Université Nice Sophia Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné
École doctorale Sciences fondamentales et appliquées
Spécialité mathématiques

Autour de la géométrie du laplacien de Hodge-de Rham

Habilitation à diriger des recherches

présentée et soutenue publiquement par

Pierre JAMMES

le 2 décembre 2011 devant le jury composé de

Gérard Besson	Université Grenoble I
Gilles Carron	Université de Nantes
Bruno Colbois	Université de Neuchâtel
Gilles Courtois	Université Paris VI
Philippe Delanoë	Université Nice Sophia Antipolis
Ahmad El Soufi	Université de Tours

après avis des rapporteurs

Gilles Carron	Université de Nantes
Ahmad El Soufi	Université de Tours
John Lott	University of California Berkeley

Autour de la géométrie du laplacien de Hodge-de Rham

par

Pierre JAMMES

Résumé.— Ce texte présente les recherches que j'ai effectuées depuis le début de ma thèse. Mes travaux portent principalement sur des problèmes de géométrie spectrale et sur l'étude des premières valeurs propres d'opérateurs géométriques sur les variétés riemanniennes : en premier lieu le laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles de la variété, mais aussi le laplacien agissant sur les fonctions, le laplacien de Witten et l'opérateur de Dirac.

Le mémoire abordera successivement trois contextes géométriques dans lesquels je me suis intéressé à ces problèmes spectraux : les effondrements de variétés, la géométrie conforme et les variétés hyperboliques. Les deux derniers chapitres concerneront la construction de valeurs propres multiples et le problème de la masse positive.

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'exposer de manière synthétique l'ensemble de mes travaux de recherche, et de les mettre en perspective en présentant leur contexte.

Ces travaux relèvent pour l'essentiel de la géométrie spectrale, dont la problématique peut se résumer ainsi : étant donné un opérateur différentiel (par exemple le laplacien) défini sur une variété riemannienne, on considère ses valeurs propres comme des invariants géométriques globaux, au même titre que le volume ou le diamètre, et on cherche à comprendre leur interaction avec d'autres invariants géométriques.

Je me suis intéressé à plusieurs opérateurs géométriques (laplacien, opérateur de Dirac), mais plus particulièrement au laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles de la variété. Avant de détailler le plan du mémoire, je vais présenter de manière générale certaines questions qui se rapportent à cet opérateur.

On considère une variété riemannienne (M, g) qu'on supposera compacte et sans bord et pour tout entier p on note $\Omega^p(M)$ l'espace des formes différentielles de degré p sur M. Sur ces espaces agit la différentielle extérieure $\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, et la donnée de la métrique permet de définir son opérateur adjoint $\delta : \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$. On définit alors le laplacien de Hodge-de Rham $\Delta : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$ par

$$\Delta = \delta\mathrm{d} + \mathrm{d}\delta. \tag{1.1}$$

Dans le cas des fonctions, c'est-à-dire $p = 0$, le dernier terme est nul et on retrouve le laplacien usuel. Sur une variété compacte, le spectre du laplacien de Hodge est discret et formé de valeurs propres positives ou nulles, et son noyau est canoniquement isomorphe à la cohomologie de Rham $H^p(M)$.

On peut s'intéresser à des questions assez variées au sujet de ces valeurs propres, mais plusieurs peuvent se reformuler de la manière suivante :

Question 1.2. *Pour quelles déformations de la métrique (avec une hypothèse de normalisation, par exemple en fixant le volume) a-t-on des valeurs*

propres qui tendent vers 0 ?

Comme le noyau du laplacien est isomorphe à la cohomologie, cette question revient à se demander quelles déformations de la métriques tendent à « créer » de la cohomologie. Dans la suite du mémoire, on parlera souvent de *petites valeurs propres* pour désigner ce phénomène.

Dans le cas des fonctions, la réponse à cette question est assez bien comprise. En effet, on a une minoration de la première valeur propre non nulle du laplacien $\lambda_1(M,g)$, donnée par l'inégalité de Cheeger

$$\lambda_1(M,g) \geq \frac{h^2(M,g)}{4}, \tag{1.3}$$

où la constante de Cheeger $h(M,g)$ est une constante isopérimétrique définie par

$$h(M,g) = \inf_N \frac{\mathrm{Vol}(N)}{\min \mathrm{Vol}(M_1), \mathrm{Vol}(M_2)} \tag{1.4}$$

où N parcourt l'ensemble des hypersurfaces qui partitionnent M en deux domaines M_1 et M_2. On a donc une interprétation géométrique simple de l'existence de petites valeurs propres pour le laplacien usuel. Le prototype de variété ayant une petite constante de Cheeger et une petite valeur propre est une haltère de Cheeger comme celle représentée sur la figure 1.1.

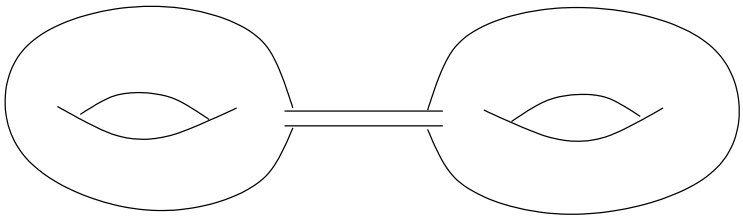

FIGURE 1.1 – Haltère de Cheeger

La situation est totalement différente pour les formes différentielles de degré non nul. On ne connaît aucune caractérisation géométrique générale de l'existence de petites valeurs propres, ni de conjecture précise concernant un généralisation possible de l'inégalité de Cheeger. On étudie donc des cas particuliers en imposant certaines contraintes à la métrique. Dans la suite de ce texte, les chapitres 3, 5 et une partie du chapitre 4 relèvent de cette problématique.

Le mémoire sera organisé comme suit. Tout d'abord, le chapitre 2 précisera certaines définitions concernant le laplacien de Hodge-de Rham et rappellera un ensemble de résultats techniques à son sujet qui seront utiles dans les chapitres suivants. On fera aussi quelques rappels sur le laplacien de Witten, qu'on peut interpréter comme une perturbation du laplacien de Hodge et qui interviendra dans le chapitre 6.

Le chapitre 3 sera consacré au spectre du laplacien de Hodge-de Rham sur les variétés qui s'effondrent. Il s'agit d'étudier le problème des petites valeurs propres en imposant des bornes sur le diamètre et la courbure de la variété. Avec ces hypothèses, on sait que si une valeur propre tend vers 0, alors le volume tend aussi vers 0, c'est-à-dire que la variété s'effondre. Ce problème constituait mon sujet de thèse, j'en rappellerai les résultats et je présenterai les travaux que j'ai effectué depuis. Entre autres, j'ai étudié des familles d'exemples montrant la diversité des phénomènes pouvant apparaître dans ce contexte, et j'ai démontré une minoration du spectre en fonction du volume sur une classe de variétés qui s'effondrent (fibrés principaux).

Dans le chapitre 4 on étudiera le problème des petites valeurs propres dans le cas où on fixe le volume et la classe conforme de la métrique. On élargira en fait la question sous la forme suivante : peut-on faire tendre les valeurs propres d'un opérateur géométrique vers 0 ou l'infini en fixant le volume et la classe conforme ? Outre le laplacien de Hodge, on s'intéressera au laplacien usuel et à l'opérateur de Dirac. Ma principale contribution à ce sujet est de montrer qu'en exceptant les degrés 0 et $n/2$, on peut prescrire simultanément le volume, la classe conforme et le début du spectre du laplacien de Hodge. Avec B. Ammann, j'ai aussi montré qu'on pouvait faire tendre les valeurs propres de l'opérateur de Dirac vers l'infini.

Le troisième contexte géométrique dans lequel on s'intéressera aux petites valeurs propres du laplacien de Hodge sera la géométrie hyperbolique (chapitre 5) : en dimension 2 et 3, on peut trouver des suites de variétés hyperboliques compactes qui tendent vers une variété hyperbolique non compacte de volume fini, on peut alors étudier le comportement asymptotique du spectre. En particulier, j'ai donné une minoration du spectre du laplacien de Hodge sur les variétés hyperboliques de dimension 3 en fonction du diamètre.

Dans le chapitre 6, on se penchera sur un problème différent, à savoir la multiplicité des valeurs propres du laplacien. En dimension 2, on sait que la multiplicité des valeurs propres du laplacien (ou d'un opérateur de Schrödinger) est bornée en fonction de la topologie. En dimension supérieure ou égale à 3, on sait qu'il n'existe aucune rigidité de ce type pour le laplacien usuel. J'ai montré que pour les formes différentielles de degré autre que $n/2$, il n'existe pas non plus de rigidité pour le laplacien de Hodge en dimension $n \geq 6$ et qu'on peut prescrire le début du spectre avec multiplicité. J'ai montré le même résultat en dimension $n \geq 4$ pour le laplacien de Witten, pour les formes de tout degré.

Enfin, le chapitre 7 sera consacré au problème de la masse positive, qui ne relève pas de la géométrie spectrale mais dans lequel intervient le laplacien de Hodge-de Rham. Ce problème est issu de la relativité générale mais a trouvé une application à la résolution du problème de Yamabe, qui consiste à trouver dans chaque classe conforme d'une variété riemannienne une métrique à courbure scalaire constante. Récemment, B. Ammann et E. Humbert on

donné une démonstration élémentaire du théorème de masse positive utilisé pour le problème de Yamabe, mais en se restreignant aux variétés spins. En utilisant le laplacien de Hodge-de Rham, j'en ai donné une démonstration élémentaire sur les variétés de dimension paire, sans hypothèse sur la topologie.

Chapitre 2

Laplacien de Hodge-de Rham

2.1. Définitions et décomposition de Hodge

On va rappeler dans ce chapitre la définition et les principales propriétés du laplacien de Hodge-de Rham, ainsi qu'un certain nombre de résultats techniques auquels nous ferons référence dans les autres chapitres. On peut se référer à [Ta96] pour la démonstration des résultats les plus classiques, en particulier pour cette section et la section 2.3.

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Dans cette section, on supposera que la variété est sans bord (le cas des variétés à bord sera traité dans la section 2.3). On note $\Omega^p(M)$ l'espace des formes différentielles de degré p sur M. Le laplacien de Hodge-de-Rham est un opérateur elliptique d'ordre 2 agissant sur $\Omega^*(M)$ et défini par

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} = (\mathrm{d} + \delta)^2, \tag{2.1}$$

où d est la différentielle extérieure et δ la différentielle, adjoint de d pour le produit scalaire L^2. Si on note

$$* : \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{n-p}(M) \tag{2.2}$$

la dualité de Hodge, on a aussi la relation $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * \mathrm{d} *$ en restriction à $\Omega^p(M)$. Bien que la dualité de Hodge ne soit définie globalement que si la variété est orientée, on peut définir δ par cette formule au moyen d'un choix local d'orientation : en effet, la dualité de Hodge se définit ponctuellement et changer l'orientation locale ne fait que changer le signe de $*$, l'opérateur δ ne dépend donc pas de ce choix. En particulier, δ et Δ sont bien définis sur une variété non orientable.

Le laplacien de Hodge-de Rham est un opérateur positif, dont le spectre est discret car on a supposé la variété compacte. On note

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots \tag{2.3}$$

le spectre du laplacien en restriction aux p-formes, en répétant les valeurs propres non nulles s'il y a multiplicité.

Une particularité essentielle du laplacien de Hodge est sa relation avec la décomposition de Hodge

$$\Omega^p(M) = \mathrm{d}\Omega^{p-1}(M) \oplus \mathrm{Ker}\,\Delta_{|\Omega^p(M)} \oplus \delta\Omega^{p+1}(M). \tag{2.4}$$

Il est parfois utile d'étendre cette somme à son adhérence L^2 par $L^2(\Lambda^p M) = \overline{\mathrm{Im}\,\mathrm{d}} \oplus \mathrm{Ker}\,\Delta \oplus \overline{\mathrm{Im}\,\delta}$. Comme les opérateurs d et δ commutent avec Δ, cette décomposition est stable par le laplacien. En outre, d et δ intervertissent $\delta\Omega^{p+1}(M)$ et $\mathrm{d}\Omega^p(M)$. Si on note pour tout p

$$0 < \mu_{p,1}(M,g) \leq \mu_{p,2}(M,g) \leq \dots \tag{2.5}$$

le spectre du laplacien restreint à $\delta\Omega^{p+1}(M)$, le spectre restreint à $\mathrm{d}\Omega^{p-1}(M)$ est donc $(\mu_{p-1,i}(M,g))_{i>0}$. L'ensemble des valeurs propres non nulles du laplacien se déduit donc des $(\mu_{p,i}(M,g))_{p,i}$.

Enfin, si la variété est orientable et sans bord, la dualité de Hodge est bien définie globalement et commute avec le laplacien. On en déduit alors que $\lambda_{p,i}(M,g) = \lambda_{n-p,i}(M,g)$ et $\mu_{p,i}(M,g) = \mu_{n-p-1,i}(M,g)$ pour tout p et i.

2.2. Caractérisation et propriétés des valeurs propres

On peut estimer les valeurs propres $\lambda_{p,i}$ du laplacien de Hodge-de Rham par la méthode du min-max. Le quotient de Rayleigh d'une p-forme ω s'écrit alors

$$R(\omega) = \frac{\|\mathrm{d}\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2}{\|\omega\|^2}, \tag{2.6}$$

la norme $\|\cdot\|$ étant la norme L^2. Le terme $\delta\omega$, qui n'existe pas pour le laplacien agissant sur les fonctions, est souvent difficile à contrôler. Une des raison en est que la codifférentielle dépend non seulement de la métrique, mais aussi de ses dérivées.

Pour contourner cette difficulté, une possibilité est de se restreindre à l'espace des formes coexactes, mais cet espace a l'inconvénient de dépendre de la métrique, contrairement à l'espace des formes exactes.

On peut cependant déterminer les valeurs propres en se restreignant à l'espace des formes exactes et sans utiliser la codifférentielle, selon la caractérisation variationnelle qui suit et dont le principe est dû à J. Cheeger et J. Dodziuk :

Proposition 2.7 ([Do82], [Mc93]). *Sur une variété compacte sans bord, on a*

$$\mu_{p,i} = \inf_{V_i} \sup_{\omega \in V_i \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\omega\|^2}{\|\varphi\|^2},\ \mathrm{d}\varphi = \omega \right\},$$

où V_i parcourt l'ensemble des sous-espaces de dimension i dans l'espace des $p+1$-formes exactes lisses.

Il est parfois commode de reformuler ce résultat de la manière suivante, comme je l'ai fait dans [Ja11a] :

Proposition 2.8. *Le spectre et les espaces propres du laplacien en restriction aux formes exactes sont ceux de la forme quadratique $Q(\omega) = \|\omega\|_{L^2}^2$ relativement à la norme $|\omega| = \inf_{\mathrm{d}\varphi=\omega} \|\varphi\|_{L^2}$.*

Une application immédiate de la proposition 2.7 est que le spectre du laplacien de Hodge-de Rham est continu pour la topologie C^0 sur l'espace des métriques. On peut être plus précis et contrôler les valeurs propres pour une métrique $\tilde{g}$ en fonction des valeurs propres pour une métrique g et de la distance de Lipschitz entre g et $\tilde{g}$:

Corollaire 2.9 ([Do82]). *Soit g et $\tilde{g}$ deux métriques riemanniennes sur une variété compacte M de dimension n, et τ une constante strictement positive. Si les deux métriques vérifient $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, alors*

$$\frac{1}{\tau^{3n-1}}\lambda_{p,k}(M,g) \leq \lambda_{p,k}(M,\tilde{g}) \leq \tau^{3n-1}\lambda_{p,k}(M,g),$$

pour tout entiers $k \geq 0$ et $p \in [0,n]$.

2.3. Variétés à bord

Si U est un domaine à bord C^1 d'une variété compacte M, on note $j : \partial U \to \overline{U}$ l'injection canonique et N un champ de vecteur normal au bord. Il existe plusieurs conditions de bord admissibles pour le laplacien de Hodge-de Rham sur $\overline{U}$ (c'est-à-dire telles que le laplacien soit autoadjoint et vérifie une inégalité elliptique), les deux principales sont les conditions absolues et relatives, que nous noterons respectivement (A) et (R) et qui sont définies par

$$(A)\ \begin{cases} j^*(\iota_N\omega) = 0 \\ j^*(\iota_N \mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} j^*(*\omega) = 0 \\ j^*(*\mathrm{d}\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$(R)\ \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\delta\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Pour la condition (A), $\operatorname{Ker}\Delta$ est isomorphe à la cohomologie $H^p(U)$ et pour (R), il est isomorphe à la cohomologie à support compact $H_0^p(U)$ (voir par exemple [Ta96], ch. 5). Rappelons aussi que les cohomologies de U et $\overline{U}$ sont isomorphes ([Ta96] ch. 5 p. 375). Il est immédiat que sous la condition (R)

on a $j^*(\mathrm{d}\omega) = 0$. Et comme la dualité de Hodge permute ces deux conditions de bord, (A) implique que $j^*(*\delta\omega) = 0$.

Une troisième condition, moins utilisée, consiste à imposer aux formes différentielles d'être nulles sur le bord de $\overline{U}$:

$$(D)\ \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(*\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Pour la condition (D), le noyau du laplacien est trivial (voir [An89]).

Rappelons qu'en restriction aux fonctions, la condition (A) est équivalente à la condition de Neumann, et les conditions (R) et (D) à la condition de Dirichlet.

Dans la condition (A) (resp. (R)), la seule équation $j^*(*\omega) = 0$ (resp. $j^*(\omega) = 0$) est une condition admissible pour l'opérateur $\mathrm{d} + \delta$. Ces deux conditions peuvent donc s'interpréter comme le « carré » de la condition correspondante pour $\mathrm{d} + \delta$. En revanche, il ne semble pas y avoir de « racine carrée » de la condition (D). C'est entre autres pour cette raison que la condition (D) est moins étudiée.

Pour les conditions (A) et (R), il existe une décomposition de Hodge $L^2(\Lambda^p\overline{U}) = \operatorname{Im}\mathrm{d} \oplus \operatorname{Ker}\Delta \oplus \operatorname{Im}\delta$ qui dépend de la condition de bord choisie. Pour une forme ω, elle s'écrit $\omega = \mathrm{d}\delta\theta + \alpha + \delta\mathrm{d}\theta$ où α et θ vérifie la condition de bord considérée, α étant dans le noyau $\operatorname{Ker}\Delta$ correspondant (cf. proposition 9.8 de [Ta96]).

La caractérisation variationnelle du spectre fournie par la proposition 2.7 est valable sur les variétés à bord même sans imposer de condition de bord aux formes différentielles. On obtient alors le spectre du laplacien pour la condition (A). Cela s'explique par la propriété suivante :

Proposition 2.13. *Si ω est une p-forme exacte sur $\overline{U}$, alors il existe une forme $\theta \in \Omega^p(\overline{U})$ vérifiant la condition (A) et telle que $\omega = \mathrm{d}\delta\theta$. En particulier, la forme $\varphi = \delta\theta$ vérifie $j^*(\iota_N\varphi) = 0$, est orthogonale aux formes fermées et minimise la norme L^2 parmi les primitives de ω.*

Cette propriété semble connue depuis longtemps mais elle n'est généralement utilisée qu'implicitement dans la littérature. Une démonstration est esquissée dans [Ch79] (section 3, p. 272) et j'en ai rédigé une version plus détaillée dans [Ja11a].

2.4. Inégalités de Sobolev

Étant donnée une variété riemannienne compacte (M^n, g), et deux réels $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$, l'inégalité de Sobolev classique sur les fonctions assure l'existence de deux constantes $A, B > 0$ telles que pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$,

$$\|f\|_{L^r} \leq A\|\mathrm{d}f\|_{L^s} + B\|f\|_{L^1}. \tag{2.14}$$

Cette inégalité peut se généraliser aux formes différentielles. Cela tient essentiellement au fait que la différentielle extérieure définit un complexe elliptique sur l'espaces des formes différentielles. Les ouvrages consacrés aux opérateurs (pseudo)différentiels et aux inégalités elliptiques développent rarement le cas des opérateurs agissant sur les sections d'un fibré vectoriel ; on peut toutefois se référer au chapitre 6 de [Mo66], et une définition précise d'un complexe elliptique est donnée dans [Ra05] (chapitre 9) et dans [Ag94].

De l'inégalité elliptique de l'opérateur $(\mathrm{d}+\delta)$, on déduit immédiatement

Théorème 2.15. *Il existe trois constantes $A, B, C > 0$ dépendant de g, r et s telles que pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega(M)$, on a*

$$\|\omega\|_r \leq A\|\mathrm{d}\omega\|_s + B\|\delta\omega\|_s + C\|\omega\|_1. \tag{2.16}$$

Nous aurons en fait besoin d'une inégalité prenant une forme différente :

Théorème 2.17 ([GT06]). *Soit (M, g) une variété compacte de dimension n, et deux réels $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$. Il existe une constante $c(M, g, r, s) > 0$ telle que pour toute p-forme $\omega \in \Omega^p(M, g)$, on a*

$$\inf_{\mathrm{d}\varphi=0} \|\omega - \varphi\|_r \leq c\|\mathrm{d}\omega\|_s. \tag{2.18}$$

Bien que ce théorème se démontre par des techniques assez classiques, il ne semble pas avoir été énoncé jusqu'à récemment. On le trouve sous la plume de V. Gold'shtein et M. Troyanov dans [GT06].

L'inégalité (2.18) peut se déduire du théorème 2.15 de la manière suivante : en restriction à l'orthononal des formes harmoniques, on peut classiquement choisir $C = 0$, quitte à changer les constantes A et B. Si ω est orthogonale au formes harmoniques, il existe une forme fermée φ telle que $\omega - \varphi$ soit coexacte, et donc $\|\omega - \varphi\|_r \leq A\|\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\varphi\|_s = \|\mathrm{d}\omega\|_s$.

L'inégalité du théorème 2.18 nous intéressera au chapitre 4 pour une particularité apparaissant quand on fixe le degré p et qu'on pose $r = \frac{n}{p}$ et $s = \frac{n}{p+1}$. En effet, les normes $\|\omega - \varphi\|_r$ et $\|\mathrm{d}\omega\|_s$ sont alors conformément invariantes, et par conséquent la constante optimale dans l'inégalité (2.18) en restriction aux p-formes est un invariant conforme, qu'on notera

$$K_p(M, [g]) = \sup_{\omega \in \Omega^p(M)} \inf_{\mathrm{d}\varphi=0} \frac{\|\omega - \varphi\|_{\frac{n}{p}}}{\|\mathrm{d}\omega\|_{\frac{n}{p+1}}}, \tag{2.19}$$

Remarque 2.20. On ne connaît actuellement aucune estimée de la constante K_p.

2.5. L'algèbre de courbure

2.5.1. Définition

La notion d'algèbre de courbure est un formalisme qui peut s'avérer très commode quand on manipule des formes différentielles, en particulier les formes définies à l'aide de la courbure, et qui s'est entre autres révélé utile pour exprimer les classes caractéristiques dans la théorie de Chern-Weil. En relation avec le laplacien de Hodge-de Rham, il nous sera utile pour exprimer les termes de courbure dans les formules de Weitzenböck. Il interviendra aussi au paragraphe suivant au sujet du laplacien de Witten.

