do82] J. DODZIUK – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.
- [ESI86] A. EL SOUFI et S. ILIAS – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.
- [GM75] S. GALLOT et D. MEYER – « Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d’une variété riemannienne », *J. Math. Pur. Appl.*, 54, p. 259–284, 1975.
- [GT06] V. GOLD’SHEIN et M. TROYANOV – « Sobolev inequalities for differential forms and $L_{q,p}$ -cohomology », *J. Geom. Anal.*, 16 (4), p. 597–632, 2006, math.DG/0506065.
- [Ja06] P. JAMMES – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », prépublication, 2006, math.DG/0601738.
- [Ko93] N. KOREVAAR – « Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics », *J. differ. geom.*, 37 (1), p. 73–93, 1993.
- [Lo86] J. LOTT – « Eigenvalue bounds for the Dirac operator », *Pacific J. of Math.*, 125 (1), p. 117–126, 1986.

Pierre JAMMES
 Université d’Avignon
 laboratoire de mathématiques
 33 rue Louis Pasteur
 F-84000 Avignon
 Pierre.Jammes@univ-avignon.fr