Soit V un espace vectoriel euclidien (en pratique, l'espace vectoriel tangent T_xM en un point d'une variété riemannienne). On note

$$C^p(V) = S^2\Lambda^p V \tag{2.21}$$

l'espace des formes quadratiques sur les p-formes alternées de V. À l'aide du produit scalaire, on identifie un élément de C^p à un endomorphisme symétrique de $\Lambda^p V$, ou à un $2p$-tenseur antisymétrique par rapport aux p premières variables et symétrique par échange des p premières et des p dernières. L'espace des formes de courbure sur V est alors défini par

$$C^*(V) = \bigoplus_{p\geq 0} C^p. \tag{2.22}$$

On peut noter que $C^*(TM)$ contient les tenseurs de Riemann et Weyl ($p = 2$), la métrique et le tenseur de Ricci ($p = 1$) et la courbure scalaire ($p = 0$) ; c'est ce qui justifie la dénomination de *formes de courbure* pour désigner ses éléments.

Cet espace est muni d'un produit, noté $\owedge$ et qu'on peut définir par

$$(\omega \otimes \omega) \owedge (\varphi \otimes \varphi) = (\omega \wedge \varphi) \otimes (\omega \wedge \varphi) \tag{2.23}$$

pour tout $\omega \in \Lambda^p V$ et $\varphi \in \Lambda^q V$, qui lui procure une structure d'algèbre.

Ce produit est communément appelé produit de Kulkarni-Nomizu, en particulier quand $p = q = 1$. On peut s'interroger sur cette terminologie : bien que les contributions de Kulkarni et Nomizu à ce sujet soient substantielles, elles ne sont pas les premières (on rencontre parfois des renvois à l'article [Ku72] de Kulkarni pour la définition de ce produit alors qu'elle n'est écrite nulle part dans l'article et qu'elle y est supposée connue du lecteur !). On trouve déjà trace de ce formalisme sous la plume de S.-S. Chern dans [Ch55] où il l'utilise pour exprimer les classes de Pontrjaguine. En outre, si on considère les formes de courbure comme cas particulier de formes doubles, c'est-à-dire de formes alternées à valeur dans les formes alternées, ce produit est simplement le produit extérieur.

L'algèbre de courbure peut aussi être munie de plusieurs opérateurs — algébriques ou différentiels — vérifiant entre eux un certains nombre d'identités remarquables. Nous ne détaillerons pas cet aspect, sur lequel on peut consulter [La06a] et les références qui y sont données.

Signalons enfin que, bien que cela semble être passé inaperçu aux yeux des géomètres, l'algèbre de courbure — et sa généralisation aux formes doubles — a aussi été étudiée par des algébristes sous le vocable de *mixed exterior algebra* (voir par exemple [Va83] ou [Va84]).

2.5.2. Applications

On va rappeler maintenant certains énoncés qui font usage de l'algèbre de courbure. Le plus connu est sans doute la décomposition du tenseur de Riemann en composantes irréductibles sous l'action de $\mathrm{SO}(n)$:

$$R = W + \frac{1}{n-2} z \owedge g + \frac{\mathrm{scal}}{2n(n-1)} g \owedge g \tag{2.24}$$

où $z = \mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{scal}}{n} g$ désigne la partie sans trace de la courbure de Ricci.

Le produit de Kulkarni-Nomizu intervient aussi pour exprimer la courbure riemannienne d'une hypersurface euclidienne. En effet, la seconde forme fondamentale $I\!I$ d'une hypersurface appartient à $C^1(TM)$, et le tenseur de Riemann R peut alors s'écrire $R = \frac{1}{2} I\!I^2$.

L'étude de l'algèbre de courbure a été développée entre autres pour exprimer les classes caractéristiques d'une variété riemannienne. Il est ici utile de remarquer que si p est pair, alors $\Lambda^{2p}(TM)$ s'injecte dans $C^p(TM)$. On note alors π_p la projection orthogonale de $C^p(TM)$ sur $\Lambda^{2p}(TM)$.

Théorème 2.25 ([Ch55], [St73]). *Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une constante c_k telle que pour toute variété riemannienne compacte (M, g), la k-ième classe de Pontrjaguine p_k de M est représentée par la forme différentielle*

$$c_k \pi_{2k}(R^k),$$

où R^k désigne la puissance k-ième du tenseur de Riemann pour le produit de Kulkarni-Nomizu.

Il existe pour tout entier $n \geq 1$ une constante c'_n telle que si (M, g) est de dimension $2n$, alors la caractéristique d'Euler de M s'écrit

$$\chi(M) = c'_n \int_M R^n(\mathrm{d}v_g),$$

où $\mathrm{d}v_g$ désigne la forme volume induite par la métrique g.

La formule exprimant la caractéristique d'Euler de la variété se généralise à toutes les classes de Chern d'une variété kählerienne :

Théorème 2.26 ([Gr78a]). *Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une constante κ_k telle que si (M, g, ω) est une variété kählerienne, la k-ième classe de Chern de M est représentée par*

$$\kappa_k R^k(\omega^k).$$

On va conclure cette section sur le rôle de l'algèbre de courbure dans les formules de Weitzenböck du laplacien de Hodge-de Rham. Il est bien connu que si ω est une 1-forme différentielle, la formule de Bochner nous dit que

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + \mathrm{Ric}(\omega). \tag{2.27}$$

Si ω est une p-forme plus générale, on sait que

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + Q_p(\omega), \tag{2.28}$$

où Q_p est en tout point un endomorphisme symétrique de l'espace des p-formes alternées sur l'espace tangent qui s'exprime linéairement par rapport aux coefficients du tenseur de Riemann. Il revient à J.-P. Bourguignon d'avoir montré qu'il s'exprime assez simplement à l'aide de l'algèbre de courbure. M. Labbi a indépendamment retrouvé ce résultat par d'autres méthodes et avec des notations plus proches de celle que nous avons utilisé jusqu'ici :

Théorème 2.29 ([Bo81],[La06b]). *Si $2 \leq p \leq n-2$, la courbure de Weitzenböck Q_p s'écrit*

$$\begin{aligned} Q_p &= \left(\frac{g \owedge \mathrm{Ric}}{p-1} - 2R\right) \owedge \frac{1}{(p-2)!} g^{p-2} \\ &= -\frac{2}{(p-2)!} W \owedge g^{p-2} + \frac{n-2p}{(p-1)!(n-2)} z \owedge g^{p-1} \\ &\quad + \frac{(n-p)\ \mathrm{scal}}{(p-1)!n(n-1)} g^p. \end{aligned}$$

On voit que lorsque n est pair et que $p = \frac{n}{2}$, la contribution de z disparait. Le tenseur Q_p s'exprime alors uniquement à l'aide du tenseur de Weyl et de la courbure scalaire. Cette remarque jouera un rôle crucial dans le chapitre 7.

2.6. Laplacien de Witten

2.6.1. Définition

Le laplacien de Witten est un opérateur agissant sur les formes différentielles d'une variété et qui est défini comme une perturbation du laplacien de Hodge-de Rham. Cet opérateur a été popularisé par E. Witten dans [Wi82], où il l'utilise entre autres pour redémontrer les inégalités de Morse (voir par exemple [He85]).

Le laplacien de Witten a été beaucoup étudié d'un point de vue semi-classique, dans le prolongement des travaux de Witten (voir par exemple [HN06] et les références qui y sont données). Nous ne suivrons pas cette approche quand nous manipulerons cet opérateur dans le chapitre 6. On utilisera en revanche deux aspects du laplacien de Witten : d'une part on peut l'interpréter comme un opérateur de Schrödinger pour les formes différentielles (dans le cas des fonctions, on retrouve tous les opérateurs de Schrödinger dont la première valeur propre est nulle), d'autre part, on peut le construire en introduisant un découplage entre la métrique et la mesure (voir en particulier le paragraphe 2.6.3).

Étant donnée une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on définit une différentielle tordue $\tilde{\mathrm{d}} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ par

$$\tilde{\mathrm{d}}\omega = e^{-\varphi}\mathrm{d}(e^{\varphi}\omega) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\varphi \wedge \omega \tag{2.30}$$

et une codifférentielle tordue $\tilde{\delta} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ par

$$\tilde{\delta}\omega = e^{\varphi}\delta(e^{-\varphi}\omega) = \delta\omega + \iota_{\nabla\varphi}\omega. \tag{2.31}$$

On peut vérifier que ces deux opérateurs sont adjoints l'un de l'autre. Le laplacien de Witten associé à φ est alors défini par

$$\tilde{\Delta}_\varphi = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\tilde{\mathrm{d}} : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M). \tag{2.32}$$

On peut réécrire le laplacien de Witten sous les formes suivantes :

Théorème 2.33. *Pour toute fonction φ, on a*

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_\varphi &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \mathcal{L}_{\nabla\varphi} + \mathcal{L}^*_{\nabla\varphi} \\ &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \Delta\varphi - (\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g_p) \\ &= \Delta + |\mathrm{d}\varphi|^2 + \Delta\varphi + 2(\mathrm{Hess}\,\varphi).\end{aligned}$$

Précisons les notations de cet énoncé : $\mathcal{L}_{\nabla\varphi}$ désigne la dérivée de Lie par rapport à $\nabla\varphi$, $\mathcal{L}^*_{\nabla\varphi}$ son adjoint L^2 et g_p la métrique induite par g sur le fibré des p-formes. Par conséquent, $\mathcal{L}_{\nabla\varphi} g_p$ est ponctuellement une forme quadratique sur $\Lambda^p TM$ qu'on identifie à l'endomorphisme symétrique de $\Lambda^p TM$ canoniquement associé. Le hessien $\mathrm{Hess}\,\varphi$ de φ est une forme bilinéaire symétrique sur les champs de vecteur, donc sur les 1-formes, qu'on identifie là encore à un endomorphisme de $\Lambda^1 TM$. On l'étend à $\Lambda^p TM$ en posant $(\mathrm{Hess}\,\varphi)_{\Lambda^p} = (\mathrm{Hess}\,\varphi)_{\Lambda^1} \owedge g_{p-1}$, où $\owedge$ désigne le produit de Kulkarni-Nomizu dont on a rappelé la définition dans la section précédente. Autrement dit, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\Lambda^1 TM$, alors

$$(\mathrm{Hess}\,\varphi)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p) = \sum_i e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge \mathrm{Hess}\,\varphi(e_i) \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_p. \tag{2.34}$$

La théorie de Hodge s'applique au laplacien de Witten, en particulier on a une décomposition de Hodge $\Omega^p(M) = \tilde{\mathrm{d}}\Omega^{p-1}(M) \oplus \mathrm{Ker}\,\tilde{\Delta}_\varphi \oplus \tilde{\delta}\Omega^{p+1}(M)$, qui est stable par le laplacien. Si on note

$$0 < \tilde{\mu}_{p,1}(M, g, \varphi) \leq \tilde{\mu}_{p,2}(M, g, \varphi) \leq \dots \tag{2.35}$$

Les valeurs propres du laplacien de Witten en restriction à $\tilde{\delta}\Omega^{p+1}(M)$, alors son spectre en restriction à $\tilde{\mathrm{d}}\Omega^{p-1}(M)$ est $(\tilde{\mu}_{p-1,i}(M, g, \varphi))$. Le spectre non nul du laplacien de Witten se déduit donc des $\tilde{\mu}_{p-1,i}(M, g, \varphi)$, $0 \leq p \leq n-1$.

En outre, le laplacien de Witten vérifie la relation de commutation suivante avec le dualité de Hodge :

$$\tilde{\Delta}_\varphi * = *\tilde{\Delta}_{-\varphi} \tag{2.36}$$

Cette relation implique que $\tilde{\mu}_{p,i}(g, \varphi) = \tilde{\mu}_{n-p-1,i}(g, -\varphi)$.

2.6.2. Cohomologie

La différentielle tordue vérifie $\tilde{\mathrm{d}}^2 = 0$ et la théorie de Hodge s'applique à $\tilde{\mathrm{d}}$. Le noyau de $\tilde{\Delta}_\varphi$ en restriction aux p-formes est donc isomorphe à la cohomologie de $\tilde{\mathrm{d}}$. Il s'avère que la dimension de cette cohomologie ne dépend pas de φ, cela découle de la remarque suivante :

Lemme 2.37. *Si on pose $T_\varphi\omega = e^\varphi\omega$ alors $T_\varphi\tilde{\mathrm{d}} = \mathrm{d}T_\varphi$. En particulier, l'application T_φ est un isomorphisme du noyau (resp. l'image) de $\tilde{\mathrm{d}}$ vers le noyau (resp. l'image) de d.*

Ce lemme interviendra au paragraphe suivant, et on en déduit dès à présent :

Corollaire 2.38 ([Ja10c]). *Les cohomologies de $\tilde{\mathrm{d}}$ et d sont isomorphes. Si h est une p-forme $\tilde{\Delta}_\varphi$-harmonique, alors h minimise la norme L^2 pour la mesure $\mathrm{d}v_g$ dans sa classe de $\tilde{\mathrm{d}}$-cohomologie. De plus, $T_\varphi h$ est d-fermée et minimise la norme L^2 pour la mesure $\mathrm{d}v_\varphi = e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g$ dans sa classe de d-cohomologie.*

2.6.3. Interprétation comme laplacien à densité

Dans le cas des fonctions, le quotient de Rayleigh du laplacien de Witten peut s'écrire

$$R(f) = \frac{\int |\tilde{\mathrm{d}}f|^2 \mathrm{d}v_g}{\int f^2 \mathrm{d}v_g} = \frac{\int |\mathrm{d}(e^\varphi f)|^2 e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g}{\int (e^\varphi f)^2 e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g}. \tag{2.39}$$

Il s'agit du quotient de Rayleigh usuel de la fontion $e^\varphi f$ mais pour la mesure $\mathrm{d}v_\varphi = e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g$. Cela signifie que la laplacien de Witten est conjugué, *via* l'application T_φ défini plus haut, à un laplacien à densité.

Ce principe de découplage entre la métrique et la mesure se généralise aux formes de degré supérieur. On l'a déjà vu pour les formes harmoniques dans le corollaire 2.38, où on minimise une norme L^2 pour la mesure $\mathrm{d}v_\varphi$. C'est vrai aussi pour les valeurs propres non nulles, mais à condition de se baser non pas sur la formule 2.6, mais sur la proposition 2.7. On obtient par exemple :

Proposition 2.40 ([Ja10c]). *Le spectre et les espaces propres, transportés par T_φ, du laplacien de Witten en restriction à $\operatorname{Im}\tilde{\mathrm{d}}$ sont ceux de la forme quadratique $Q(\omega) = \int_M |\omega|^2 \mathrm{d}v_\varphi$ définie sur les formes exactes, relativement à la norme $|\omega| = \inf_{\mathrm{d}\theta=\omega} \int_M |\theta|^2 \mathrm{d}v_\varphi$, où $\mathrm{d}v_\varphi$ désigne la mesure $e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g$.*

2.6.4. Conditions de bord

Si U est un domaine à bord C^1 d'une variété compacte M, on note $j : \partial U \to \overline{U}$ l'injection canonique et N un champ de vecteur normal au bord. Les conditions de bord classiques du laplacien de Hodge-de Rham se généralisent au laplacien de Witten. La condition absolue (A_φ) s'écrit

$$(\mathrm{A}_\varphi) \quad \begin{cases} j^*(\iota_N\omega) = 0 \\ j^*(\iota_N\tilde{\mathrm{d}}\omega) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} j^*(*\omega) = 0 \\ j^*(*\tilde{\mathrm{d}}\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

et la condition relative (R_φ) est définie par

$$(\mathrm{R}_\varphi) \quad \begin{cases} j^*(\omega) = 0 \\ j^*(\tilde{\delta}\omega) = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

Quand $\varphi = 0$, on retrouve les conditions absolues et relatives usuelles du laplacien de Hodge.

La dualité de Hodge transforme la condition (A_φ) en la condition $(\mathrm{R}_{-\varphi})$, ce qui est cohérent avec la formule (2.36). B. Helffer et F. Nier montrent dans [HN06] que la condition (R_φ) est admissible, il en va donc de même pour la condition (A_φ). En outre, L'opérateur $T : \omega \to e^\varphi\omega$ défini dans le lemme 2.37 transforme la condition (A_φ) en la condition (A_0).

Le corollaire 2.38 est valable dans ce contexte. En particulier, si h est une forme $\tilde{\Delta}_\varphi$ harmonique vérifiant la condition (A_φ), alors $T_\varphi h$ est fermée, vérifie la condition (A_0) et minimise la norme L^2 pour la mesure $\mathrm{d}v_\varphi$ dans sa classe de cohomologie.

Chapitre 3

Spectre des variétés qui s'effondrent

Une hypothèse assez naturelle sur la métrique d'une variété riemannienne consiste à fixer des bornes sur le diamètre et la courbure. Sous ce genre de contrainte, on sait minorer uniformément les valeurs propres du laplacien agissant sur les fonctions :

Théorème 3.1. *Soit a et d deux réels strictement positifs et n un entier. Il existe une constante $c(n,a,d) > 0$ telle que si (M,g) est une variété riemannienne de dimension n dont le diamètre et la courbure de Ricci vérifient* $\operatorname{diam}(M,g) \leq d$ *et* $\operatorname{Ric}(M,g) \geq -ag$*, alors*

$$\lambda_{0,1}(M,g) \geq c.$$

Notons que ce problème a fait l'objet de nombreux travaux ([LY80], [Gr80], [BBG85] et [CZ95], par exemple).

Il en va différemment du laplacien de Hodge-de Rham dès que le degré des formes différentielles est non nul, même en supposant que la courbure sectionnelle de la variété est bornée : B. Colbois et G. Courtois ont construit dans [CC90] des exemples (pour tout degré p) de variétés M admettant une suite de métriques (g_i) telle que $\lim_{i\to\infty} \lambda_{p,1}(M,g_i) = 0$, la courbure et le diamètre de M étant uniformément bornés. En outre, ils montrent que si une valeur propre tend vers zéro à courbure et diamètre bornés alors le volume de la variété (ou de manière équivalente son rayon d'injectivité) tend aussi vers zéro, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. Ces résultats soulèvent deux questions :

Question 3.2. *À quelles conditions une variété qui s'effondre admet-elle une — ou plusieurs — petite valeur propre ?*

Question 3.3. *À quelle vitesse les petites valeurs propres tendent-elles vers zéro par rapport au volume ou au rayon d'injectivité de la variété ?*

Dans [CC00], B. Colbois et G. Courtois se sont penchés sur le cas particulier des fibrés en cercles s'effondrant en tendant vers leur base pour la distance de Gromov-Hausdorff. Ils obtiennent un décompte précis du nombre de petites valeurs propres en fonction de la topologie, ainsi qu'un encadrement de ces valeurs propres :

Théorème 3.4 ([CC00]). *Soit a et d deux réels strictement positifs et $M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré en cercle de dimension n et de classe d'Euler $[e] \in H^2(N)$ sur une variété riemannienne (N,h). Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h)) > 0$ et $C_i(n,a,d,(N,h)) > 0$ pour $i = 1,2,3$ telles que si g est une métrique sur M vérifiant $\operatorname{diam}(M,g) \leq d$, $|K(M,g)| \leq a$ et telle que la submersion π soit une ε-approximation de Hausdorff pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors pour $1 \leq p \leq n$,*

1. *$\lambda_{p,m_p+1}(M,g) \geq C_1$;*
2. *Si $[e] \neq 0$, alors $C_2\|e\|_2^2\varepsilon^2 \leq \lambda_{1,1}(M,g) \leq C_3\|e\|_2^2\varepsilon^2$, où $\|e\|_2$ est la norme du représentant harmonique de $[e]$;*
3. *Si $\dim H^2(N,\mathbb{R}) = 1$, alors*

$$C_2\|e\|_2^2\varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M,g) \leq C_3\|e\|_2^2\varepsilon^2 \text{ pour } 1 \leq k \leq m_p,$$

avec $m_p = b_p(N) + b_{p-1}(N) - b_p(M)$.

On peut bien sûr se demander dans quelle mesure ce résultat ce généralise à d'autres classes de variétés. En particulier, après avoir remarqué que le paramètre ε du théorème 3.4 est l'ordre de grandeur de la longueur des fibres, et donc aussi du volume et du rayon d'injectivité de M, on peut préciser la question 3.3 :

Question 3.5. *À courbure et diamètre bornés, peut-on minorer le spectre du laplacien de Hodge-de Rham par le carré du volume ou le carré du rayon d'injectivité ?*

On va présenter les différents résultats obtenus depuis [CC00] à ce sujet. En préliminaire, la section 3.1 rappellera quelques résultats sur la structure topologique et géométrique des variétés qui s'effondrent à diamètre et courbure bornés, essentiellement dûs à Cheeger, Fukaya et Gromov. Je ferai aussi une brève présentation des flots riemanniens, qui fournissent une classe d'exemples d'effondrements.

La section 3.2 sera consacrée au problème de l'existence et du nombre éventuel de petites valeurs propres (c'est-à-dire à la question 3.2). Il y sera question des résultats généraux obtenus par J. Lott et de deux classes d'exemples que j'ai étudié, à savoir les fibrés en tores sur le cercle et les flots riemanniens, et qui illustrent la diversité des phénomènes qu'on peut rencontrer.

Dans la section 3.3, on s'intéressera au problème de la minoration du spectre, pour lequel il existe deux types de résultats. D'une part, on peut chercher une minoration sur une variété quelconque sous les hypothèse de courbure et diamètre bornés en fonction du volume ou du rayon d'injectivité, le principal résultat en ce sens étant celui de T. Mantuano. D'autre part, on peut chercher à répondre plus particulièrement à la question 3.5 en cherchant à généraliser le théorème 3.4 à d'autres classes de variétés. En étudiant le cas des fibrés principaux s'effondrant sur leur base, j'ai montré entre autres qu'on ne peut pas minorer le spectre par le carré du rayon d'injectivité.

Enfin, une dernière section rassemblera un certain nombre de questions ouvertes sur ce sujet.

Par rapport au texte d'exposition [Ja05] que j'ai écrit sur ce sujet, j'ai ici essayé d'être un peu plus complet sur certains aspects et de tenir compte de l'évolution du sujet.

3.1. Variétés qui s'effondrent

3.1.1. Structure de fibré

Toutes les variétés n'admettent pas d'effondrement à courbure bornée, il existe des obstructions topologiques. On peut par exemple remarquer que, par définition, une variété qui s'effondre a un volume minimal nul, et par conséquent sa caractéristique d'Euler et tous ses nombres caractéristiques sont nuls.

L'étude de ces effondrement a fait l'objet de nombreux travaux, dont on peut trouver un présentation synthétique dans [Ro02], et on peut en fait décrire précisément les variétés qui s'effondrent. Si on se donne une suite de métriques qui effondre une variété M, on peut en extraire une sous-suite (g_i) telle que (M, g_i) converge pour la distance de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique. Dans le cas où cet espace est une variété riemannienne lisse (N, h), on sait que M possède une structure de fibré sur N :

Théorème 3.6 ([Fu87b]). *Soit (M_i, g_i) une suite de variétés compactes de dimension n et (N, h) une variété riemannienne compacte de dimension $m < n$. Si pour tout i la courbure sectionnelle de M_i vérifie $|K(M, g_i)| \leq 1$, et si (M, g_i) converge vers (N, h) pour la distance de Gromov-Hausdorff, alors pour tout i suffisamment grand il existe une fibration $\pi_i : M_i \to N$ dont la fibre est une infranilvariété.*

Ce théorème généralise le théorème de variétés presque plates de Gromov [Gr78b], [BK97]), qui correspond au cas où la variété N est réduite à un point.

En général, l'espace limite de l'effondrement n'est pas une variété lisse mais une variété stratifiée ([Fu88]). Dans ce cas, K. Fukaya montre dans [Fu89] un résultat semblable au théorème 3.6.

Dans [CFG92], J. Cheeger, K. Kukaya et M. Gromov étudient de manière précise la métriques des variétés effondrées et montrent que dans la situation du théorème 3.6, la métrique le long des fibres est proche d'une métrique invariante pour la structure nilpotente de la fibre.

3.1.2. Les flots riemanniens et leurs effondrements

Bien qu'une variété qui s'effondre admette toujours la structure de fibré décrite ci-dessus, on peut être amené à considérer une autre structure topologique sur la variété, à savoir un feuilletage. L'idée est, à partir d'une métrique donnée, de déformer cette métrique dans la direction des feuilles de façon à faire tendre le volume vers 0.

En général, la courbure n'a pas de raison de rester bornée au cours d'un tel effondrement. On sait cependant que c'est le cas pour certains effondrements des flots riemanniens, que nous allons maintenant décrire.

On considère donc un flot $\mathcal{F}$ — c'est-à-dire un feuilletage orientable de dimension 1, *a priori* sans paramètre — sur une variété M, et si g est une métrique sur M, on décompose g sous la forme $g_H \oplus g_V$, où g_V est la métrique le long des feuilles et g_H la composante de la métrique g orthogonale aux feuilles.

Le flot $\mathcal{F}$ est dit riemannien s'il admet une métrique g quasi-fibrée, c'est-à-dire dont la composante g_V est invariante par le flot (Comme on exige que seul g_V soit invariant et pas la direction orthogonale aux feuilles, cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisi sur le flot). Rappelons une propriété de ces métriques, que nous n'utiliserons pas ici mais qui est une des principales motivations pour l'étude des flots riemanniens (voir par exemple [Gh83], [Mo05], [Ma08b] et les références qui y sont données) : si on se donne un champ d'hyperplans sur une variété riemannienne, il est totalement géodésique si et seulement si la métrique est quasi-fibrée pour le flot orthogonal, ce flot étant alors riemannien.

Étant donné un flot riemannien $\mathcal{F}$ et une métrique quasi-fibrée g, on notera (g_ε) la famille de métriques définie par $g_\varepsilon = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$ pour $\varepsilon \leq 1$ et qu'on appellera « effondrement adiabatique associé à g ». Ces effondrements nous intéressent ici pour plusieurs raisons : d'abord, Y. Carrière a montré dans [Ca84] que la courbure de la variété reste uniformément bornée quand ε tend vers 0 ; ensuite, le comportement asymptotique du spectre pour des effondrements adiabatiques de feuilletages riemanniens a déjà fait l'objet de plusieurs travaux sur lesquels on peut s'appuyer ; enfin, ils fournissent des exemples d'effondrements dont l'espace limite est singulier (par exemple des surfaces à bord et avec des singularités coniques, ou bien les simplexes pleins).

Rappelons aussi les invariants topologiques des flots riemanniens dont nous aurons besoin. Si X est un champ de vecteur tangent au flot, on définit la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ du flot comme étant la cohomologie de l'espace des formes basiques $\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^*(M),\ \iota_X\omega = \iota_X \mathrm{d}\omega = 0\}$.

On sait ([EKSH85]) que si le flot est riemannien, cette cohomologie est de dimension finie.

Si X est unitaire, la forme caractéristique du flot est $\chi = X^\flat$ et sa forme de courbure moyenne est $\kappa = \mathcal{L}_X \chi$. Dans [AL92], J.-A. Álvarez López a montré que la composante basique de cette forme de courbure est fermée, et que la classe de cohomologie basique de cette composante ne dépend pas de la métrique. On appelle *classe d'Álvarez* cette classe de cohomologie et on la note $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$.

Enfin, on définit la forme d'Euler du flot par $e = \mathrm{d}\chi - \kappa \wedge \chi$. Cette forme est fermée pour l'opérateur différentiel tordu $\mathrm{d}_{-\kappa}$ défini par $\mathrm{d}_{-\kappa}\omega = \mathrm{d}\omega + \kappa \wedge \omega$, et il existe une métrique quasi-fibrée pour laquelle cette forme est basique. La forme e représente donc une classe de cohomologie $[e]$ dans la cohomologie basique tordue $H^2_{-\kappa}(M/\mathcal{F})$ définie comme la cohomologie de $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ pour la différentielle tordue $\mathrm{d}_{-\kappa}$. La classe $[e]$ est appelée *classe d'Euler* du flot $\mathcal{F}$. Elle dépend de la métrique, mais pas le fait qu'elle soit nulle : on peut montrer ([RP01a], [RP01b]) que $[e] = 0$ si et seulement s'il existe un feuilletage transverse à $\mathcal{F}$ dont la torsion est basique.

3.2. Existence de petites valeurs propres

3.2.1. Cohomologie limite

Pour répondre à la question 3.2 dans le cas où (M, g_i) tend vers une variété riemannienne (N, h), J. Lott généralise un résultat obtenu par K. Fukaya [Fu87a] pour le laplacien usuel et définit dans [Lo02] un opérateur limite pour le laplacien de Hodge-de Rham : quitte à extraire une sous-suite de (g_i), le spectre du laplacien de Hodge-de Rham converge pour tout p et il existe un opérateur noté Δ^p_∞ agissant sur un espace des formes différentielles $\Omega^p(N, E^*)$, où E^* est un fibré vectoriel gradué sur N dépendant de M, et dont le spectre $\{\lambda^\infty_{p,k}\}$ vérifie $\lambda^\infty_{p,k} = \lim_{i \to +\infty} \lambda_{p,k}(M, g_i)$. La multiplicité de la valeur propre nulle de Δ^p_∞ donne donc le nombre de valeurs propres petites ou nulles produites par l'effondrement. Par théorie de Hodge, on peut aussi identifier le noyau de ce laplacien limite à une cohomologie limite de $\Omega^*(N, E^*)$.

L'étude de ces objets limites n'est pas aisée, et les résultats généraux de [Lo02] étant très techniques, nous ne les énoncerons pas ici. Nous allons cependant en donner des corollaires simples dans ce paragraphe et les suivants.

Pour les effondrements sur une variété N quelconque, J. Lott obtient le résultat suivant : on peut majorer le nombre de petites valeurs pour les 1-formes en fonction de la topologie de M et N :

Théorème 3.7 ([Lo02]). *Lorsque M s'effondre à courbure bornée sur N, le nombre maximal m de petites valeurs propres non nulles pour les 1-formes*

vérifie

$$m \leq \dim(M) - \dim(N) + b_1(N) - b_1(M) \tag{3.8}$$

et

$$m \leq \dim(M). \tag{3.9}$$

L'inégalité (3.9) a la particularité de ne pas dépendre de l'espace limite, mais elle est peu précise car à dimension fixée, la topologie influe sur le nombre de petites valeurs propres comme le montre le théorème 3.10.

3.2.2. Fibrés sur le cercle

Une situation assez bien comprise est celle des fibrés en tores sur le cercle s'effondrant sur leur base. Elle illustre le rôle de la topologie dans l'existence de petites valeurs propres. En combinant les arguments de [Lo02] et [Ja03b] (voir aussi [Ja03a]), on peut écrire :

Théorème 3.10. *Soit $n \geq 2$, $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, d la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 de A et d' sa multiplicité géométrique. On considère le fibré $M \xrightarrow{\pi} S^1$ de fibre T^n construit par suspension du difféomorphisme A. Alors :*

1. *$b_1(M) = d' + 1$;*
2. *Si $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de métrique sur M telle que $|K(M, g_i)| \leq a$ et que la submersion π soit une $\frac{1}{i}$-approximation de Hausdorff, alors il existe une constante $c(M, a) > 0$ telle que $\lambda_{1,d-d'+1}(M, g_i) > c$ pour tout i.*
3. *Pour tout $k \leq d - d'$, il existe une famille de métriques (g_ε^k) sur M de courbure et diamètre uniformément bornés par rapport à ε et une constante $c''(M) > 0$ telle que $(M, g_\varepsilon^k) \xrightarrow{d_{G\text{-}H}} S^1$ et $\lambda_{1,i}(M, g_\varepsilon^k) \to 0$ pour $i \leq k$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\lambda_{1,k+1}(M, g_\varepsilon^k) > c''$ si $k < n$.*
4. *Si la matrice A est semi-simple, alors M n'admet pas de petites valeurs propres en s'effondrant sur S^1, quel que soit le degré.*

Les points 2 et 4 mettent en évidence le rôle de la topologie dans l'existence de petites valeurs propres.

Le point 3 montre que la géométrie de l'effondrement a elle aussi une influence. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des fibrés en cercles (théorème 3.4), le nombre de petites valeurs propres n'est pas entièrement déterminé par la topologie du fibré : on peut le choisir librement dans des limites fixées par la topologie. Pour obtenir ces petites valeurs propres, au lieu d'effondrer la variété par homothétie de la fibre, on contracte la métrique plus rapidement dans des directions déterminées par la composante nilpotente de la décomposition de Jordan de A (voir [Ja03a]) pour les détails).

3.2.3. Flots riemanniens

Les flots riemanniens peuvent s'interpréter comme des généralisations des fibrés en cercle. On peut donc s'attendre à ce que le comportement de leurs spectres soient semblables au lors d'un effondrement. Dans [Ja10a], j'ai montré que ce n'était vrai que dans une certaine mesure. Avec les notations définies dans la section précédente, on obtient :

Théorème 3.11 ([Ja10a]). *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, $\mathcal{F}$ un flot riemannien sur M et (g_ε) l'effondrement adiabatique associé à une métrique g quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$. Alors :*

1. *le nombre de petites valeurs propres non nulles sur les p-formes pour l'effondrement (g_ε) est*

$$m_p = \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H^{n-p}(M/\mathcal{F}) - b_p(M) \ ;$$

2. *il existe une constante $c(g, \mathcal{F}) > 1$ telle que pour tout p, tout $1 \leq k \leq m_p$ et tout $0 < \varepsilon < 1$, on a $c^{-1} \cdot \varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon^2$.*

Le théorème 3.11 s'applique en particulier aux fibrés en cercles, ce qui permet de retrouver une partie des résultats de [CC00].

En revanche, il apparaît clairement que ce n'est pas la cohomologie de l'espace limite qui intervient, mais celle de la structure transverse. Je donne dans [Ja10a] des exemples produisant des petites valeurs propres alors que M et l'espace limite n'ont pas de cohomologie pour les degrés autres que 0 et n, ce qui contraste avec le cas des fibrés en cercle.

On peut déduire du théorème 3.11 un lien entre les propriétés spectrales du flot et les classes d'Álvarez et d'Euler :

Corollaire 3.12 ([Ja10a]). *S'il existe p tel que $\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, alors $[e] \neq 0$.*

La valeur propre $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 si et seulement si $[\kappa] = 0$ et $[e] \neq 0$.

Dans le cas où le flot est isométrique, on a donc une condition nécessaire et suffisante sur le spectre — à savoir l'absence de petites valeurs propres — pour que la classe d'Euler s'annule, comparable à celle qui est déjà connue dans le cas des fibrés en cercle ([CC00]). Cette condition ne se généralise cependant pas au cas des flots non isométriques. En effet, en dimension 4, on dispose du critère suivant :

Théorème 3.13 ([Ja10a]). *Sur une variété compacte de dimension 4, l'effondrement adiabatique d'un flot riemannien non isométrique ne produit pas de petites valeurs propres.*

J'ai construit dans [Ja10a] un exemple de flot riemannien non isométrique sur une variété de dimension 4 dont la classe d'Euler est non nulle, mais dont l'effondrement ne produit pas de petite valeur propre selon le théorème précédent. On peut étendre cet exemple aux dimensions plus grandes par produit.

3.3. Minoration du spectre

3.3.1. Variétés quelconques

Le théorème 3.1 étant faux pour le laplacien de Hodge-de Rham, il est naturel de chercher à minorer le spectre avec des hypothèses supplémentaires, en particulier en minorant le volume ou le rayon d'injectivité. Le principal résultat en ce sens a été obtenu par T. Mantuano :

Théorème 3.14 ([Ma08a]). *Pour tous entier $n \geq 2$ et tous réels $a, d, r > 0$, il existe une constante $c(n, a, d, r) > 0$ telle que si (M, g) une variété riemannienne de dimension n vérifiant* $\mathrm{diam}(M, g) < d$, $|K(M, g)| < a$ *et* $\mathrm{inj}(M, g) > r$ *alors*

$$\lambda_{p,1} \geq \frac{c}{\mathrm{Vol}(M) e^{\mathrm{Vol}(M)}}$$

pour tout $p \in [0, n]$.

S. Chanillo et F. Trèves avait auparavant publié dans [CT97], un énoncé plus précis : Si, pour un réel r tel que $0 < r < \mathrm{inj}(M)$, on note N le nombre de boules géodésiques de rayon $4^{-n}r$ nécessaire pour recouvrir M, on peut déduire de leur résultat (voir [Ja05]) qu'il existe une constance C ne dépendant que de la dimension et de la borne sur la courbure telle que

$$\lambda_{p,1}(M, g) \geq C r^{-2} N^{-7(p+1)}. \tag{3.15}$$

Malheureusement, le théorème de S. Chanillo et F. Trèves est compromis par une erreur décelée par T. Mantuano. On va voir au prochain paragraphe (remarque 3.19) qu'on peut en fait construire des contre-exemples au résultats de [CT97].

Le théorème 3.14 a l'inconvénient de faire intervenir des hypothèses à la fois sur le volume et le rayon d'injectivité, et en outre le rôle du rayon d'injectivité n'y est pas explicite. Toutefois, on va voir au paragraphe suivant qu'on ne peut pas espérer minorer le spectre par le rayon d'injectivité au carré comme c'est le cas pour les fibrés en cercles, ni par une autre puissance du rayon d'injectivité indépendante de la dimension.

3.3.2. Fibrés principaux en tores

Dans [Ja04], je me suis penché sur le cas des fibrés principaux s'effondrant sur leur base — la fibre étant alors nécessairement un tore. Cette hypothèse

permet d'étudier le comportement du spectre de manière détaillée en reprenant certaines techniques utilisées dans [CC00] pour les fibrés en cercles.

Un premier résultat est qu'à courbure et diamètre bornés, on ne peut pas minorer le spectre par une puissance du rayon d'injectivité indépendante de la dimension. Pour tout entier k, on peut construire un fibré dont l'effondrement produit une valeur propre pour les 1-formes décroissant au moins comme le rayon d'injectivité à la puissance $2k$:

Théorème 3.16 ([Ja04]). *Pour tout entier $k \geq 1$ et pour toute variété (N,h) telle que $b_2(N) \geq k$, il existe un fibré principal M en tore T^k sur N, une famille de métrique $(g_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ sur M, et des réels strictement positifs $C(k,(N,h))$ et $\varepsilon_0(k,(N,h))$ tels que la courbure et le diamètre de (M,g_ε) soient uniformément bornés par rapport à ε, $\mathrm{Vol}(M,g_\varepsilon)=\varepsilon$ pour tout ε, et*

$$\lambda_{p,1}(M,g_\varepsilon) \leq C\cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g_\varepsilon) \tag{3.17}$$

pour $p=1$ et 2, et pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$.

De plus, si $b_1(N)>b_2(M)$, on a aussi pour $p=2$ et 3

$$\lambda_{p,b_1(N)-b_2(M)}(M,g_\varepsilon) \leq C\cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g_\varepsilon) \tag{3.18}$$

Remarque 3.19. Dans ces exemples, la valeur propre $\lambda_{p,1}(M,g_\varepsilon)$ est en fait de l'ordre de ε^2 et le rayon d'injectivité de l'ordre de $\varepsilon^{1/k}$. Si on fixe la dimension de la base N et qu'on choisit k suffisamment grand, ces valeurs contredisent l'inégalité (3.15).

En petite dimension, on peut trouver des valeurs propres décroissant plus vite que $\mathrm{inj}^2(M)$ pour tous les degrés :

Corollaire 3.20 ([Ja04]). *Pour $n=5$ et 7, il existe un fibré M en tores T^2 sur une variété de dimension $n-2$, une suite de métrique (g_ε) sur M et une constante $C>0$ telles que la suite (g_ε) effondre le fibré M sur sa base à courbure et diamètre bornés quand ε tend vers zéro, et que*

$$\lambda_{p,1}(M,g_\varepsilon) \leq C\cdot \mathrm{inj}^{4}(M,g_\varepsilon) \tag{3.21}$$

pour $1\leq p\leq n-1$.

Le second résultat de [Ja04] consiste à minorer le spectre en restriction aux 1-formes à la fois par le volume au carré et par une puissance du rayon d'injectivité qui dépend de la dimension de la fibre. Cette minoration montre que l'exposant du rayon d'injectivité dans les majorations du théorème 3.16 et du corollaire 3.20 est optimal :

Théorème 3.22 ([Ja04]). *Soit deux réels a et d strictement positifs, un entier $n\geq 3$ et (N,h) une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à n. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h))>0$, $C(n,a,d,(N,h))>$*

0 *et* $C'(n,a,d,(N,h)) > 0$ *telles que si* (M,g) *est une variété riemannienne de dimension* n *vérifiant* $\mathrm{diam}(M,g) \leq d$, $|K(M,g)| \leq a$ *et si* $\pi : (M,g) \to (N,h)$ *est une fibration principale de fibre* T^k *qui soit une* ε*-approximation de Hausdorff avec* $\varepsilon < \varepsilon_0$, *alors*

$$\lambda_{1,1}(M,g) \geq C \cdot \mathrm{Vol}^2(M,g) \geq C' \cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g). \tag{3.23}$$

Les résultats de [Ja04] permettent de préciser la question 3.5 : la bonne conjecture serait de minorer le spectre par le carré du volume.

3.4. Questions

3.4.1. Effondrements à courbure bornée

Comme on l'a remarqué au paragraphe 3.3.1, pour une variété quelconque, on ne connaît pas de minoration du spectre à courbure de diamètre bornés qui soit vraiment explicite par rapport au volume ni même par rapport au rayon d'injectivité.

Question 3.24. *Peut-on donner une minoration du spectre sur une variété quelconque qui soit explicite par rapport au rayon d'injectivité ?*

Le théorème 3.22 ne donne qu'une minoration du spectre sur les fibrés principaux et en restriction aux 1-formes, ce qui pose le problème de sa généralisation.

Question 3.25. *Peut-on généraliser la minoration du spectre sur les fibrés principaux aux p-formes différentielles, pour tout p ?*

Enfin, on peut reformuler la question 3.5 au vu des résultats présentés au paragraphe précédent :

Question 3.26. *La minoration du spectre par le volume au carré de la variété se généralise-t-elle à d'autres familles de variétés ?*

3.4.2. Effondrements à courbure minorée

Plus récemment a été abordé le problème de l'existence de petites valeurs propres sous une hypothèse géométrique plus faible, à savoir que la courbure sectionnelle est seulement bornée inférieurement, le diamètre restant majoré. Plus précisément, des exemples de petites valeurs propres ont été exhibés pour une famille d'effondrements à courbure minorée présentée par T. Yamaguchi dans [Ya91] : soit M une variété sur laquelle agit un groupe de Lie compact G (cette action n'est pas nécessairement libre). On munit M et G des métriques bi-invariantes g et $\bar{g}$ respectivement, et pour tout ε ont définit sur M la métrique g_ε comme étant la métrique quotient de $((G,\varepsilon^2\bar{g}) \times (M,g))/G$ pour l'action diagonale de G. La variété (M,g_ε) tend

pour la distance de Gromov-Hausdorff vers M/G quand $\varepsilon \to 0$, la courbure de g_ε restant uniformément minorée.

J. Takahashi a exhibé dans [Ta02] un premier exemple de petite valeur propre en considérant une action de S^1 sur S^{2n} (remarque : comme la caractéristique d'Euler des sphères de dimension paire est non nulle, elles ne peuvent pas s'effondrer à courbure bornée). J. Lott a généralisé ce résultat dans [Lo04] en donnant pour tous les effondrements de Yamaguchi décrits ci-dessus une minoration du nombre de petites valeurs propres qui dépend de la topologie de M et M/G.

Les connaissances sur ce problème restent très limitées. On ne sait par exemple pas si la liste de petite valeurs propres donnée dans [Lo04] est exhaustive. En outre, le comportement asymptotique du spectre dépend de la géométrie de l'effondrement, comme le montre l'exemple des sphères de dimension impaire :

Exemple 3.27. On considère l'action de $\mathrm{SO}(2n)$ sur la sphère S^{2n-1}. L'effondrement de Yamaguchi $(S^{2n-1}, g_\varepsilon)$ associé à cette action est une simple homothétie qui effondre la sphère sur un point sans produire de petite valeur propre. Cependant, comme S^{2n-1} est muni d'une structure de fibré en cercle, on peut ensuite appliquer le théorème 3.4 et effondrer ce fibré de manière à obtenir une suite de métriques g'_ε telle que $g'_\varepsilon \leq g_\varepsilon$ et $\lambda_{1,1}(M, g'_\varepsilon) < \varepsilon$, la courbure restant uniformément minorée.

Remarque 3.28. L'exemple 3.27 peut se généraliser aux fibrés en cercles dont la base s'effondre à courbure minorée. On peut noter par ailleurs qu'on utilise le fait que la variété admet une petite valeur propre à courbure bornée.

Question 3.29. *Existe-t-il une variété M dont le volume minimal est nul, qui n'admet pas de petite valeur propre à courbure sectionnelle bornée mais qui en admet à courbure minorée ?*

On peut aussi envisager d'affaiblir encore l'hypothèse sur la courbure :

Question 3.30. *Existe-t-il une variété qui n'admet pas de petite valeur propre à courbure sectionnelle minorée mais qui en admet à courbure de Ricci minorée ?*

Enfin, on peut reformuler la question 3.26 avec ces hypothèses :

Question 3.31. *À diamètre borné et courbure minorée, peut-on minorer la première valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham par le volume de la variété au carré ?*

Chapitre 4

Spectre et géométrie conforme

Si g est une métrique riemannienne sur une variété M, la classe conforme de g est définie par

$$[g] = \{h^2 g,\ h \in C^\infty(M),\ h > 0\}. \tag{4.1}$$

L'étude des invariants géométriques et analytiques d'une classe conforme est un sujet ancien qui fait l'objet d'un vaste littérature, une des principales motivations étant le problème de Yamabe, c'est-à-dire la recherche d'une métrique de courbure scalaire constante dans une classe conforme donnée.

On peut s'intéresser au problème des petites valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham dans ce contexte. Dans ce chapitre, nous allons nous pencher sur cette question en l'élargissant à d'autres opérateurs et au problème de l'existence de grandes valeurs propres :

Question 4.2. *Peut-on faire tendre les valeurs propres d'un opérateur géométrique vers 0 ou $+\infty$ en fixant la classe conforme C et en posant* $\mathrm{Vol}(M) = 1$ *?*

Formulé autrement, le problème consiste à étudier les extrema de la fonctionnelle

$$g \mapsto \lambda_k(M, g)\,\mathrm{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}, \tag{4.3}$$

où $\lambda_k(M, g)$ désigne une valeur propre d'un opérateur géométrique d'ordre deux, par exemple le laplacien. On s'intéressera plus précisément au laplacien usuel, au laplacien de Hodge-de Rham et au carré de l'opérateur de Dirac.

Pour ces opérateurs, la réponse à la question 4.2 est maintenant connue, grâce à des travaux effectués des années 80 jusqu'à aujourd'hui. Le tableau qui suit résume ces résultats pour la première valeur propre de l'opérateur.

On va présenter ces résultats de manière plus détaillée dans la suite du chapitre.

La première section sera consacrée au cas du laplacien usuel. On développera en particulier des résultats concernant le volume conforme, un invariant

	$\inf_{g\in C}\lambda_1$	$\sup_{g\in C}\lambda_1$
fonctions	$=0$	$<+\infty$ (Li & Yau, El Soufi & Ilias)
opérateur de Dirac	>0 (Lott, Hijazi, Ammann)	$=+\infty$ (Ammann & J.)
formes, $p=\frac{n}{2}$	>0 (J.)	$+\infty$ (Colbois & El Soufi)
formes, $p\neq\frac{n}{2}$	$=0$ (J.)	

TABLE 4.1 – extrema de λ_1 dans une classe conforme

conforme introduit par P. Li et S. T. Yau et qui permet de majorer la première valeur propre du laplacien. Ma contribution à l'étude du volume conforme consiste à montrer que sur une variété donnée, on peut toujours trouver une classe conforme dont le volume conforme est inférieur à une constante ne dépendant que de la dimension (voir paragraphe 4.1.3).

Dans la seconde section, on traitera le cas de l'opérateur de Dirac, et plus généralement des opérateurs conformément covariants, comme le laplacien conforme ou l'opérateur de Paneitz : en effet, les résultats concernant l'existence ou non de bornes conformes sur le spectre sont liées de manière cruciale à cette propriété de covariance conforme qu'on rappellera. Avec B. Ammann, nous avons en particulier montré l'absence de borne supérieure pour les valeurs propres à volume fixé.

On verra enfin le cas du laplacien de Hodge-de Rham. J'ai montré pour cet opérateur qu'il existe une minoration conforme du spectre du même type que celle qui existe pour l'opérateur de Dirac, mais uniquement pour les formes de degré $n/2$ en dimension n paire, et pour les formes coexactes de degré $[n/2]$ en dimension impaire. Il n'existe pas d'autres rigidités : B. Colbois et A. El Soufi ont montré qu'on peut faire tendre les valeurs propres vers l'infini pour tous les degrés autres que 0 et 1, et j'ai montré que pour les degrés pour lesquels on ne connaissait pas de bornes conformes, on pouvait en fait prescrire le début du spectre à volume fixé.

Ce chapitre doit beaucoup à l'article d'exposition [Ja07a] que j'ai écris pour les actes du Séminaire de théorie spectrale et géométrie, certains passage ayant toutefois été remaniés ou mis à jour.

4.1. Laplacien agissant sur les fonctions

4.1.1. Spectre conforme

On peut assez facilement déformer la métrique d'une variété compacte de sorte que la première valeur propre du laplacien tende vers zéro, il suffit de construire une haltère de Cheeger, et cette déformation peut se faire de manière conforme. Le procédé se généralise sans problème à plusieurs valeurs propres.

En revanche, déterminer la borne supérieure d'une valeur propre dans une classe conforme est beaucoup plus délicat. On sait toutefois, grâce aux travaux de N. Koorevar que cette borne supérieure est finie :

Théorème 4.4 ([Ko93]). *Soit M une variété compacte de dimension n et C une classe conforme de métriques sur M. Il existe une constante $a(C) > 0$ telle que*

$$\sup_{g\in C} \lambda_k(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \leq a \cdot k^{\frac{2}{n}}.$$

Pour $k = 1$, une telle majoration avait déjà été obtenue par A. El Soufi et S. Ilias dans [ESI86] (voir paragraphe suivant).

Ce résultat permet de définir des invariants conformes de la variété M en considérant la borne supérieure de $\lambda_k(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ dans une classe conforme. ces invariants ont été définis et étudiés par B. Colbois et A. El Soufi dans [CES03] :

Définition 4.5 ([CES03]). *Soit M une variété riemannienne compacte et C une classe conforme de métriques sur M. La k-ième valeur propre conforme de (M,C) est définie par*

$$\lambda_k^c(M,C) = \sup_{g\in C} \lambda_k(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}.$$

La suite $(\lambda_k^c(M,C))_k$ est appelée spectre conforme de (M,C).

On connaît peu de valeurs exactes des $\lambda_k^c(M,C)$. Outre le cas de la 1re valeur propre de certaines variétés s'immergeant isométriquement minimalement dans des sphères que nous verrons au paragraphe 4.1.2, le seul exemple semble être $\lambda_2^c(S^2, C_{\mathrm{can}}) = 16\pi$ calculé par N. Nadirashvili dans [Na02].

B. Colbois et A. El Soufi obtiennent dans [CES03] quelques estimées générales des valeurs propres conformes, à commencer par une minoration par le spectre conforme de la sphère :

Théorème 4.6. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$ on a*

$$\lambda_k^c(M,C) \geq \lambda_k^c(S^n, C_{\mathrm{can}}).$$

Ce résultat était déjà connu pour $k = 1$ ([FN99]).

Leur second résultat est que la différence entre deux valeurs propres conformes consécutives est uniformément minorée :

Théorème 4.7. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$ on a*

$$\lambda_{k+1}^c(M,C)^{\frac{n}{2}} - \lambda_k^c(M,C)^{\frac{n}{2}} \geq \lambda_1^c(S^n, C_{\text{can}})^{\frac{n}{2}} = n^{\frac{n}{2}}\omega_n,$$

où ω_n désigne le volume de S^n pour sa métrique canonique.

On peut en déduire une minoration de $\lambda_k^c(M,C)$ en fonction de n et k :

Corollaire 4.8. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$, on a*

$$\lambda_k^c(M,C) \geq n\omega_n^{\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Notons que dans cette dernière égalité, on a égalité sur les sphères pour $k = 1$ et n quelconque, ainsi que pour $k = n = 2$.

La question se pose naturellement de savoir quelles métriques peuvent réaliser le maximum de $\lambda_k(M,g)$ dans une classe conforme. A. El Soufi et S. Ilias montre dans [ESI03] que pour une telle métrique, la valeur propre $\lambda_k(M,g)$ est nécessairement multiple. On peut en déduire, en conjonction avec le théorème 4.7 qu'une métrique ne peut pas maximiser trois valeurs propres consécutives dans sa classe conforme.

4.1.2. Volume conforme et première valeur propre du laplacien

Le cas de la première valeur propre du laplacien est particulier car A. El Soufi et S. Ilias, généralisant en toute dimension un résultat obtenu en dimension 2 par P. Li et S. T. Yau [LY82], en ont donné une majoration plus précise que celle de N. Korevaar — et en un sens optimale — en utilisant le volume conforme.

Si on note G_N le groupe des difféomorphismes conforme de la sphère S^N munie de sa structure conforme canonique, le volume conforme de la variété M pour la classe conforme C, introduit par P. Li et S. T. Yau dans [LY82], est défini par

$$V_{\text{c}}(M,C) = \inf_N \inf_{\varphi:(M,C)\to S^N} \sup_{\gamma\in G_N} \text{Vol}(\gamma\circ\varphi(M)), \tag{4.9}$$

l'application φ parcourant l'ensemble des immersions conformes de (M,C) dans S^N.

La propriété du volume conforme qui nous intéresse ici est la suivante :

Théorème 4.10 ([LY82],[ESI86]). *Si (M,g) est une variété riemannienne compacte, alors*

$$\lambda_1(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \leq nV_{\mathrm{c}}(M,[g])^{\frac{2}{n}}.$$

La principale motivation de P. Li et S. T. Yau était d'utiliser le théorème 4.10 pour démontrer des cas particuliers de la conjecture de Willmore. Cette conjecture affirme que pour toute immersion $T^2 \to \mathbb{R}^3$ du tore, l'intégrale $\int_{T^2} H^2 \mathrm{d}v_g$ du carré de la courbure moyenne est minorée par $2\pi^2$ (voir le survol [Wi00] de T. J. Willmore). Li et Yau ont montré qu'on peut la minorer en fonction du volume conforme, ce qui leur a permis de démontrer cette conjecture pour certaines classes conformes d'immersion du tore.

Signalons que cette inégalité a trouvé récemment une nouvelle application : en la généralisant à des orbivariétés, I. Agol a montré dans [Ag06] qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes de réflexions kleiniens arithmétiques maximaux.

Outre le fait qu'elle est plus explicite que la majoration obtenue par N. Korevaar, l'inégalité du théorème 4.10 a l'intérêt qu'on peut caractériser le cas d'égalité et en exhiber des exemples.

Définition 4.11 ([ESI92]). *On dit qu'une métrique g sur une variété compacte M est λ_1-minimale si (M,g) s'immerge isométriquement minimalement dans une sphère par ses premières fonctions propres.*

Théorème 4.12 ([ESI86]). *Soit (M,g) est une variété riemannienne compacte. On a l'égalité $\lambda_1(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = nV_{\mathrm{c}}(M,[g])^{\frac{2}{n}}$ si et seulement si (M,g) est λ_1-minimale.*

Remarque 4.13. La λ_1-minimalité est aussi fortement liée à l'extrémalité de la métrique pour la fonctionnelle (4.3) pour $k=1$ dans l'espace de toute les métriques (voir [Na96] et [ESI00]).

La condition de λ_1-minimalité a été étudiée par T. Takahashi dans [Ta66], où il montre qu'elle est équivalente à l'existence d'une famille de premières fonctions propres $(f_1,\dots,f_k)$ telle que $g = \sum_{i=1}^k \mathrm{d}f_i^2$, et que cette condition est vérifiée sur les variétés homogènes irréductibles. Elle l'est aussi sur les variétés fortement harmoniques ([Be78]) et sur quelques autres exemples ([MOU84]). On peut en déduire les valeurs exactes du volume conforme et de la première valeur propre conforme sur les espaces projectifs munis de leur métrique canonique :

Remarque 4.14. En dimension 2, la fonctionnelle (4.3) est uniformément majorée sur l'espace de toutes les métriques, et une métrique réalisant son maximum est λ_1-minimale. Outre le cas de la sphère, on connaît deux valeurs explicites de λ_1^c dans cette situation. Sur le tore, le maximum est atteint par

variété	dimension	V_c	λ_1^c
S^n	n	ω_n	$n\omega_n^{\frac{2}{n}}$
$\mathbb{R}P^n$	n	$\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\omega_n}{2}$	$2^{\frac{n-2}{n}}(n+1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$
$\mathbb{C}P^n$	$2n$	$\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)^{n} \frac{1}{n!}$	$4\pi(n+1)n!^{-\frac{1}{n}}$
$\mathbb{H}P^n$	$4n$	$\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)^{2n} \frac{1}{(2n+1)!}$	$8\pi(n+1)(2n+1)!^{-\frac{1}{2n}}$
$\mathbb{C}\mathrm{a}P^2$	16	$\frac{6(3\pi)^8}{11!}$	$48\pi\left(\frac{6}{11!}\right)^{\frac{1}{8}}$

TABLE 4.2 – Quelques variétés λ_1-minimales

le tore équilatéral $T^2_{\mathrm{eq}} = \mathbb{R}^2/\left((1,0)\mathbb{Z} \oplus (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\mathbb{Z}\right)$ et $\lambda_1^c(T_{\mathrm{eq}}) = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi^2$ (voir [Na96]). Ce maximum a aussi été récemment calculé sur la bouteille de Klein dans [ESGJ07].

Remarque 4.15. La propriété de λ_1-minimalité est stable par produit : on peut facilement vérifier que si deux variétés ont même première valeur propre et que leur métrique peut s'écrire sous la forme $g = \sum_{i=1}^k \mathrm{d}f_i^2$ où les f_i sont des premières fonctions propres, il en va de même pour leur produit. On peut construire ainsi d'autres exemples comme le tore de Clifford $S^1 \times S^1$.

4.1.3. Volume conforme et chirurgies

L. Friedlander et N. Nadirashvili ont redémontré de manière indépendante dans [FN99] que $\lambda_1(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ est majoré dans une classe conforme. Ils définissent aussi un nouvel invariant différentiable de M par $\nu(M) = \inf_g \lambda_1^c(M,[g])$ et montrent qu'il est toujours minoré par $\lambda_1^c(S^n, C_{\mathrm{can}})$. On peut définir un « spectre conforme minimal » pour M en étendant cet invariant aux autres valeurs propres par

$$\nu_k(M) = \inf_g \lambda_k^c(M,[g]). \tag{4.16}$$

Ces invariants sont très mal connus. On peut déduire des résultats évoqués précédemment que $\nu_1(S^n) = \lambda_1^c(S^n, C_{\mathrm{can}})$, on peut aussi affirmer que $\nu_2(S^2) = 16\pi$ et $\nu_1(\mathbb{R}P^2) = 12\pi$ en utilisant le fait que ces deux variétés n'ont qu'une classe conforme. A. Girouard a récemment montré dans [Gi09] que $\nu_1(T^2) = \nu_1(K^2) = 8\pi$ où K^2 désigne la bouteille de Klein, et on conjecture que pour toute surface compacte Σ autre que $\mathbb{R}P^2$, on a $\nu_1(\Sigma) = 8\pi$.

Il est difficile d'extrapoler ce que peut être le comportement de ces invariants à partir d'aussi peu d'exemples, surtout que la dimension 2 pourrait être pathologique. Le cas du plan projectif montre cependant que l'invariant $\nu_1(M)$ n'est pas trivial.

Pour étudier cet invariant, j'ai proposé dans [Ja08a] d'introduire un nouvel invariant des variétés différentielles, que j'ai baptisé *volume de Möbius*, et défini à l'aide du volume conforme :

Définition 4.17. *Si M est une variété différentielle compacte, on définit le* volume de Möbius *de M par*

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_g V_c(M, [g]).$$

On a alors la majoration suivante, qui découle immédiatement du théorème 4.10 :

$$\nu_1(M) \leq n V_{\mathcal{M}}(M)^{\frac{2}{n}}. \tag{4.18}$$

Pour définir le volume conforme minimal, il suffit dans la relation (4.9) de supprimer la condition que l'immersion φ soit conforme, c'est à dire qu'on a :

$$V_{\mathcal{M}}(M) = \inf_{\varphi: M \to S^k} \sup_{\gamma \in G(S^k)} \mathrm{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)). \tag{4.19}$$

Contrairement au spectre conforme minimal dont la définition fait appel à des structures riemanniennes et conformes sur la variété, on a donc seulement besoin ici de la structure différentielle de M et de la structure conforme de la sphère canonique, ce qui justifie la dénomination de volume de Möbius.

Les seules valeurs exactes connues du volume de Möbius sont $V_{\mathcal{M}}(S^n) = \omega_n$ et $V_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}P^2) = 6\pi$. On peut cependant montrer qu'à dimension fixée, il est uniformément majoré :

Théorème 4.20 ([Ja08a]). *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour toute variété compacte M de dimension n, on a $V_{\mathcal{M}}(M) \leq c(n)$.*

On en déduit immédiatement que l'invariant $\nu_1(M)$ est uniformément majoré à dimension fixée.

Le principe de la démonstration est d'étudier comment varie le volume de Möbius quand on pratique des chirurgies sur la variété. On peut montrer en particulier les deux relations qui suivent :

Proposition 4.21. *Soit $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$. Il existe une constante $c(n,k) > 0$ telle que si $\widetilde{M}$ est une variété obtenue par chirurgie de degré k sur une variété compacte M de dimension n, alors $V_{\mathcal{M}}(\widetilde{M}) \leq \sup\{V_{\mathcal{M}}(M), c\}$.*

Proposition 4.22. *Il existe une constante $c(n) > 0$ telle que si M_1 et M_2 sont deux variétés compactes de même dimension $n \geq 3$ alors $V_{\mathcal{M}}(M_1 \# M_2) \leq \sup(V_{\mathcal{M}}(M_1), V_{\mathcal{M}}(M_2), c)$.*

En se basant sur ces résultats, on montre que le volume conforme est uniformément majoré sur toute classe de cobordisme, et on conclut en utilisant le fait que l'ensemble des classes de cobordisme est un groupe de type fini pour la somme connexe.

4.2. Opérateur de Dirac et opérateurs conformément covariants

4.2.1. Opérateurs conformément covariants

Nous allons ici nous intéresser à des opérateurs qui peuvent être assez différents dans leur construction mais qui partagent une propriété de covariance conforme. Avant de définir cette propriété, commençons par une présentation des deux principaux exemples de tels opérateurs.

Si (M, g) est une variété riemannienne munie d'une structure spinorielle χ, on peut définir l'opérateur de Dirac D agissant sur les sections du fibré des spineurs $\Sigma_g M$ (voir par exemple [LM89] ou [Hi01]). C'est un opérateur elliptique du 1$^{\text{er}}$ ordre dont le spectre n'est pas borné inférieurement. Par commodité, et pour garder une certaine cohérence des notations par rapport aux autres opérateurs traités dans ce texte, nous considérerons le spectre de D^2, que nous noterons

$$0 \leq \lambda_1(M, \chi, g) \leq \lambda_2(M, \chi, g) \leq \dots. \tag{4.23}$$

On notera en outre $\lambda^+(M, \chi, g)$ la première valeur propre strictement positive.

Le laplacien conforme, appelé aussi opérateur de Yamabe, qui agit sur les fonctions de M est défini, quand la dimension n est au moins égale à 3, par

$$\mathrm{L}_g : f \mapsto \Delta f + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{scal}_g f, \tag{4.24}$$

où scal_g désigne la courbure scalaire pour la métrique g (en dimension 2, la laplacien conforme s'identifie au laplacien usuel). Il suscite un intérêt particulier du fait de son lien avec le problème de Yamabe. Le spectre de L est borné inférieurement, mais peut contenir un nombre fini de valeurs propres négatives. Nous noterons son spectre complet par

$$\lambda_1(M, \mathrm{L}_g) \leq \lambda_2(M, \mathrm{L}_g) \leq \dots \tag{4.25}$$

et par $\lambda^+(M, \mathrm{L}_g)$ (resp. $\lambda^-(M, \mathrm{L}_g)$) la plus petite valeur propre (en valeur absolue) strictement positive (resp. strictement négative).

Les opérateurs D et L ont en commun une propriété de covariance conforme : on dit qu'on opérateur T d'ordre j est conformément covariant s'il vérifie la relation

$$\mathrm{T}_{h^2 g} = h^{-\frac{n+j}{2}} \mathrm{T}_g h^{\frac{n-j}{2}} \tag{4.26}$$

où h est une fonction strictement positive et T_g désigne l'opérateur T pour la métrique g. Cette propriété est vérifiée par d'autres opérateurs, par exemple l'opérateur de Paneitz (pour $j = 4$). On peut déduire immédiatement de cette relation que la dimension du noyaux de T — donc en particulier ceux

de D et L — est un invariant conforme, ce qui justifie le fait de ne s'intéresser ici qu'à leurs valeurs propres non nulles.

Certaines connivences entre les spectres de ces deux opérateurs sont bien connues, citons par exemple l'inégalité suivante due à O. Hijazi ([Hi86]) sur laquelle nous reviendront :

$$\lambda_1(M,\chi,g) \geq \frac{n}{n-2}\lambda_1(M,\mathrm{L}_g). \tag{4.27}$$

Cette inégalité n'est significative que si $\lambda_1(M,\mathrm{L}_g)$ est strictement positif.

4.2.2. Minoration conforme du spectre

Le comportement du spectre des opérateurs conformément covariants, au moins dans le cas sous-critique (c'est-à-dire quand l'ordre de l'opérateur est strictement inférieur à la dimension de la variété), contraste avec celui du spectre du laplacien usuel. Un premier résultat en ce sens est qu'on ne peut pas faire tendre les valeurs propres vers zéro dans une classe conforme :

Théorème 4.28. *Soit (M,χ) une variété spinorielle compacte et C une classe conforme de métrique sur M. Alors*

$$\inf_{g\in C} \lambda^+(M,\chi,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} > 0.$$

Ce théorème à été démontré par J. Lott ([Lo86]) dans le cas ou l'opérateur de Dirac est inversible, et dans le cas général par B. Ammann ([Am03]). Les deux auteurs remarquent que la démonstration est valable pour n'importe quel opérateur elliptique autoadjoint conformément covariant de degré strictement inférieur à n, et quel que soit le signe des valeurs propres. On peut donc remplacer $\lambda^+(M,\chi,g)$ par $|\lambda^-(M,\chi,g)|$, $\lambda^+(M,\mathrm{L}_g)$ ou $|\lambda^-(M,\mathrm{L}_g)|$ dans le théorème 4.28.

Dans [Am09], B. Ammann étudie l'existence de métriques réalisant la borne inférieure du théorème 4.28. Dans le cas où cette borne est strictement plus petite que celle de la sphère canonique (cette condition est étudiée plus en détail dans [AHM06], elle est en particulier vérifiée par $M = \mathbb{R}P^{4k+3}$ pour λ^+ ou λ^- selon le choix de la structure spinorielle), il montre qu'elle est atteinte en élargissant la classe conforme C à des métriques dégénérées de la forme $h^2 g$ où g est une métrique de C et h une fonction $C^{2,\alpha}$ qui peut s'annuler.

Dans le cas où l'invariant de Yamabe, défini par

$$Y(M,C) = \inf_{g\in C} \frac{\int_M \mathrm{scal}_g \,\mathrm{d}v_g}{\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{4.29}$$

est strictement positif, ce qui est une restriction topologique et géométrique assez importante, on a aussi l'identité classique pour $n \geq 3$

$$\inf_{g\in C} \lambda_1(M,\mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = \frac{n-2}{4(n-1)} Y(M,C), \tag{4.30}$$

qui nous dit que $\lambda^+(M, \mathrm{L}_g) = \lambda_1(M, \mathrm{L}_g)$ en donnant au passage une minoration optimale de $\lambda^+(M, \mathrm{L}_g)\operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$, et qui fournit aussi en conjonction avec l'inégalité de Hijazi (4.27) une minoration explicite de $\lambda_1(M, \chi, g)\operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$ pour $n \geq 3$. C. Bär a étendu dans [Bä92] cette inégalité à la dimension 2 :

$$\lambda_1(S^2, \chi, g)\operatorname{Vol}(S^2, \chi, g) \geq 4\pi. \tag{4.31}$$

Pour les surfaces de genre supérieur ou égal à 1, l'invariant de Yamabe est négatif ou nul, et donc l'inégalité est triviale.

Signalons aussi que dans [AH06b], B. Ammann et É. Humbert étudient l'existence de métriques minimisant $\lambda_2(M, \mathrm{L}_g)\operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$.

4.2.3. Invariants σ et τ

On a vu que la majoration de la première valeur propre du laplacien dans une classe conforme permettait de définir un invariant différentiel par un min-max. On peut définir des invariants similaires à l'aide de l'opérateur de Dirac et du laplacien conforme et d'un max-min.

Un invariant de ce type a déjà été défini à l'aide de l'invariant de Yamabe. Cet invariant, introduit indépendamment par O. Kobayashi [Ko87] et R. Schoen [Sc87], est noté $\sigma(M)$ et appelé invariant de Schoen ou invariant de Yamabe différentiel :

$$\sigma(M) = \sup_g Y(M, [g]), \tag{4.32}$$

Comme pour toute classe conforme C on a $Y(M, C) \leq n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$ cette borne supérieure est finie, et $\sigma(M) \leq n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$. Dans le cas où $\sigma(M)$ est strictement positif, l'égalité (4.30) nous dit que c'est l'invariant annoncé pour le laplacien conforme (à une constante multiplicative près) :

$$\sigma(M) = \frac{4(n-1)}{n-2}\sup_g \inf_{\tilde{g}\in[g]} \lambda_1(M, \mathrm{L}_{\tilde{g}})\operatorname{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{2}{n}}. \tag{4.33}$$

Remarque 4.34. L'invariant qu'on pourrait définir de la même manière avec $\lambda^+(M, \mathrm{L}_g)$ semble moins pertinent (et plus difficile à étudier) car le nombre de valeurs propres négatives ou nulles de L dépend de la classe conforme.

L'invariant σ a été plus étudié que l'invariant ν de Friedlander-Nadirashvili vu au paragraphe 4.1.3 en raison de ses liens avec le problème de Yamabe, l'existence de métriques de courbure scalaire positive et la recherche de métriques d'Einstein (voir par exemple [Sc89]). Un certain nombre de travaux récents portent sur l'évolution de $\sigma(M)$ quand on procède à des

chirurgies sur M (voir notamment [Pe98], [Pe00], [PY99] et [ADH]). Je ne présenterai pas ici l'ensemble des résultats obtenus, je me contenterai de rappeler quelques valeurs exactes connues de l'invariant σ.

En dimension quelconque, on sait calculer l'invariant σ sur les variétés suivantes (voir [Ko87] et [Sc89]) :

$$\sigma(S^n) = \sigma(\#i(S^{n-1} \times S^1)) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}, \text{ et } \sigma(T^n \# N) = 0$$

pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$ et toute variété N telle que $\sigma(N) \geq 0$.

Une attention particulière a été portée aux variétés de dimension 3 : pour tous entiers i, j, k et l tels que $i + j \geq 1$, on a

$$\sigma(\#i(\mathbb{R}P^3)\#j(\mathbb{R}P^2 \times S^1)\#k(S^2 \times S^1)\#l(S^2 \ltimes S^1)) = 6\pi^{\frac{2}{3}} = \frac{\sigma(S^3)}{2^{\frac{2}{3}}},$$

où $S^2 \ltimes S^1$ désigne le fibré non orientable en cercle sur S^2 (voir [AN07] et les références qui y sont données). L'exemple de $\mathbb{R}P^3$, calculé par H. L. Bray et A. Neves dans [BN04], vient conforter la conjecture selon laquelle pour les quotients de la sphères, on a $\sigma(\Gamma \backslash S^n) = n(n-1)\left(\omega_n/|\Gamma|\right)^{\frac{2}{n}}$.

Dans [AH06a], B. Ammann et É. Humbert définissent l'invariant correspondant pour l'opérateur de Dirac

$$\tau(M, \chi) = \sup_g \inf_{\tilde{g} \in [g]} \sqrt{\lambda_1(M, \chi, \tilde{g})}\, \mathrm{Vol}(M, \tilde{g})^{\frac{1}{n}}, \tag{4.35}$$

l'une des motivations étant que que l'inégalité de Hijazi le lie à l'invariant de Schoen :

$$\tau(M, \chi)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\sigma(M). \tag{4.36}$$

Dans ce cas aussi le nombre de valeurs propres nulles peut varier avec la classe conforme, c'est la raison pour laquelle on considère $\lambda_1(M, \chi, \tilde{g})$ et pas $\lambda^+(M, \chi, \tilde{g})$.

On a la majoration $\tau(M, \chi) \leq \tau(S^n, \chi) = \frac{n}{2}\omega_n^{\frac{1}{n}}$ (voir [Am03], [AGHM08] et [AHM04]) et on connaît la valeur de τ sur quelques variétés : dans [AH06a], B. Ammann et É. Humbert déduisent de (4.36) que

$$\tau(S^{n-1} \times S^1, \chi) = \frac{n}{2}\omega_n^{\frac{1}{n}} = \tau(S^n, \chi), \tag{4.37}$$

et montrent que $\tau(T^2, \chi) = 0$ ou $2\sqrt{\pi}$ selon la structure spinorielle χ. Dans [AH08], ils étendent ce dernier résultat aux autres surfaces orientables compactes et montrent en toute dimension que $\tau(M, \chi)$ croit par adjonction d'anses. Comme dans le cas de l'invariant σ, Ammann, Dahl et Humbert ont obtenu plus récemment des estimées de l'invariant τ quand on procède à des chirurgies plus générales ([ADH09b]).

4.2.4. Grandes valeurs propres

En ce qui concerne le question de savoir si on peut faire tendre les valeurs propres vers l'infini, le comportement des opérateurs conformément covariant est là encore différent de celui du laplacien. Avec Bernd Ammann, nous avons montré que les valeurs propres ne sont pas bornées :

Théorème 4.38 ([AJ11]). *Soit M une variété compacte de dimension n et C une classe conforme de métrique sur M. Si $n \geq 3$, alors*

$$\sup_{g\in C} \lambda^+(M, \mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = +\infty,$$

et

$$\inf_{g\in C} \lambda^-(M, \mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = -\infty.$$

Si $n \geq 2$ et que M est munie d'une structure spinorielle χ, alors

$$\sup_{g\in C} \lambda^+(M, \chi, g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = +\infty.$$

Ce résultat est en fait valide pour les autres opérateurs conformément covariant sous une hypothèse technique d'inversibilité sur les cylindres. Plus précisément, on dit qu'un opérateur conformément covariant vérifie l'hypothèse (*) s'il est invariant sur la variété $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit, S^{n-1} étant munie de sa métrique canonique.

Théorème 4.39 ([AJ11]). *Soit T un opérateur elliptique conformément covariant d'ordre k défini sur les variétés de dimension $n > k$ et vérifiant l'hypothèse (*). Si M est une variété compacte de dimension n et qu'on note $\lambda^+(M, T, g)$ la première valeur propre strictement positive de T sur (M, g), alors*

$$\sup_{g\in C} \lambda^+(M, T, g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = +\infty$$

pour toute classe conforme C sur M.

La démonstration de ce théorème utilise des métriques, baptisées « métriques Pinocchio » dans [AB00], qui sont telles qu'un domaine de la variété soit presque isométrique à la réunion d'un cylindre arbitrairement long et d'une demi-sphère collée à l'une de ses extrémité (le « nez » de la métrique).

L'hypothèse (*) est satisfaite par les opérateurs conformément covariant les plus courants ; on peut le vérifier en exploitant la positivité de certains termes de courbure sur $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Dans le cas de l'opérateur de Dirac en dimension $n \geq 3$, on utilise la formule de Schrödinger-Lichnerovicz

$$\mathrm{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{scal}_g. \tag{4.40}$$

4.3. Laplacien de Hodge-de Rham

4.3.1. Obstruction conforme en degré médian

On a vu que le comportement du spectre du laplacien agissant sur les fonctions — c'est-à-dire les formes différentielles de degré 0 — dans une classe conforme est en un sens opposé à celui de l'opérateur de Dirac. On va voir que pour les formes de degré supérieur, on trouve des comportements commun à l'un ou à l'autre de ces deux opérateurs.

On va commencer par s'intéresser à un phénomène qui contraste avec le cas des fonctions : en restriction aux formes de degré $[\frac{n}{2}]$, il apparaît une rigidité semblable à celle de l'opérateur de Dirac. Elle est liée aux inégalités de Sobolev présentées dans la section 2.4, et plus particulièrement au fait que les constantes K_p définies en (2.19) sont des invariants conformes :

Théorème 4.41 ([Ja07b]). *Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$, C une classe conforme de métriques sur M. Pour toute métrique $g \in C$, on a*

$$\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \geq K_{[\frac{n}{2}]}(M,C)^{-2}.$$

Si n est pair, cette inégalité est optimale.

Remarque 4.42. On peut facilement trouver des variétés qui s'effondrent en faisant tendre $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ vers zéro. On ne peut donc pas donner de majoration uniforme de $K_{[\frac{n}{2}]}(M,C)$ en fonction de bornes sur le diamètre et la courbure de la variété pour une métrique $g \in C$.

Remarque 4.43. De manière assez inattendue, le théorème 4.41 s'est révélé avoir des applications à la construction de valeurs propres multiples et à la prescription de spectre avec multiplicité, dans [Ja09a], et surtout dans [Ja11a] où il joue un rôle crucial : on verra en effet au chapitre 6 que la construction de valeurs propres multiples faite dans [Ja11a] s'appuie sur un résultat de convergence du spectre d'une variété vers celui d'un de ses domaines pour les degrés autres que $[\frac{n}{2}]$, cette convergence étant obtenue au moyen de déformations conformes (théorème 6.10) ; le théorème 4.41 permet de contrôler le spectre pour le degré $[\frac{n}{2}]$ dans cette construction et de garantir en particulier qu'il n'apparait pas de petite valeur propre dans ce contexte.

Comme pour les fonctions, on peut définir un spectre conforme pour les formes différentielles par

$$\mu^c_k(M,C) = \inf_{g\in C} \mu_{[\frac{n}{2}],k}(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}. \tag{4.44}$$

Le théorème 4.41 donne la valeur de la première valeur propre conforme en fonction de la constante K_p en dimension paire, et une minoration en dimension impaire. On peut aussi donner une majoration du spectre conforme en fonction de celui de la sphère :

Théorème 4.45 ([Ja07b]). *Pour toute classe conforme C sur la variété compacte M et tout $k \geq 1$, on a*

$$\mu_k^c(M, C) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}}) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, C_{\text{can}}),$$

où C_{can} est la classe conforme de la métrique canonique de la sphère.

Un problème naturel est de déterminer si la borne inférieure $\mu_k^c(M, C)$ est atteinte par une métrique régulière, en particulier si $k = 1$. Dans [Ja07b], on établit le critère suivant :

Théorème 4.46. *Soit g une métrique lisse de volume 1 sur M telle que l'on ait $\mu_{\left[\frac{n}{2}\right],1}(M, g) = \mu_1^c(M, [g])$. Si $n = 3 \bmod 4$, alors il existe une $\left[\frac{n}{2}\right]$-forme propre coexacte non nulle de valeur propre $\mu_1^c(M, [g])$ et de longueur constante. Si n est pair, toutes les formes propres coexactes de degré $\frac{n}{2} - 1$ et de valeur propre $\mu_1^c(M, [g])$ sont de longueur constante.*

Remarque 4.47. Sur les sphères munies de leur métrique canonique, les premières formes propres ne sont pas de longueur constantes (voir l'appendice de [GM75]). Contre toute attente, la métrique canonique de la sphère n'est donc pas extrémale pour la première valeur propre ! Le théorème 4.47 laisse présager que les métriques extrémales pour les formes différentielles sont en général très différentes de celles des fonctions.

En dimension 4, on peut déduire du théorème 4.46 une condition nécessaire sur la topologie pour l'existence de métriques extrémales lisses :

Corollaire 4.48. *Si M est une variété compacte de dimension 4 et de caractéristique d'Euler non nulle, il n'existe pas de métrique régulière g de volume 1 telle que $\mu_{1,1}(M, g) = \mu_1^c(M, [g])$.*

Il est rare dans ce genre de problème d'obtenir de critère topologique aussi simple pour l'existence de métriques extrémales. Dans le cas des fonctions on connaît des conditions nécessaires sur les métriques extrémales (cf. [ESI03]), mais pas d'obstruction topologique comme celle du corollaire 4.48.

4.3.2. Prescription de spectre

Les résultats présentés au paragraphe précédent s'appuient sur l'invariance conforme de certaines constantes de Sobolev en degré médian et ne fournissent qu'une minoration des valeurs propres. On va voir maintenant que ce sont en fait les seules rigidités conformes du spectre du laplacien de Hodge.

Le premier résultat en ce sens (antérieur à ceux du paragraphe précédent) a été obtenu par B. Colbois et A. El Soufi, qui montrent qu'on peut faire tendre les valeurs propres vers l'infini, comme dans le cas de l'opérateur de Dirac :

Théorème 4.49 ([CES06]). *Si M est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et C une classe conforme sur M, alors*

$$\sup_{g \in C} \inf_{1 \leq p \leq \frac{n}{2}} \mu_{p,1}(M,g) \operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = +\infty. \tag{4.50}$$

Remarque 4.51. Ce théorème est énoncé dans [CES06] pour les variétés de dimension $n \geq 4$, mais la démonstration s'applique parfaitement aux 1-formes coexactes en dimension 3.

Les métriques utilisée par B. Colbois et A. El Soufi pour démontrer le théorème 4.49 sont des « métriques Pinocchio », comme dans le cas de l'opérateur de Dirac, mais les outils d'analyse sont différents : on utilise le lemme de McGowan (voir [Mc93], lemme 2.3), qui permet de minorer le spectre de la variété en fonction des spectres d'une famille de domaines qui recouvre M. Le théorème 4.49 n'est bien sûr pas valable pour $p = 0$ comme on l'a déjà vu.

B. Colbois avait demandé dans [Co04] si on pouvait rendre les valeurs propres du laplacien de Hodge arbitrairement petite dans une classe conforme, comme c'est le cas pour le laplacien usuel. On a vu que la réponse est négative pour certains degrés. J'ai aussi montré qu'en revanche, elle est positive dans les autres cas. En se basant sur le fait qu'on peut faire tendre les valeurs propres vers 0 ou vers l'infini, on peut en fait montrer un résultat beaucoup plus précis, à savoir qu'on peut prescrire le début du spectre (sans multiplicité) pour plusieurs degrés simultanément.

Théorème 4.52 ([Ja08b]). *Soit M une variété compacte, connexe, orientable et sans bord de dimension $n = 2k+3$ ou $2k+4$ où $k \in \mathbb{N}^*$, C une classe conforme de métriques riemanniennes sur M, V un réel strictement positif et $N \geq 1$ un entier. On se donne pour tout entier $p \in \{1, \ldots, k\}$ une suite de réels $0 < \nu_{p,1} < \nu_{p,2} < \ldots < \nu_{p,N}$.*

Il existe une métrique $g \in C$ telle que

- *$\mu_{p,i}(M,g) = \nu_{p,i}$ pour tout $i \leq N$ et $p \in \{1, \ldots, k\}$;*
- *$\mu_{k+1,1}(M,g) > \sup_{p,i}\{\nu_{p,i}\}$;*
- *$\operatorname{Vol}(M,g) = V$.*

Remarque 4.53. La minoration $\mu_{k+1,1}(M,g) > \sup_{p,i}\{\nu_{p,i}\}$ assure qu'on a l'égalité $\lambda_{k+1,i}(M,g) = \mu_{k,i}(M,g)$ pour $i \leq N$. On peut donc prescrire les N premières valeurs propres des $(k+1)$-formes, les formes propres correspondantes étant alors exactes, de valeurs propres égales à $(\mu_{k,i}(M,g))_{i=1}^{N}$. Si n est impair, on prescrit ainsi le spectre en tout degré $2 \leq p \leq n-2$. En dimension paire, le degré $p = n/2 = k+2$ fait exception. En degré 1 et $n-1$ on ne prescrit pas arbitrairement le début du spectre car on ne contrôle pas les $\mu_{0,i}(M,g)$, mais on peut assurer que les valeurs $\nu_{1,1}, \ldots, \nu_{1,N}$ sont contenues dans $(\lambda_{1,i}(M,g))_{i \geq 1}$ et $(\lambda_{n-1,i}(M,g))_{i \geq 1}$.

On peut se demander si la prescription du spectre en degré $n/2$ serait possible si on supprimait la contrainte sur le volume de la variété, ou, de manière équivalente, si on peut faire tendre une unique valeur propre vers zéro sans fixer le volume. Ce problème reste à éclaircir.

4.4. Questions

4.4.1. Estimées d'invariants conformes

La plupart des problèmes ouverts dans ce contexte peuvent sont de deux sortes : d'une part estimer la valeur des différents invariants conformes qui sont apparus au cours de cet étude et préciser les liens entre eux (comme ceux découlant de l'inégalité de Hijazi), d'autre part, déterminer la nature des métriques extrémales (en particulier dire s'il existe une métrique extrémale lisse et exhiber des exemples).

On va détailler quelques unes de ces questions. Les premières concernent le volume conforme. Tout d'abord, on peut chercher à améliorer le théorème 4.4 de Koorevar en majorant toutes les valeurs propres à l'aide du volume conforme.

Question 4.54. *Peut-on majorer $\lambda_k^c(M,C)$ en fonction de $V_c(M,C)$ pour tout k ?*

Un autre problème est qu'on connaît peu de valeurs explicites du volume conforme, et qu'en général on ne sait pas comment l'estimer. Une approche possible serait d'expliciter la constante c qui majore le volume de Möbius dans le théorème 4.20, ou de trouver d'autres estimées du volume de Möbius.

Question 4.55. *Peut-on majorer explicitement le volume de Möbius d'une variété en fonction de sa topologie ?*

Concernant les opérateurs conformément covariants, le cas de la dimension critique (c'est-à-dire quand l'ordre de l'opérateur est égal à la dimension, par exemple la dimension 4 pour l'opérateur de Paneitz) reste à éclaircir. En effet, les résultats présentés précédemment ne concernent que le cas sous-critique.

Au sujet des formes différentielles, la principale question est d'expliciter la minoration conforme du théorème 4.41. Rappelons qu'elle repose sur les inégalités de Sobolev présentées dans la section 2.4 et dont la démonstration n'est pas constructive.

Question 4.56. *Peut-on expliciter les constantes de Sobolev du théorème 2.17 en fonction d'autres invariants géométriques, et en particulier les constantes $K_p(M,C)$ en fonction d'autres invariants conformes ?*

4.4.2. Métriques extrémales

Une première question concernant les métriques extrémales, qui va de paire avec la détermination d'invariants conformes, est la recherche d'exemples de métriques réalisant l'extremum d'une valeur propre. Pour la première valeur propre du laplacien usuel, on connaît une condition nécessaire à cette propriété liée au volume conforme et plusieurs variétés riemanniennes qui la réalisent, mais il serait intéressant de trouver d'autres classes de variétés vérifiant cette condition.

Pour les autres opérateurs, la question est presque complètement ouverte. Pour l'opérateur de Dirac, le seul exemple de métrique extrémale semble être la sphère ronde. Dans le cas du laplacien de Hodge, le problème semble encore plus difficile puisque la sphère n'est même pas un exemple.

Un deuxième problème consiste à montrer l'existence d'un métrique extrémale dans chaque classe conforme, en élargissant éventuellement cette classe à des métriques singulières. C'est ce qu'a fait B. Ammann dans [Am09] pour l'opérateur de Dirac en considérant des métriques de la forme $h^2 g$ où g est une métrique de C et h une fonction $C^{2,\alpha}$ qui peut s'annuler. On peut chercher un résultat analogue pour le laplacien de Hodge, et pour les deux opérateurs tenter de restreindre la classe de métriques singulières considérée.

Chapitre 5

Petites valeurs propres des variétés hyperboliques

Les variétés hyperboliques constituent un champ d'études géométriques et topologiques trop vaste pour être résumé ici. L'aspect qui nous intéressera est qu'en dimension 2 et 3, on peut trouver des suites de variétés hyperboliques compactes qui dégénèrent en tendant vers une variété non compacte de volume fini. On peut alors étudier le comportement asymptotique du spectre du laplacien. Comme dans les deux chapitres précédents, on s'intéressera plus particulièrement aux valeurs propres qui tendent vers 0.

Ce chapitre sera partagé en deux sections, correspondant respectivement aux dimensions 2 et 3, qui seront suivi de quelques questions concernant les dimensions 3 et plus.

En dimension 2, le spectre du laplacien sur une surface hyperbolique non compacte possède $[\frac{1}{4}, +\infty[$ comme spectre continu, on s'intéresse donc au comportement des valeurs propres dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$. On présentera d'abord le résultat de convergence spectral obtenu par B. Colbois et G. Courtois pour les surfaces hyperboliques compactes qui dégénèrent vers une surface non compacte. On s'intéressera ensuite à une propriété remarquable des surfaces hyperboliques : le nombre de valeurs propres contenu dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$ est contrôlé par la topologie. L'étude de ce phénomène a été amorcée par P. Buser et récemment J.-P. Otal et E. Rosas ont apporté une réponse complète à cette question dans le cas des surfaces compactes et partielle dans le cas des surfaces non compactes de volume fini. Dans un travail en cours, j'étends certains de ces résultats aux surfaces de volume infini.

En dimension 3, on ne peut pas déformer la métrique d'une variété compacte en maintenant la courbure égale à -1, mais on peut trouver des suites de variétés hyperboliques compactes topologiquement distinctes qui tendent vers une variété non compacte de volume fini. Sur la variété limite, le spectre du laplacien de Hodge de-Rham pour les 1-formes est $[0, +\infty[$, on s'attend donc à ce que les valeurs propres des variétés compactes s'accumulent en 0

quand la suite dégénère. Après avoir rappelé les résultats de J. McGowan et J. Dodziuk qui donnent des estimées du nombre de valeurs propres tendant vers 0, je présenterai mes propres résultats qui consistent à minorer la première valeur propre en fonction du diamètre de la variété.

5.1. Surfaces hyperboliques

5.1.1. Convergence de variétés et convergence de spectre

On va s'intéresser ici au comportement du spectre d'une surface hyperbolique compacte qui dégénère. Plus précisément, on considère une famille S_ε de surfaces hyperboliques compactes, de genre g fixé qui tend vers une surface S_0. Chaque surface se décompose en une union de pantalons hyperboliques $S_\varepsilon = P_1^\varepsilon \cup \ldots \cup P_{2g-2}^\varepsilon$, $S_0 = P_1 \cup \ldots \cup P_{2g-2}$ et on suppose qu'au moins une des géodésiques qui bordent les pantalons voit sa longueur tendre vers 0 quand ε tend vers 0. La surface S est donc une surface non compacte d'aire finie, pas nécessairement connexe, et possédant au moins deux cusps. On sait donc que spectre essentiel du laplacien sur S n'est pas vide et qu'il est constitué de la demi-droite $[\frac{1}{4}, +\infty[$. En outre, la multiplicité de la valeur propre nulle de S_0 est égale au nombre de composantes connexes de S_0.

Dans ce contexte, B. Colbois et G. Courtois se sont intéressés dans [CC89] au comportement du spectre dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$ quand la surface dégénère. Ils montrent en particulier que le spectre de S_ε tend vers celui de S_0. Par commodité, on notera ici $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ les valeurs propres du laplacien en comptant la ou les valeurs propres nulles.

Théorème 5.1 ([CC89]). *Si ε est suffisamment petit, alors S_ε a au moins autant de valeurs propres que S_0 dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$, et en notant N le nombre de valeurs propre de S_0 dans $[0, \frac{1}{4}[$, on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(S_\varepsilon) = \lambda_k(S_0) \quad \textit{pour} \quad k \leq N$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_k(S_\varepsilon) = \frac{1}{4} \quad \textit{pour} \quad k > N.$$

En particulier, si S n'est pas connexe, certaines valeurs propres de S_ε vont tendre vers 0. On sait alors estimer ces valeurs propres en fonction de la longueur des géodésiques qui dégénèrent (voir par exemple [CCdV88]).

Le théorème 5.1 possède une généralisation au variétés hyperboliques de dimension 3 qu'on verra à la section suivante.

5.1.2. Petites valeurs propres et topologie

On sait qu'en dimension 2, la topologie a une certaine influence sur le comportement du spectre du laplacien. On verra au chapitre 6 qu'elle impose des bornes sur la multiplicité des valeurs propres (ce phénomène n'existe

pas en dimension plus grande). On va s'intéresser ici à une autre rigidité topologique du spectre des surfaces, à savoir que le nombre de petites valeurs propres est contrôlé par le genre.

Dans [Bu77], P. Buser a montré que toute surface compacte de genre g admet une métrique hyperbolique telle que les $2g-3$ premières valeurs propres non nulles soient arbitrairement petites (le principe de la démonstration consiste à décomposer la surface en pantalons et à faire dégénérer les géodésiques qui les bordent). Il montre aussi que la $(4g-2)$-ième valeur propre non nulle est strictement plus grande que $1/4$ pour toute métrique hyperbolique.

Récemment, J.-P. Otal et E. Rosas ont amélioré le résultat de P. Buser en donnant la minoration optimale qui suit. Elle reprend une méthode suivie par J.-P. Otal pour majorer la multiplicité des petites valeurs propres ([Ot08]), qui elles même s'appuyait sur une nouvelle technique développée par B. Sévennec [Sé02] pour majorer la multiplicité de la 2^{e} valeur propre des opérateur de Schrödinger. La technique est principalement topologique, et s'appuie sur la décomposition de la surface définie par les domaines nodaux d'une combinaison linéaire de fonction propres.

Théorème 5.2 ([OR09]). *Soit S une surface hyperbolique compacte de genre g. Alors $\lambda_{2g-2}(S) > \frac{1}{4}$.*

Autrement dit : le nombre de valeurs propres inférieures à $\frac{1}{4}$ (en comptant la valeur propre nulle) est au plus égal au nombre de pantalons composant la surface. Dans [OR09], Otal et Rosas montrent en fait ce théorème pour n'importe quelle métrique analytique de courbure négative, la conclusion étant que $\lambda_{2g-2}(S)$ est strictement supérieur au bas du spectre du revêtement universel de S.

Ils obtiennent un résultat analogue pour les surfaces hyperboliques de volume fini. On dit qu'un telle surface des de type (g,n) si elle est difféomorphe à une surface compacte de genre g privée de n points distincts :

Théorème 5.3 ([OR09]). *Soit S une surface hyperbolique d'aire finie et de type (g,n). Alors il existe au plus $2g-2+n$ valeurs propres dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$.*

Ici encore, le nombre de petites valeurs propres est majoré par le nombre de pantalons, qui est de $2g-2+n$ pour une surface de type (g,n).

Le cas des surfaces non compactes est plus délicat car on ne sait pas si les lignes nodales des combinaisons linéaires de fonctions propres forment un graphe fini, il pourrait donc y avoir une infinité de domaines nodaux. Le cas des surfaces hyperboliques de volume infini est n'est pas abordé dans [Ot08] et [OR09], et surtout une question est laissée ouverte au sujet du spectre parabolique (ce spectre est constitué des valeurs propres dont les fonctions

propres tendent vers 0 dans tous les cusps) : le nombre de valeur propre paraboliques dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$ est-il majoré par $2g-2$?

Dans un travail en cours, je cherche à élucider certaines questions laissées sans réponses à ce sujet, et j'obtiens en particulier :

Théorème 5.4. *Si S une surface de type (g,n) muni d'une métrique hyperbolique, alors il existe au plus $2g-2+n$ valeurs propres dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$, dont au plus $2g-2$ valeurs propres paraboliques.*

Le principe de la démonstration est de se ramener à la situation d'une surface compacte à bord à l'aide d'une fonction de coupure.

5.2. Spectre des variétés hyperboliques de dimension 3

5.2.1. Topologie et géométrie des 3-variétés hyperboliques

Le phénomène de dégénérescence de variétés hyperboliques compactes existe aussi en dimension 3, mais sous une forme différente qu'en dimension 2. En effet, selon le théorème de rigidité de Mostow, la topologie d'une variété hyperbolique de volume fini et de dimension supérieure ou égale à 3 détermine entièrement sa métrique, on ne peut donc pas déformer la métrique en conservant une courbure constante. En dimension 3, on peut en revanche trouver des suites de variétés hyperboliques compactes topologiquement distinctes qui tendent vers une variété non compacte de volume fini.

Dans ce paragraphe, on va détailler cet aspect de la géométrie hyperbolique en précisant au passage quelques résultats utiles à l'étude du spectre sur ces variétés. On se référera principalement à [Gr81] et [BP92].

Pour toute variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini et tout réel $a>0$, on notera $M_a = \{x \in M, \mathrm{inj}(x) > a\}$ l'ensemble des points de M dont le rayon d'injectivité est plus grand que a.

Selon le lemme de Margulis, il existe une constante $c_{\mathcal{M}} > 0$ telle que la topologie et la géométrie de la partie mince de M, c'est-à-dire le complémentaire M_m de $M_{c_{\mathcal{M}}}$, soient simples. Plus précisément, en dimension 3, la partie mince M_m possède un nombre fini de composantes connexes, chacune étant soit un cusp (isométrique à $T^2 \times [0, +\infty[$ muni d'une métrique $g = e^{-2x} g_T \oplus \mathrm{d}x^2$, où g_T est une métrique plate sur le tore T^2), soit un voisinage tubulaire $\mathcal{T}$ d'une géodésique fermée de longueur l. Ce tube $\mathcal{T}$ est difféomorphe à $B^2 \times S^1$ et isométrique au produit $B^2(R) \times [0,l]$ muni de la métrique

$$g = \cosh^2 r \ \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\theta^2 \tag{5.5}$$

où t désigne la coordonnée le long de la géodésique, r la coordonnée radiale sur la boule B^2 et θ la coordonnée angulaire, les bord $B \times \{0\}$ et $B \times \{l\}$ étant identifiés par une isométrie de B^2.

Si on se donne une borne V sur le volume, il existe qu'un nombre fini de types de difféomorphisme possibles pour la partie épaisse de la variété ([BP92], théorème E.4.8). De plus, si on considère une suite infinie de variétés compactes distinctes et de volume majoré, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une variété avec un ou plusieurs cusps. Notons que, de fait, ce phénomène n'existe qu'en dimension 3 : en dimension supérieure ou égale à 4, il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de volume inférieur à une constante donnée.

On peut déduire en particulier de ce qui précède que l'ensemble des métriques induites sur une partie épaisse (ou plus généralement sur M_a) de topologie fixée est borné :

Fait 5.6. *Soit $a > 0$ et $V > 0$. Il existe une constante $\tau(V) > 0$ telle que si (M, g) et (M', g') sont deux variétés hyperboliques de dimension 3 de volume inférieur à V et telles que M_a et M'_a soient difféomorphes, alors $\frac{1}{\tau} g' \leq g \leq \tau g'$ en restriction à M_a et M'_a.*

Si on considère une suite de variétés hyperboliques dont la partie épaisse est de topologie donnée et dont le diamètre tend vers l'infini, la topologie des éléments de la suite dépend de la manière dont les tubes $\mathcal{T} \simeq B^2 \times S^1$ sont recollés sur la bord de la partie épaisse. Pour chaque composante de la partie mince, les recollements possibles (topologiquement) sont paramétrés par une élément de

$$\mathcal{P} = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2,\ p \text{ et } q \text{ premiers entre eux}\} \cup \infty \tag{5.7}$$

(voir [BP92], section E.4). Comme le fait 5.6 s'applique au bord de la partie épaisse, la géométrie, donc l'aire, du bord du tube reste contrôlée, et converge quand le rayon R du tube tend vers $+\infty$. Ceci implique que le produit de la circonférence du tube avec la longueur tend vers une constante. Compte tenu de l'expression de la métrique sur le tube donnée en (5.5), on a donc

$$l e^{2R} \to c^{te} \tag{5.8}$$

quand $R \to +\infty$.

Enfin, W. Thurston a montré ([Th97], théorème E.5.1 de [BP92]) qu'une variété de volume fini possédant k cusps est la limite d'une suite de variétés compactes ayant la même partie épaisse (on parle alors de remplissage compact de la variété non compacte). Plus précisément, comme le bord d'un cusp est un tore T^2, on peut remplir topologiquement ce cusp par un tube $\simeq B^2 \times S^1$, chaque remplissage étant paramétré par un élément $(p_k, q_k) \in \mathcal{P}$. Thurston montre alors qu'il existe $K > 0$ tel que si $p_k, q_k > K$ pour tout k, alors la variété compacte obtenue peut être munie d'une métrique hyperbolique. En particulier, si la variété initiale n'a qu'un seul cusps, alors presque tout remplissage est hyperbolique.

5.2.2. Petites valeurs propres

On va maintenant s'intéresser au comportement du spectre du laplacien de Hodge-de Rham, et en particulier des premières valeurs propres, quand une suite de 3-variétés hyperboliques dégénère à volume majoré. Comme il n'existe qu'un nombre fini de telles variétés non compactes de volume inférieur à une constante donnée, on peut se ramener à l'étude d'une suite de variétés compactes tendant vers une variété non compacte donnée.

Rappelons qu'en restriction aux p-formes, une variété hyperbolique non compacte de dimension n possède un spectre continu formé de la demi-droite $[\frac{(n-2p-1)^2}{4}, +\infty[$, $p < \frac{n}{2}$. Si $n = 3$, le spectre continu est donc $[1, +\infty[$ pour les fonctions et $[0, +\infty[$ pour les 1-formes.

Pour les fonctions, l'intervalle $[0, 1[$ joue le même rôle que l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$ dans le cas des surfaces. B. Colbois et G. Courtois ont montré dans ce contexte un résultat analogue au théorème 5.1 : si une suite de 3-variétés hyperboliques converge, le spectre converge vers le spectre de la variété limite en restriction à l'intervalle $[0, 1[$. Par ailleurs, R. Schoen donne dans [Sc82] en toute dimension supérieure ou égale à 3 une minoration uniforme du spectre du laplacien agissant sur les fonctions à volume majoré (voir aussi [DR86], [Do87] et [BCD93]).

Dans le cas des 1-formes, la valeur 0 est dans le spectre continu de la variété limite, on peut donc s'attendre à ce que des valeurs propres s'accumulent en 0 quand une suite de variétés compactes tend vers une variété non compacte. On sait que c'est effectivement le cas (cf. [CC90], théorème 0.3). J. McGowan a étudié plus en détail ces petites valeurs propres et a montré qu'on pouvait contrôler leur nombre en fonction du diamètre de la variété :

Théorème 5.9 ([Mc93]). *Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ et $V > 0$ telles que si (M, g) est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de diamètre d et de volume inférieur à V, alors*

1. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{C_1 V(1+d^2)}\right\} \leq C_2 V$;
2. $\#\left\{\mu_i(M,g) \leq \dfrac{1}{d^2}\right\} \geq C_3 V$.

Ce résultat a été précisé dans [DM95], où J. Dodziuk et J. MacGowan donnent une estimée du nombre de valeurs propres dans un petit intervalle $[0, x^2]$ donné pour une suite de variétés qui dégénère :

Théorème 5.10 ([DM95]). *Soit M_∞ une 3-variété hyperbolique de volume fini, M_k une suite de 3-variétés hyperboliques tendant vers M_∞ et $x > 0$ un réel. On note q le nombre de cups de M_∞, (R_k^j), $0 \leq j \leq q$, les rayons des q parties minces correspondantes de M_k et $N_k(x)$ le nombre de valeurs propres du laplacien agissant sur les 1-formes coexactes de M_k contenues*

dans l'intervalle $[0, x^2]$. *On a alors*

$$N_k(x) = 2\frac{x}{\pi}\sum_{j=1}^{q} R_k^j + O_x(1)$$

quand k *tend vers l'infini.*

Les résultats de J. Dodziuk et J. MacGowan laissent ouvert le problème de minorer explicitement la première valeur propre en fonction du diamètre. Dans [Ja10b], j'ai apporté une réponse à cette question :

Théorème 5.11 ([Ja10b]). *Pour tout réel* $V > 0$, *il existe une constante* $c(V) > 0$ *telle que si* M *est une variété hyperbolique compacte de dimension 3 de volume inférieur à* V, *de diamètre* d *et possédant* k *parties minces, alors* $\mu_1(M) \geq \frac{c}{d^3 e^{2kd}}$ *et* $\mu_{k+1}(M) \geq \frac{c}{d^2}$.

La démonstration de ce théorème repose sur la technique, introduite par McGowan, consistant à utiliser un recouvrement de la variété par des ouverts dont on sait contrôler le spectre. Ici, on recouvre la variété par deux ouverts, l'un étant la partie mince, l'autre contenant la partie épaisse (plus précisément, un domaine du type M_a défini au paragraphe précédent). On contrôle le spectre de la partie mince en utilisant les symétries de la métrique définie en (5.5) et celui de la partie épaisse en se basant sur le fait que sa métrique varie peu (fait 5.6). Une amélioration notable par rapport aux travaux de McGowan consiste à étudier l'interaction entre les cohomologies des deux ouverts pour minorer la première valeur propre.

Les estimées de J. Dodziuk et J. McGowan pouvaient laisser espérer une minoration de la première valeur propre qui soit quadratique par rapport au diamètre. Le second résultat de [Ja10b] consiste à montrer que pour certaines variétés, on a effectivement une telle minoration :

Théorème 5.12 ([Ja10b]). *Pour toute variété hyperbolique* M_∞ *non compacte de dimension 3 et de volume fini, il existe une constante* $c > 0$ *et une suite* (M_i) *de remplissages compacts de* M_∞, *de diamètre* $d_i \to +\infty$ *et telle que* $\mu_1(M_i) \geq \frac{c}{d_i^2}$.

Si on essaie de généraliser la démonstration de cette minoration à toutes les variétés hyperboliques, une difficulté liée à l'interaction entre les cohomologies des parties mince et épaisse de la variété apparaît. Cet aspect topologique du problème n'avait pas été mis en évidence par les travaux de McGowan et Dodziuk.

Ces résultats laissent la possibilité qu'il existe pour chaque partie mince une petite valeur propre à décroissance exponentielle par rapport au diamètre, mais cette valeur propre n'apparaîtrait que pour des topologies particulières. Comme en dimension 2, l'existence d'une partie mince n'implique pas forcément l'existence d'une valeur propre exponentiellement petite par rapport au diamètre.

5.3. Questions

Les principales questions autour de ce sujet, en dimension 3 ou plus grande, concernent l'existence de petites valeurs propres.

En dimension 3, il s'agit de savoir si la minoration du théorème 5.11 est optimale ou non :

Question 5.13. *Existe-t-il des suites de 3-variétés hyperboliques de volume majoré produisant des valeurs propres exponentiellement petites par rapport au diamètre ?*

En dimension supérieure ou égale à 4, le problème se pose différemment car il n'y a qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de volume inférieur à une constante donnée. On ne peut donc pas faire tendre de valeur propre vers 0 à volume majoré, mais on peut chercher à minorer le spectre :

Question 5.14. *Peut-on minorer explicitement les valeurs propres d'une variété hyperbolique compacte en fonction de son volume ?*

Pour finir, un autre problème se posant en grande dimension est de trouver des exemples de petites valeurs propres. Plus précisément :

Question 5.15. *Pour les formes différentielles de degré p donné, peut-on trouver des exemples de variétés hyperboliques de dimension n (compactes ou non) ayant une valeur propre non nulle inférieure au bas du spectre de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$?*

Ce problème est motivé par les liens que peuvent entretenir les valeurs propres plus petites que le bas du spectre hyperbolique et l'asymptotique du spectre des longueurs de la variété (voir par exemple [GN06] et les références qui y sont données pour le cas des fonctions, et [Pa10] pour les formes différentielles).

Chapitre 6

Multiplicité de valeurs propres

On peut trouver une motivation à l'étude de la multiplicité des valeurs propres du laplacien dans des problèmes de physique : en effet, ce sujet est lié aux phénomènes de type effet tunnel. Mais les travaux présentés ici tirent surtout leur origine d'un résultat remarquable de S. Y. Cheng montrant que la multiplicité des valeurs propres du laplacien (et plus généralement d'un opérateur de Schrödinger) agissant sur les fonctions d'une surface compacte ne peut pas être arbitrairement grande et qu'on peut la majorer en fonction du genre de la surface.

Le théorème de Cheng a stimulé un certains nombre de travaux, principalement durant les années 80, concernant la multiplicité des valeurs propres du laplacien sur les surfaces ou en dimension plus grande, et le problème a été étendu aux opérateur de Schrödinger avec champ magnétique. La section qui suit sera consacrée au rappels de ces résultats. J'y aborderai aussi le phénomène de transversalité dû à Arnol'd, popularisé par Colin de Verdière et qui joue un rôle crucial dans la construction de grandes multiplicités.

Ce problème de multiplicité était resté ouvert concernant les opérateurs sur les fibrés vectoriels naturels (formes différentielles, spineurs). Dans la deuxième section, je présenterai ma contribution à ce sujet : j'ai en grande partie résolu le problème pour le laplacien de Hodge-de Rham en étendant les résultats de prescription de multiplicité que Colin de Verdière avait obtenu pour le laplacien usuel. J'ai aussi abordé cette question pour le laplacien de Witten, qu'on peut interpréter comme un analogue de l'opérateur de Schrödinger pour les formes différentielles.

J'exposerai enfin quelques questions qui restent sans réponse à l'heure actuelle. On évoquera à cette occasion le cas de l'opérateur de Dirac, pour lequel le sujet est presque entièrement vierge.

Le problème de la multiplicité des valeurs propres du laplacien a aussi été étudiée sur des graphes. Nous n'aborderons pas ici ce sujet, sur lequel on peut consulter le chapitre 5 de [CdV98].

Comme certains des chapitres précédents, celui-ci reprend, en l'étoffant

parfois, une partie d'un texte que j'ai consacré au sujet dans les actes du Séminaire de théorie spectrale et géométrie [Ja09b]. S'y ajoute aussi la présentation de résultats plus récents.

6.1. Opérateurs sur les fonctions

6.1.1. Surfaces

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte. Rappelons qu'on note $\lambda_k(M, g)$ la k-ième valeur propre non nulle du laplacien.

Le premier résultat concernant la multiplicité des valeurs propres du laplacien sur une surface est dû à S. Y. Cheng :

Théorème 6.1 ([Ch76]). *Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, il existe une constante $c(\gamma, k)$ telle que si M est une surface compacte de genre γ, alors la multiplicité de $\lambda_k(M, g)$ est majorée par c.*

Cette majoration est aussi valable pour les opérateurs de Schrödinger et a été améliorée (voir [Be80], [Na88], [HOHON99]), le meilleur résultat connu pour la deuxième valeur propre des opérateurs de Schrödinger sur les surfaces de caractéristique d'Euler négative ayant été obtenu par B. Sévennec ([Sé94], [Sé02]). Le tableau ci dessous résume ces résultats, en notant $m_k(\Sigma)$ la multiplicité maximale de la k-ième valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur la surface Σ (c'est-à-dire la $(k-1)$-ième valeur propre non nulle dans le cas du laplacien) :

	m_2	m_i, $i \geq 3$
S^2	3 [Ch76]	$\leq 2i - 3$ [HOHON99]
$\mathbb{R}P^2$	5 [Be80]	$\leq 2i + 1$ [Na88]
T^2	6 [Be80]	$\leq 2i + 2$ [Na88]
K^2	5 [CdV87]	$\leq 2i + 1$ [Na88]
$\chi < 0$	$\leq 5 - \chi$ [Sé02]	$\leq 2i - 2\chi + 1$ [Na88]

TABLE 6.1 – Majoration de la multiplicité sur les surfaces

Pour les surfaces de petit genre, on connaît la valeur exacte de m_2 car Y. Colin de Verdière en a donné une minoration en fonction du nombre chromatique $\mathsf{chr}(\Sigma)$ de la surface, c'est-à-dire le nombre de sommet du plus grand graphe complet plongeable dans Σ :

Théorème 6.2 ([CdV87]). *Sur toute surface compacte Σ, on a l'inégalité $m_2(\Sigma) \geq \mathsf{chr}(\Sigma) - 1$.*

Il conjecture en outre qu'on a en fait $m_2(\Sigma) = \mathsf{chr}(\Sigma) - 1$ sur toute surface compacte. Le tableau 6.2 compare la majoration de m_2 donnée dans le tableau 6.1 et la minoration du théorème 6.2 pour les surfaces de caractéristique d'Euler comprise entre -1 et -8.

$\chi(M)$	-1	-2	-3	-3	-5	-6	-7	-8
$5 - \chi(M)$	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathsf{chr}(M) - 1$	6	7	8	8	9	9	9	10

TABLE 6.2 – Estimées de m_2

Selon les résultats des tableaux 6.1 et 6.2, cette conjecture est vraie pour $\chi(\Sigma) \leq -3$. Il faut noter que $\mathsf{chr}(\Sigma)$ croît comme la racine carrée du genre de Σ alors que la majoration donnée dans le tableau 6.1 est seulement linéaire. Démontrer la conjecture de Colin de Verdière nécessiterait donc un saut qualitatif important dans l'amélioration de cette majoration.

Ce problème a aussi été étudié en dimension 2 pour des opérateurs avec champ magnétique ([CdVT93], [BCC98], [Er02]). Dans ce cas, la multiplicité des valeurs propres peut être arbitrairement grande.

6.1.2. Variétés de grande dimension

Il est naturel de se demander si ces liens entre topologie et multiplicité en dimension 2 admettent une généralisation. Sur les variétés de dimension plus grande, Y. Colin de Verdière a montré qu'il n'en est rien et que toute rigidité disparaît : on peut prescrire arbitrairement toute partie finie du spectre.

Théorème 6.3 ([CdV86],[CdV87]). *Si $n \geq 3$, pour toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$, il existe une métrique g sur M telle que $\lambda_k(M, g) = a_k$ pour $k \leq N$.*

En particulier, on peut prescrire la multiplicité des valeurs propres du laplacien. Autrement dit, à partir de la dimension 3, ni la multiplicité des valeurs propres, ni le début du spectre ne contiennent d'information sur la topologie de la variété. Ce résultat a été amélioré par J. Lohkamp qui montre dans [Lo96] qu'on peut prescrire simultanément le volume, le début du spectre et certains invariants de courbure.

6.1.3. L'hypothèse de transversalité d'Arnol'd

Pour construire des valeurs propres multiples du laplacien, Y. Colin de Verdière fait appel à un principe de transversalité dû à V. Arnol'd et que nous allons rappeler ici.

Cette propriété de transversalité et son utilisation sont illustrés sur la figure 6.1 : on suppose qu'on connaît une famille de métriques modèles (g_a) pour laquelle on contrôle le spectre, en particulier on sait que pour une métrique g_0, une valeur propre λ_0 a la multiplicité souhaitée. En outre, on s'assure que l'ensemble des métriques pour lesquelles on a la même multiplicité coupe transversalement l'espace de métriques modèles en g_0 (on verra plus loin comment vérifier cette propriété).

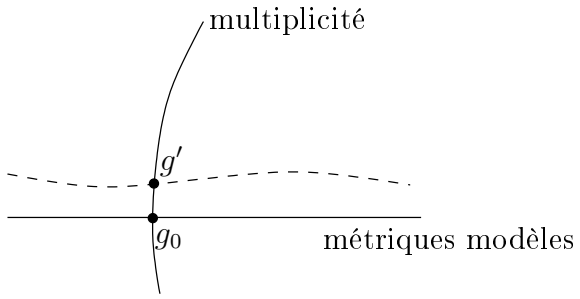

FIGURE 6.1 – Propriété de transversalité d'une valeur propre multiple

Si on perturbe la famille modèle de métriques (ligne pointillée sur la figure 6.1), l'hypothèse de transversalité garantit que la famille perturbée contient une métrique g' pour laquelle on a la même multiplicité que pour g_0.

La famille (g_a) est généralement une famille de métriques sur un espace singulier (un graphe dans [CdV86], un domaine de la variété dans [CdV86], [CdV87]). On cherche alors à montrer que pour tout a, il existe une famille $(g_{\varepsilon,a})$ de métriques sur M qui fait tendre le spectre de M vers celui de l'espace singulier de manière uniforme par rapport au paramètre a. La famille perturbée de la figure 6.1 est alors la famille $(g_{\varepsilon,a})$ pour un ϵ fixé et suffisamment petit.

Il s'avère que la propriété de transversalité peut se vérifier de manière intrinsèque à la famille (g_a). Dans [CdV88], Y. Colin de Verdière énonce deux critères qui impliquent cette propriété et que nous allons rappeler. On suppose que le paramètre a prend ses valeurs dans une boule B^k de $\mathbb{R}^k$ centrée en 0 et que pour la métrique g_0, la valeur propre λ_0 a un espace propre E_0 de dimension N. Pour les petites valeurs de a, le laplacien associé à g_a possède des valeurs propres proches de λ_0 dont la somme des espaces propres est de dimension N. On identifie alors cette somme à E_0 et on note q_a la forme quadratique associée à g_a transportée sur E_0.

Définition 6.4. *On dit que λ_0 vérifie l'hypothèse de transversalité forte (resp. faible) si l'application $\Psi : a \mapsto q_a$ de B^k dans $\mathcal{Q}(E_0)$ est une submersion en 0 (respectivement essentielle en 0).*

Rappelons que Ψ est essentielle en 0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\Phi : B^k \to \mathcal{Q}(E_0)$ vérifie $\|\Psi - \Phi\|_\infty < \varepsilon$, alors il existe $a_0 \in B^k$ tel que $\Phi(a_0) = q_0$. On peut vérifier que l'hypothèse forte implique l'hypothèse faible.

Supposons que la famille de métriques (g_a) vérifie l'hypothèse faible de transversalité. Si $(g_{\varepsilon,a})$ est une perturbation suffisamment petite de la famille (g_a) et qu'on note $\Phi(a)$ la forme quadratique sur E_0 associée à $g_{\varepsilon,a}$, alors on aura $\|\Psi - \Phi\|_\infty < \varepsilon$. Il existe donc un paramètre a_0 tel que $\Phi(a_0) = q_0$, et la métrique g' de la figure 6.1 est alors g_{ε,a_0}.

Il y a relativement peu d'exemples pour lesquels on sait montrer la stabilité de la multiplicité de manière directe. Il s'agit principalement des graphes complets ([CdV86]), de toutes les valeurs propres de la sphère ronde S^2 et de certaines valeurs propres de T^2 ([CdV88]), de surfaces obtenues par adjonction d'anse ([An90]), et des valeurs propres doubles obtenues dans [Ja09b] par une technique qu'on décrira au paragraphe 6.2.3. Heureusement, comme on le voit sur la figure 6.1, la valeur propre multiple obtenue par perturbation hérite de la même propriété de transversalité (on peut le vérifier à partir de la définition de l'hypothèse faible de transversalité donnée en 6.4). Cette transitivité de la stabilité assure par exemple que la multiplicité obtenue sur certaines surfaces de courbure constante dans [CCdV88] est bien stable (cette propriété est exploitée dans [CdV87]). Une autre propriété, utilisée dans [CdV87] et [Ja11a], est que la stabilité peut être préservée par produit riemannien.

6.2. Opérateurs sur les formes différentielles

6.2.1. Laplacien de Hodge-de Rham

Ces résultats sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien agissant sur les fonctions soulèvent la question de leur généralisation au laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles. En effet, cet opérateur interagit généralement plus avec la topologie que la laplacien usuel. En particulier, la multiplicité de la valeur propre nulle est un invariant topologique, ce qui peut laisser espérer que la topologie intervienne dans la multiplicité des autres valeurs propres.

On considère dans la suite une variété compacte qu'on supposera orientable et sans bord. Rappelons que dans ce contexte, l'ensemble du spectre du laplacien de Hodge se déduit du spectre $(\mu_{p,i}(M,g))$ de sa restriction aux formes coexactes de degré $p \leq \frac{n-1}{2}$. C'est à la multiplicité des $\mu_{p,i}(M,g)$ qu'on va s'intéresser.

Commençons par mentionner deux faits élémentaires concernant la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham. Le premier est l'existence de valeurs propres multiples en dimension $n = 1(\mathrm{mod}4)$ pour des raisons purement algébriques :

Proposition 6.5. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n = 1(\mathrm{mod}4)$, alors la multiplicité des $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M,g)$ est toujours paire.*

Démonstration : Si on note $* : \Omega^p(M,g) \to \Omega^{n-p}(M,g)$ la dualité de Hodge, l'opérateur $*\mathrm{d}$ restreint aux $[\frac{n}{2}]$-formes coexactes est un endomorphisme qui commute avec le laplacien. En outre, si $n = 1(\mathrm{mod}4)$, il est antisymétrique (on a dans ce cas $\Delta = -(*\mathrm{d})^2$ pour les $[\frac{n}{2}]$-formes coexactes). En restriction à un espace propre, il est donc antisymétrique et non dégénéré, ce qui implique que cet espace est de dimension paire. Par conséquent, $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M,g)$ est de multiplicité paire pour tout i. ∎

Le second fait est qu'en effectuant le produit riemannien de deux variétés dont l'une est munie d'une métrique pour laquelle le laplacien agissant sur les fonctions a une première valeur propre de grande multiplicité, on peut construire des exemples de variétés admettant des valeurs propres de grandes multiplicités pour les formes d'un degré p donné. Par exemple, le résultat qui suit est démontré dans [Ja09b] :

Proposition 6.6 ([Ja09b]). *Pour tout entier $n \geq 4$, et tout $1 \leq p < n/2$, il existe une variété compacte M de dimension n telle que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une métrique g sur M telle que $\mu_{p,1}(M,g)$ soit de multiplicité k.*

Ce résultat montre qu'on ne peut pas avoir en général de majoration de la multiplicité en fonction de la topologie comme dans le théorème 6.1 de Cheng. Mais les exemples de la proposition 6.6 ont une topologie particulière (variétés produits) et on ne contrôle la multiplicité de la première valeur propre que pour certains degrés qu'on ne peut pas choisir indépendamment de la topologie.

Il s'avère que ces exemples de grandes multiplicités ne sont pas des exceptions. J'ai en effet généralisé le théorème 6.3 de Colin de Verdière en montrant que sur toutes les variétés de dimension $n \geq 6$, on peut prescrire le début du spectre du laplacien de Hodge pour presque tous les degrés simultanément :

Théorème 6.7 ([Ja11a]). *Soit M^n une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 6$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si on se donne un réel $V > 0$, une suite $0 < a_{1,1} < a_{1,2} \leq a_{1,3} \leq \ldots \leq a_{1,N}$ et des suites $0 < a_{p,1} \leq a_{p,2} \leq \ldots \leq a_{p,N}$ pour $2 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$, alors il existe une métrique g sur M telle que*

- *$\mu_{p,k}(M,g) = a_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$;*
- *$\mu_{[\frac{n-1}{2}],1}(M,g) > \sup_{i,N} a_{p,i}$;*
- *$\mathrm{Vol}(M,g) = V$.*

Si la dimension est suffisamment grande, on obtient donc le même résultat que pour les fonctions, en exceptant la valeur propre $\mu_{1,1}$ ainsi que le degré

$p = [\frac{n-1}{2}]$ pour lesquels le problème reste ouvert. On peut souligner que la difficulté en degré $[\frac{n-1}{2}]$ est liée la rigidité conforme du spectre du laplacien de Hodge pour ce degré qu'on a vu au chapitre 4.

Dans le cas de la valeur propre $\mu_{1,1}$, j'obtiens aussi le résultat partiel suivant :

Théorème 6.8 ([Ja11a]). *Si M^n est une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 5$, alors il existe sur M une métrique g telle que la multiplicité de $\mu_{1,1}(M, g)$ soit égale à 3.*

La méthode utilisée ne permet cependant pas de prescrire les autres valeurs propres.

La démonstration des théorèmes 6.7 et 6.8 suit la stratégie élaborée par Y. Colin de Verdière rappelée au paragraphe 6.1.3 et qui combine deux ingrédients : un théorème de convergence spectrale et la construction d'espaces modèles ayant la multiplicité souhaitée et vérifiant l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd.

Le théorème spectral utilisé pour le théorème 6.8 consiste à déformer la métrique de la variété M pour faire tendre le spectre vers celui d'un domaine $U \subset M$ et a été démontré par Colin de Verdière [CdV86] dans le cas des fonctions. Une des difficultés de son extension aux formes différentielles tient à l'interaction entre les cohomologies du domaine et de la variété, qui peut provoquer l'apparition de petites valeurs propres indépendantes du spectre de U. Pour contrôler cette interaction, on introduit un nouvel espace de cohomologie construit comme le quotient des formes fermées de $\bar{U}$ par la restriction des formes fermées de M :

$$H^p(U/M) = \{\omega \in \Omega^p(\overline{U}),\ \mathrm{d}\omega = 0\}/\{\omega_{|\overline{U}},\ \omega \in \Omega^p(M) \text{ et } \mathrm{d}\omega = 0\} \quad (6.9)$$

Comme une forme exacte de $\overline{U}$ est toujours la restriction d'une forme exacte de M, $H^p(U/M)$ est isomorphe au quotient de $H^p(U)$ par l'image de l'application naturelle $H^p(M) \to H^p(U)$ définie par restriction des formes fermées et exactes. En particulier, $H^p(U/M)$ est de dimension finie, et on pose $d_p = \dim H^p(U/M)$. Le résultat de convergence spectral peut alors s'exprimer comme suit :

Théorème 6.10 ([Ja11a]). *Soit (M^n, g) une variété riemanienne compacte sans bord de dimension n et U un domaine de M à bord C^1. Il existe une suite de métriques (g_i) sur M conformes à g telle que*

- $\mathrm{Vol}(M, g_i) \to \mathrm{Vol}(U, g)$ *quand* $i \to \infty$;
- $\mu_{p,k}(M, g_i) \to 0$ *pour* $p \leq \frac{[n-3]}{2}$ *et* $k \leq d_p$ *quand* $i \to \infty$;
- $\mu_{p,k+d_p}(M, g_i) \to \mu_{p,k}(U, g)$ *pour* $p \leq \frac{[n-3]}{2}$ *et* $k \geq 1$ *quand* $i \to \infty$ *avec convergence des espaces propres.*

On sait que l'énoncé du théorème 6.10 est faux pour $p = [\frac{n-1}{2}]$, car pour ce degré, le spectre du laplacien est uniformément minoré dans une classe conforme (cf. théorème 4.41 au chapitre 4). On peut donc construire des contre-exemples en choisissant M et U tels que $H^{[\frac{n-1}{2}]}(M/U)$ soit non trivial (il suffit de prendre comme U un voisinage tubulaire d'une sphère de dimension $[\frac{n-1}{2}]$ qui est contractile dans M). Un autre type de contre-exemple est obtenu en choisissant un domaine U de volume fixé dont la première valeur propre est plus petite que la minoration donnée par le théorème 4.41 quand $\mathrm{Vol}(M) \to \mathrm{Vol}(U)$. C'est possible d'après [Gu04] : P. Guérini montre qu'on peut construire des domaines euclidiens de volume contrôlé et possédant une valeur propre arbitrairement petite, il suffit de plonger un tel domaine dans la variété M.

La construction des modèles de multiplicités stables se fait en partant des modèles connus pour le laplacien sur les fonctions et en utilisant le fait que la stabilité est préservée par produit riemmannien. On en procédant par récurrence, on obtient des modèles en toute dimension $n \geq 5$ pour les degrés $p \leq \frac{[n-3]}{2}$. La principale difficulté de la construction consiste à éviter l'apparition de petite valeurs propres en appliquant le théorème 6.10. On y parvient en choisissant judicieusement la topologie des domaines et en exploitant la rigidité conforme en degré médian.

6.2.2. Laplacien de Witten

Les résultats présentés au paragraphe précédent ne sont pas complètement satisfaisants car la construction échoue pour certains degrés et en petite dimension, il est donc naturel d'étendre le problèmes à d'autres opérateurs agissant sur les formes différentielles pour tenter de contourner ces difficultés.

Une approche possible consiste à s'intéresser au laplacien de Witten, qu'on peut interpréter comme un opérateur de Schrödinger pour les formes différentielles. En effet, en restriction aux fonctions, il coïncide avec les opérateurs de Schrödinger dont la première valeur propre est nulle. C'est d'ailleurs l'approche utilisé par Y. Colin de Verdière pour démontrer le théorème 6.2, elle permet en particulier de s'affranchir des rigidités conformes qui existent en dimension 2.

Dans [Ja10c], je montre que le découplage entre la métrique et la mesure induit par la laplacien de Witten permet effectivement de faire disparaître toute rigidité conforme, mais en contrepartie les petites valeurs propres sont plus difficiles à contrôler. Cette stratégie est toutefois fructueuse et permet de prescrire le spectre avec multiplicité en dimension $n \geq 4$. Rappelons que pour la donnée d'une métrique g et d'une fonction φ, on note $\tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi)$ la k-ième valeur propre du laplacien de Witten Δ_φ pour la métrique g en restriction aux p-formes coexactes pour la codifférentielle tordue $\tilde{\delta}$ associée à φ (voir section 2.6).

Théorème 6.11. *Soit M^n une variété compacte connexe orientable (avec ou sans bord) de dimension $n \geq 4$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si on se donne un réel $V > 0$ et et des suites $0 < a_{p,1} \leq a_{p,2} \leq \ldots \leq a_{p,N}$ pour $1 \leq p \leq n-1$, alors il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que*

- *$\tilde{\mu}_{p,k}(M, g, \varphi) = a_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq n-1$;*
- *$\mathrm{Vol}(M, g) = V$.*

On peut donc en particulier prescrire la multiplicité des premières valeurs propres pour tous les degrés non nuls simultanément.

Une des techniques utilisées consiste à pratiquer des déformations conformes qui affectent non seulement la métrique mais aussi la fonction φ définissant le laplacien de Witten. Plus précisément, on fixe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour la donnée d'une métrique g et d'une fonction φ on définit la classe conforme de poids α de (g, φ) par

$$[g, \varphi]_\alpha = \left\{(e^{2u} g, \varphi - \alpha u),\ u \in C^\infty(M)\right\}. \tag{6.12}$$

On peut adapter l'inégalité de Sobolev du théorème 2.17 au cas où le volume $\mathrm{d}v_g$ est remplacée par $e^{-2\varphi}\mathrm{d}v_g$. J'ai montré qu'on a alors une rigidité conforme du spectre pour les classes conformes pondérées, analogue à celle du théorème 4.41. L'intérêt est qu'en jouant sur le poids α, on peut choisir le degré pour lequel apparaît cette rigidité.

Comme dans [Ja11a], certaines techniques échouent en dimension 3. On peut cependant construire une première valeur propre multiple dont la multiplicité dépend de la topologie, étendant ainsi le résultat obtenu par Colin de Verdière sur les surfaces (cf. théorème 6.2). Rappelons qu'on note $C(\Sigma)$ le nombre chromatique d'une surface Σ, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que le graphe complet à k sommets se plonge dans Σ. Le résultat qu'on peut obtenir en dimension 3 est le suivant :

Théorème 6.13. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension 3. Pour toute surface plongée $\Sigma \hookrightarrow M$ telle que l'application naturelle $H^1(M) \to H^1(\Sigma)$ en cohomologie de Rham soit surjective, il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que $\tilde{\mu}_{1,1}(M, g, \varphi)$ soit de multiplicité $C(\Sigma) - 1$.*

La condition de surjectivité de $H^1(M) \to H^1(\Sigma)$ peut s'interpréter comme un analogue cohomologique de la notion de surface incompressible.

En appliquant le théorème 6.13 avec $\Sigma = S^2$, on obtient :

Corollaire 6.14. *Soit M une variété compacte de dimension 3. Il existe une métrique g et une fonction φ sur M telles que $\tilde{\mu}_{1,1}(M, g, \varphi)$ soit de multiplicité 3.*

6.2.3. Construction de valeurs propres doubles et tresses quantiques

Dans [Ja09a], j'ai montré comment obtenir un nombre arbitraire de valeur propres doubles pour le laplacien de Hodge-de Rham en toute dimension. C'est un travail antérieur à ceux présentés au paragraphe précédent mais la technique utilisée est très différente, ce qui justifie une exposition séparée. En outre, ce résultat ne peut pas se déduire entièrement du théorème 6.7 :

Théorème 6.15. *Soit M une variété compacte, connexe, orientable et sans bord de dimension $n \geq 3$, V un réel strictement positif et $N \geq 1$ un entier. On se donne pour tout entier $1 \leq p < [\frac{n-1}{2}]$ (ou $p = 1$ si $n = 3$) une suite de réels $0 < \nu_{p,1} \leq \nu_{p,2} \leq \ldots \leq \nu_{p,N}$, chaque valeur apparaissant au plus deux fois pour p donné.*

Il existe une métrique g sur M telle que
- *$\mu_{p,i}(M,g) = \nu_{p,i}$ pour tout $i \leq N$ et $1 \leq p < [\frac{n-1}{2}]$;*
- *$\mathrm{Vol}(M,g) = V$.*

Par rapport aux théorèmes 6.7 et 6.8, le théorème 6.15 fournit un nombre arbitraire de valeurs propres doubles en dimension 3 et en degré médian.

La construction utilisée repose sur un phénomène lié à la multiplicité baptisé « diabolo » dans [BW84], utilisé pour détecter numériquement l'existence de multiplicité et dont on peut par exemple trouver la description dans [Ar76] (appendice 10) et [CdV98] (chapitre 5). Nous allons ici en donner une description en termes de tresses quantiques, c'est-à-dire des tresses dont les brins représentent des espaces propres du laplacien.

Pour décrire ce phénomène, on va rappeler le prototype des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ sur lequel se base la construction : on fixe un réel λ_0 et un $\varepsilon > 0$ petit, et on considère les deux familles de formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ représentées par les matrices

$$A_t = \begin{pmatrix} \lambda_0 + t & 0 \\ 0 & \lambda_0 - t \end{pmatrix} \text{ et } B_{t,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + t & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda_0 - t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel. Les spectres des formes quadratiques A_t et $B_{t,\varepsilon}$ sont représentés sur la figure 6.2. Un point crucial est que dans le cas de la famille $B_{t,\varepsilon}$, les deux droites propres échangent leur position en faisant un quart de tour quand t varie.

Pour faire coïncider deux valeurs propres, on commence par construire une famille de métrique (g_a), $a \in [0,1]$, de manière à reproduire le phénomène décrit ci-dessus pour la famille de forme quadratique $B_{t,\varepsilon}$ avec deux valeurs propres du laplacien. Si les deux valeurs propres restent distinctes pour tout a, les deux droites propres associées permutent leurs positions en tournant d'un quart de tour. On prolonge ensuite cette famille de métrique pour $a \in [1,2]$ de sorte que $g_2 = g_0$ et que les deux droites échangent une seconde fois

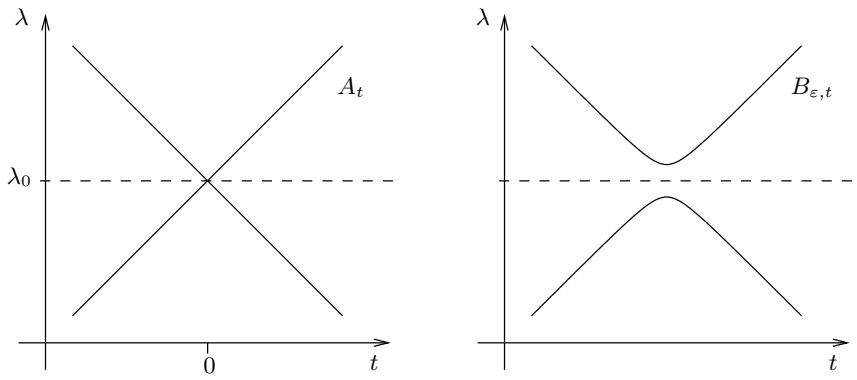

FIGURE 6.2 – Perturbation d'une valeur propre double

leurs positions, en s'assurant qu'*elles tournent à nouveau dans le même sens* (par exemple en utilisant des propriétés de symétrie de la métrique).

Si on représente les deux droites propres par les brins d'une tresse à deux brins, on obtient la figure 6.3.a : les deux brins échangent deux fois leurs positions pour former une tresse non triviale.

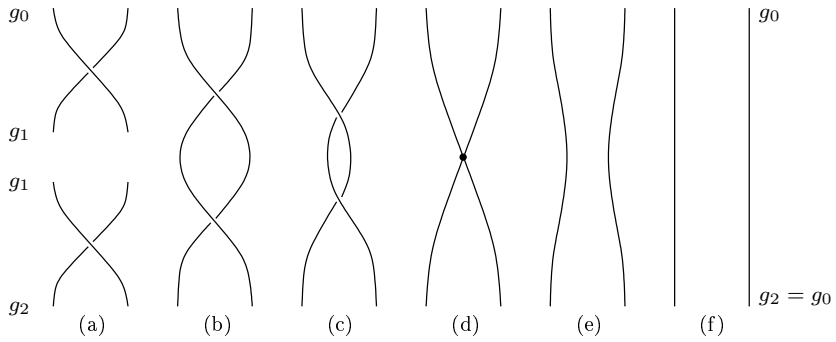

FIGURE 6.3 – Dégénérescence de tresses quantiques

Pour achever la construction, on rétracte le lacet (g_t) sur g_0. Comme la tresse correspondant à un lacet trivial est triviale, les brins de la tresse doivent s'intersecter au cours de la déformation du lacet (figures 6.3.b à 6.3.f). Cette dégénérescence s'interprète spectralement par le fait que les deux valeurs propres coïncident.

6.3. Questions

6.3.1. Laplacien de Hodge-de Rham

Différents problèmes subsistent au sujet de la multiplicité de valeurs propres. Concernant les opérateurs sur les fonctions, on peut rappeler la conjecture de Colin de Verdière selon laquelle on a égalité dans l'inégalité du théorème 6.2 :

Conjecture 6.16. *Sur toute surface compacte Σ, on a l'égalité $m_2(\Sigma) = C(\Sigma) - 1$.*

Concernant les opérateurs sur les formes différentielles, on n'a pas abordé le cas des domaines euclidiens. P. Guerini a montré dans [Gu04] qu'on pouvait prescrire le début du spectre du laplacien de Hodge sur un domaine de topologie donné, mais en supposant que les valeurs propres sont simples.

Question 6.17. *Peut-on prescrire la multiplicité (pour le laplacien de Hodge ou de Witten) sur un domaine euclidien de topologie donnée ?*

Sur les variétés, le théorème 6.7 qui prescrit le spectre du laplacien de Hodge laisse quelques cas en suspens, pour les formes de degré 1 et $[\frac{n-1}{2}]$.

Question 6.18. *La multiplicité des valeurs propres $\mu_{1,1}(M,g)$ et $\mu_{[\frac{n-1}{2}],k}(M,g)$ peut-elle être arbitrairement grande sur une variété quelconque ?*

Enfin, le problème le plus intéressant semble être de comprendre ce qui se passe en dimension 3. En effet, les exemples produits de la proposition 6.6 sont de dimension au moins 4. L'énoncé de S. Y. Cheng pourrait donc s'étendre aux 1-formes coexactes en dimension 3 :

Question 6.19. *Sur une variété M de dimension 3, existe-t-il une borne sur la multiplicité de $\mu_{1,k}(M,g)$ dépendant uniquement de k et de la topologie de M ?*

Bien sûr, la même question se pose pour le laplacien de Witten.

Pour établir un tel résultat, on peut difficilement espérer adapter la démonstration de Cheng dont les arguments sont spécifiques aux fonctions (domaines nodaux) et à la topologie en dimension 2. Mais de manière un peu paradoxale, si la multiplicité est bornée en dimension 3, on pourrait en déduire le théorème 6.1 par l'intermédiaire du produit d'une surface et d'un cercle.

6.3.2. Opérateur de Dirac

Pour l'opérateur de Dirac, le problème de la multiplicité des valeurs propres est presque totalement ouvert. M. Dahl a montré dans [Da05] qu'on pouvait prescrire toute partie finie non nulle du spectre de l'opérateur de Dirac sur les variétés compactes de dimension $n \geq 3$, à condition que les valeurs propres soient simples. Le problème de prescrire leur multiplicité reste à résoudre.

L'opérateur de Dirac soulève un problème particulier. En effet, la dimension de son noyau n'est pas un invariant topologique. Le théorème de l'indice en donne seulement une minoration qui s'exprime en fonction du $\hat{A}$-genre ou du α-genre de la variété. Plus précisément, $\dim\ker D \geq d_M$ avec

$$d_M = \begin{cases} |\hat{A}| & \text{si } n = 0 \mod 4, \\ 1 & \text{si } n = 1 \mod 8 \text{ et } \alpha(M) \neq 0, \\ 2 & \text{si } n = 2 \mod 8 \text{ et } \alpha(M) \neq 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On sait depuis peu, grâce aux travaux de B. Ammann, C. Bär, M. Dahl et E. Humbert que cette minoration est optimale :

Théorème 6.20 ([BD02], [ADH09a]). *Si M est une variété spin compacte, alors* $\dim\ker D = d_M$ *pour un ensemble de métriques ouvert pour la topologie C^1 et dense pour la topologie C^∞.*

Mais le théorème de l'indice ne fournit pas de majorant de cette dimension.

Question 6.21. *Sur une variété spinorielle donnée, la dimension de* $\ker D$ *peut-elle être arbitrairement grande ?*

On sait que sur une surface compacte de genre γ, la dimension du noyau est majorée par $\gamma + 1$ (voir [Hi74]). On conjecture cependant que la réponse à la question 6.21 est positive sur toute variété de dimension $n \geq 3$. Cette conjecture n'est actuellement démontrée que pour la sphère S^3 ([Hi74]) et pour les sphères de dimension 0(mod4) ([Se00]).

Par ailleurs, en dimension $n \neq 3$(mod4) le spectre de l'opérateur de Dirac est symétrique par rapport à 0, ce qui implique que la dimension du noyau ne peut varier que de 2 en 2. Sur une variété où l'opérateur de Dirac est inversible pour certaines métriques, la simple existence de spineurs harmoniques est donc un problème de multiplicité.

Chapitre 7

Masse positive et problème de Yamabe

7.1. Masse d'une variété asymptotiquement euclidienne

On définit une variété (M, g) asymptotiquement euclidienne comme étant difféomorphe, en dehors d'un compact, à l'espace euclidien privé d'une boule et telle que la métrique g tende vers la métrique euclidienne à l'infini. Plus précisément, on dit que la métrique g est asymptotiquement euclidienne d'ordre $\tau > 0$ si, dans des coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ définies sur $\mathbb{R}^n \backslash B(0, r_0)$, on a

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}),\ \partial_k g_{ij} = O(r^{-\tau-1}) \text{ et } \partial_{kl} g_{ij} = O(r^{-\tau-2}). \tag{7.1}$$

On définit alors la masse de la variété (M, g) par

$$m(g) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{r \to +\infty} \int_{S_r} \vec{\gamma} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{7.2}$$

où ω_n désigne le volume de la sphère de dimension n et $\vec{\gamma}$ est le champ de vecteur défini par $\gamma_i = \partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}$. Cette définition dépend *a priori* d'un choix de coordonnée, mais R. Bartnik a montré dans [Ba86] que si $\tau > (n-2)/2$, la masse est bien un invariant intrinsèque de la variété et ne dépend pas du choix de carte.

Comme le suggère son nom, l'étude de la masse est motivée par des questions de physique. En fait, cette définition peut s'interpréter heuristiquement de la manière suivante dans le cadre de la relativité générale : si (M, g) est une hypersurface de type espace dans un espace-temps, le vecteur $\vec{\gamma}$ mesure ce que serait champ gravitationnel dans l'approximation newtonnienne ; la masse $m(g)$, qui est la limite de ce flux à travers des sphères arbitrairement grande, serait donc, d'un point de vue newtonnien, la quantité de manière

présente dans l'espace. Cependant, en relativité générale, on ne peut pas interpréter $m(g)$ comme l'intégrale d'une grandeur physique scalaire (densité de matière).

La littérature sur le sujet est trop vaste pour être présentée ici (on peut consulter entre autres [LP87] ou [He98] à ce sujet). Il est toutefois impossible de ne pas énoncer la principale question concernant la masse :

Conjecture 7.3. *Si (M, g) est une variété asymptotiquement euclidienne de courbure scalaire positive ou nulle, alors $m(g) \geq 0$. De plus, $m(g) = 0$ si et seulement si (M, g) est isométrique à un espace euclidien.*

Cette conjecture est actuellement démontré dans les cas suivants :
- les variétés de dimension $n \leq 8$ ([SY79], [SY81]) ;
- les variétés spinorielles ([Wi81]) ;
- les projections stéréographiques de variétés conformément plates ([SY88]).

Dans le dernier cas intervient une propriété remarquable de la masse qui est son lien avec certaines questions de géométrie conforme, et en particulier le problème de Yamabe. Nous allons développer cet aspect (et définir les projections stéréographiques) dans la section qui suit.

7.2. Projections stéréographiques et problème de Yamabe

Le problème de Yamabe consiste à trouver dans chaque classe conforme d'une variété compacte une métrique dont la courbure scalaire est constante. Après avoir décelé une erreur dans la solution [Ya60] proposée par Yamabe, N.-S. Trudinger a pu la corriger dans [Tr68] pour les classes conformes n'admettant pas de métrique à courbure scalaire strictement positive. Les cas restants ont été résolu par T. Aubin [Au76] pour les variétés non conformément plate de dimension $n \geq 6$ et par R. Schoen [Sc84] en dimension 3 à 5 et pour les variétés conformément plates (voir [LP87]).

La démonstration de R. Schoen consiste à se ramener à l'étude d'une variété asymptotiquement euclidienne de la manière suivante : si le laplacien conforme $L_g = \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + \mathrm{scal}_g$ est inversible (en particulier s'il existe une métrique de courbure scalaire strictement positive dans la classe conforme de g), il existe pour tout point $P \in M$ une fonction de Green Γ_P telle que $L_g\Gamma_P = \delta_P$ au sens des distributions. Comme cette fonction admet un développement de la forme

$$\Gamma_P(x) = \frac{1}{4(n-1)\omega_{n-1}r^{n-2}} + A_P + f(x) \tag{7.4}$$

où $r = d(P, x)$, $f(x) = O(r)$ et ω_{n-1} désigne le volume de la sphère canonique S^{n-1}, la variété $(M\backslash\{P\}, \Gamma_P^{\frac{4}{n-2}}g)$ est asymptotiquement euclidienne

(cf. [LP87]). On appelle souvent *projection stéréographique* cette construction car elle généralise la projection classique de $S^n\backslash\{P\}$ sur $\mathbb{R}^n$. Dans [Sc84], R. Schoen montre d'une part qu'on peut résoudre le problème de Yamabe si $A_P > 0$, et d'autre part que la constante A peut s'identifier à la masse de $(M\backslash\{P\}, \Gamma_P^{\frac{4}{n-2}} g)$, on est donc ramené au problème de la masse positive.

Par ailleurs E. Witten a proposé dans [Wi81] une démonstration du théorème de la masse positive sur les variétés asymptotiquement euclidiennes utilisant les spineurs. Dans [AH05], B. Ammann et E. Humbert l'ont simplifiée dans le cas des projections stéréographiques en utilisant la compacité de la variété d'origine ; sur les variétés conformément plates leur démonstration est particulièrement concise et élégante. Cependant, ces résultats nécessitent l'hypothèse topologique que la variété soit spin.

Dans [Ja11b], j'ai proposé une modification de l'argument de [AH05] de manière à s'affranchir de la condition spin. L'argument ne fonctionne qu'en dimension paire, mais il n'y a aucune autre restriction topologique sur la variété, pas même l'orientabilité :

Théorème 7.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et conformément plate, de courbure scalaire strictement positive et de dimension $n \geq 4$ paire. Pour tout $P \in M$, la masse A_P est positive, et $A_P = 0$ si et seulement si (M, g) est conforme à la sphère canonique.*

La démonstration de Witten reposait sur le fait suivant : sur une variété asymptotiquement euclidienne, si on construit un spineur harmonique φ qui est asymptotique à un spineur parallèle de $\mathbb{R}^n$ de norme ponctuelle 1, la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et une intégration par partie donnent

$$\frac{\omega_n}{4} m(g) = \int_M (|\nabla\varphi|^2 + \frac{\mathrm{scal}_g}{4}|\varphi|^2)\mathrm{d}v_g, \tag{7.6}$$

dont on peut déduire la positivité de la masse.

Dans [AH05], B. Ammann et E. Humbert commencent par construire un spineur sur la variété compacte avant d'effectuer la projection stéréographique. Ce spineur est singulier au point P par rapport auquel on effectue le projection. En utilisant la covariance conforme de l'opérateur de Dirac, on obtient alors un spineur harmonique sur la variété asymptotiquement euclidienne auquel on peut appliquer la formule de Witten (7.6). L'apport de cette démonstration est qu'elle permet de s'affranchir des prérequis d'analyse sur les variétés non compactes, en particulier concernant l'utilisation des espaces à poids. Dans ce contexte, la démonstration de la formule de Witten se trouve aussi simplifiée.

On a vu au chapitre 2 (théorème 2.29) que sur les variétés conformément plates de dimension n paire, la formule de Weitzenböck pour les formes différentielles de degré $n/2$ ne faisait intervenir que la courbure scalaire, comme la formule de Schrödinger-Lichnerowicz, ce qui laisse espérer qu'on

puisse avoir une formule de Witten pour les formes différentielles. En outre, pour ce degré, le fait d'être fermé ou cofermé est une propriété conformément invariante.

Cependant, on doit au préalable construire une forme différentielle adéquate. On va détailler cette construction car elle contient un différence notable avec celle de [AH05]. On commence par construire un modèle euclidien de forme harmonique : soit $\varphi_0 \in \Lambda^{\frac{n}{2}}\mathbb{R}^n$ une forme alternée qu'on identifie à la $\frac{n}{2}$-forme différentielle invariante correspondante sur $\mathbb{R}^n$. Cette forme est parallèle, donc $\mathrm{d}\varphi_0 = \delta\varphi_0 = 0$. L'inversion i par rapport à la sphère unité est un difféomorphisme conforme de $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, on a donc aussi $\mathrm{d}i^*(\varphi_0) = \delta i^*(\varphi_0) = 0$. Si on note r la coordonnée radiale sur $\mathbb{R}^n$, on a $i^*(g_{\mathrm{eucl}}) = r^{-4}g_{\mathrm{eucl}}$, donc $|i^*(\varphi_0)| = r^{-n}$ et de plus $\nabla_r(i^*(r^n\varphi_0)) = 0$ car la forme $i^*(r^n\varphi_0)$ est constante le long d'une droite passant par l'origine.

Avec les hypothèses du théorème 7.5, on peut se ramener au cas où la métrique est euclidienne dans une petite boule $B_P(r_0)$ centrée en P (voir [Ja11b]).

Lemme 7.7. *Soit $\varphi_0 \in \Lambda^{\frac{n}{2}}\mathbb{R}^n$. Il existe une $\frac{n}{2}$-forme φ harmonique sur $M\backslash\{P\}$ et telle que $\varphi = i^*(\varphi_0) + \varphi'$ sur $B_P(r_0)\backslash P$, φ' étant une forme lisse sur $B_P(r_0)$.*

Démonstration : On commence par choisir une fonction de coupure η qui vaut 1 sur $B_P(r_0/2)$ et 0 en dehors de $B_P(r_0)$, et on note $\bar{\varphi}$ la forme définie sur $M\backslash\{P\}$ par $\bar{\varphi} = \eta i^*(\varphi_0)$ sur $B_P(r_0)$ et prolongée par 0 en dehors. Comme $\mathrm{d}\bar{\varphi} = 0$ sur $B_P(r_0/2)\backslash\{P\}$, forme différentielle $\mathrm{d}\bar{\varphi}$ se prolonge de manière lisse en une forme fermée sur M à support dans $B_P(r_0)$; le lemme de Poincaré à support compact ([BT82], corollaire 4.7.1) assure alors qu'il existe donc une $\frac{n}{2}$-forme θ à support dans $B_P(r_0)$ telle que $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\bar{\varphi}$ sur $B_P(r_0)\backslash\{P\}$. En particulier, $\mathrm{d}\bar{\varphi}$ est la restriction à $M\backslash\{P\}$ d'une forme exacte sur M.

Par théorie de Hodge, on peut donc classiquement trouver une forme lisse θ_1 telle que $\mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\bar{\varphi}$ sur $M\backslash\{P\}$ et $\delta\theta_1 = 0$ (on utilise ici seulement le fait que δ est l'adjoint de d, l'hypothèse d'orientation est superflue). Comme on a aussi $\delta\bar{\varphi} = 0$ sur $B_P(r_0/2)\backslash\{P\}$, le même argument permet de trouver une forme θ_2 lisse et fermée sur M vérifiant $\delta\theta_2 = \delta\bar{\varphi}$. Il suffit alors de choisir $\varphi = \bar{\varphi} - \theta_1 - \theta_2$. ∎

Il y a ici une différence cruciale avec la démonstration utilisant les spineurs. Dans [AH05], on utilise le fait que l'opérateur de Dirac est inversible (cette condition est assurée par le fait qu'il y a une métrique à courbure scalaire positive dans la classe conforme). La condition analogue pour les formes différentielles serait que les $(\frac{n}{2}+1)$-formes fermées soient exactes, ce qui est une restriction topologique. C'est le lemme de Poincaré qui permet de s'affranchir de cette hypothèse.

La forme φ ainsi construite reste harmonique sur la projection stéréographique de M. On peut facilement montrer une formule de Witten pour cette forme particulière par un simple développement limité (voir [Ja11b] pour les détails).

7.3. Questions

Le théorème 7.5 résulte de la conjonction un peu miraculeuse de plusieurs phénomènes : l'invariance conforme de l'harmonicité pour les formes différentielles de degré médian, la formule de Weitzenböck pour ce degré et le lemme de Poincaré. Il semble *a priori* difficile de pouvoir exploiter ces techniques dans des situations plus générales. Même en montrant une formule de Witten pour les p-formes différentielles sur une variété asymptotiquement euclidienne quelconque, on aurait besoin comme hypothèse que la courbure de Weitzenböck en degré p soit positive, ce qui est une condition plus forte que l'hypothèse de la conjecture 7.3 quel que soit p (en degré médian par exemple, il faudrait que le tenseur de Weyl soit petit par rapport à la courbure scalaire).

Cependant, les formes différentielles ouvrent peut-être la voie à l'utilisation d'autres fibrés vectoriels. En effet, le laplacien de Hodge-de Rham est un cas particulier de la construction suivante : à chaque représentation irréductible du groupe d'holonomie est associé un fibré vectoriel sur la variété muni d'une connexion canonique, cette connexion permettant de définir plusieurs laplacien naturels reliés entre eux par des formules de Weitzenböck.

Partant de cette observation, un stratégie possible pour démontrer d'autres théorème de masse positive serait la suivante :

- déterminer un fibré vectoriel et une formule de Weitzenböck associée dont le terme de courbure est convenable ;
- vérifier s'il existe une formule de Witten pour le laplacien considéré, c'est-à-dire si on peut obtenir la masse de la variété comme terme de bord d'intégrations par partie.

Le terme de courbure cherché serait idéalement la courbure scalaire, mais un terme faisait intervenir la courbure scalaire et le tenseur de Weyl permettrait de montrer un analogue du théorème 7.5 en dimension impaire.

Publications

Thèse de doctorat

Sur le spectre du laplacien des fibrés en tores qui s'effondrent, Thèse de doctorat, université de Neuchâtel, déc. 2003, math.DG/0506234.

Articles de recherche

« Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent », *Manuscripta Math.*, 110 (1), p. 13–31, 2003.

« Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores », prépublication, 2004, math.DG/0404536.

« Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.

« Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies », *Geom. Dedicata*, 135, p. 29–37, 2008, arXiv :0801.2638.

« Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, 83 (3), p. 521–537, 2008, math.DG/0601738.

« Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », *J. Geom. Anal.*, 19 (3), p. 643–654, 2009, math.DG/0608758.

« Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens », *Ann. inst. Fourier*, 60 (1), p. 257–290, 2010, math.DG/0505417.

« Un théorème de la masse positive pour le problème de Yamabe en dimension paire », *J. reine angew. Math.*, 650, p. 101–106, 2011, arXiv :0807.3179.

« Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham », *Comment. Math. Helv.*, 86 (4), p. 967-984, 2011, arXiv :0804.0104.

« The supremum of first eigenvalues of conformally covariant operators in a conformal class », Dans *Variational Problems in Differential Geometry*,

volume 394 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–23, Cambridge University Press, arXiv :0708.0529 (Avec B. Ammann)

« Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Witten », *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître, arXiv :1003.5391.

« Minoration du spectre des variétés hyperboliques de dimension 3 », *Bull. Soc. math. France*, à paraître, arXiv :1033.3645.

Actes de séminaire

« Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 23, p. 115–124, 2005.

« Extrema de valeurs propres dans une classe conforme », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 24, p. 23–43, 2007, arXiv :0804.0488.

« Sur la multiplicité des valeurs propres d'une variété compacte », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 26, p. 1–11, 2009.

Bibliographie

[AB00] B. Ammann et C. Bär – « Dirac eigenvalues and total scalar curvature », *J. Geom. Phys.*, 33, p. 229–234, 2000, math.DG/9909061.

[ADH] B. Ammann, M. Dahl et E. Humbert – « Smooth Yamabe invariant and surgery », prépublication, arXiv :0804.1418.

[ADH09a] B. Ammann, M. Dahl et E. Humbert – « Surgery and harmonic spinors », *Adv. Math.*, 220 (2), p. 523–539, 2009, math.DG/0606224.

[ADH09b] B. Ammann, M. Dahl et E. Humbert – « Surgery and the spinorial τ-invariant », *Comm. Part. Diff. Eq.*, 34, p. 1147–1179, 2009, arXiv :0710.5673.

[Ag94] M. S. Agranovich – « Elliptic operators on closed manifolds », Dans *Partial Differential Equations VI, elliptic and parabolic operators*, volume 63 de *Encycl. Math. Sci.*, Springer Verlag, 1994.

[Ag06] I. Agol – « Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups », Dans *Proceedings of the international congress of mathematicians*, volume 2, pages 951–960, EMS, 2006, math.DG/0512560.

[AGHM08] B. Ammann, J. F. Grosjean, É. Humbert et B. Morel – « A spinorial analogue of Aubin's inequality », *Math. Z.*, 260 (1), p. 127–151, 2008, math.DG/0308107.

[AH05] B. Ammann et E. Humbert – « Positive mass theorem for the Yamabe problem on Spin manifolds », *Geom. Funct. Anal.*, 15 (3), p. 567–576, 2005, math.DG/0304043.

[AH06a] B. Ammann et É. Humbert – « The first conformal Dirac eigenvalue on 2-dimensional tori », *J. Geom. Phys.*, 56 (4), p. 623–642, 2006, math.DG/0412409.

[AH06b] B. Ammann et É. Humbert – « The second Yamabe invariant », *J. Funct. Anal.*, 235 (2), p. 377–412, 2006, math.DG/0502094.

[AH08] B. Ammann et É. Humbert – « The spinorial τ-invariant and 0-dimensional surgery », *J. Reine Angew. Math.*, 624, p. 27–50, 2008, math.DG/0607716.

[AHM04] B. Ammann, É. Humbert et B. Morel – « Un problème de type Yamabe sur les variétés spinorielles compactes », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 338 (12), p. 929–934, 2004.

[AHM06] B. Ammann, É. Humbert et B. Morel – « Mass endomorphism and spinorial yamabe type problems on conformally flat manifolds », *Comm. Anal. Geom.*, 14 (1), p. 163–182, 2006.

[AJ11] B. Ammann et P. Jammes – « The supremum of first eigenvalues of conformally covariant operators in a conformal class », Dans *Variational Problems in Differential Geometry*, volume 394 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 1–23, Cambridge University Press, 2011, arXiv :0708.0529.

[AL92] J. A. Álvarez López – « The basic component of the mean curvature form of riemannian foliations », *Ann. Global Anal. Geom.*, 10 (2), p. 179–194, 1992.

[Am03] B. Ammann – « A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue », *Differ. Geom. Appl.*, 18 (1), p. 21–32, 2003.

[Am09] B. Ammann – « The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions », *Comm. Anal. Geom.*, 17 (3), p. 429–479, 2009, math.DG/0309061.

[An89] C. Anné – « Principe de Dirichlet pour les formes différentielles », *Bull. soc. math. France*, 117 (4), p. 445–450, 1989.

[An90] C. Anné – « Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité », *Commun. Partial Differ. Equations*, 15 (11), p. 1617–1630, 1990.

[AN07] K. Akutagawa et A. Neves – « Classification of all 3-manifolds with Yamabe invariant greater than that of $\mathbb{R}P^3$ », *J. Differ. Geom.*, 75 (3), p. 359–386, 2007, math.DG/0502122.

[Ar76] V. Arnol'd – *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, 1976.

[Au76] T. Aubin – « équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire », *J. math. pur. appl.*, 55, p. 269–296, 1976.

[Ba86] R. Bartnik – « The mass of an asymptotically flat manifold », *Commun. Pure Appl. Math.*, 39, p. 661–693, 1986.

[BBG85] P. Bérard, G. Besson et S. Gallot – « Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov », *Inventiones Mathematicae*, 80, p. 295–308, 1985.

[BCC98] G. Besson, B. Colbois et G. Courtois – « Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2 », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1), p. 331–345, 1998.

[BCD93] P. Buser, B. Colbois et J. Dodziuk – « Tubes and Eigenvalues for Negatively Curved Manifolds », *J. Geom. Anal.*, 3 (1), p. 1–26, 1993.

[BD02] C. Bär et M. Dahl – « Surgery and the spectrum of the Dirac operator », *J. Reine Angew. Math.*, 552, p. 53–76, 2002, math.DG/0201195.

[Be78] A. L. Besse – *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer Verlag, 1978.

[Be80] G. Besson – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier*, 30 (1), p. 109–128, 1980.

[BK97] P. Buser et H. Karcher – *Gromov's almost flat manifolds*, volume 81 de *Astérisque*, Soc. math. France, 1997.

[BN04] H. L. Bray et A. Neves – « Classification of prime 3-manifolds with σ-invariant greater than $\mathbb{R}P^3$ », *Ann. Math.*, 159 (1), p. 407–424, 2004.

[Bo81] J.-P. Bourguignon – « Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein », *Invent. Math.*, 63 (2), p. 263–286, 1981.

[BP92] R. Benedetti et C. Petronio – *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer Verlag, 1992.

[BT82] R. Bott et L. W. Tu – *Differential form in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.

[Bu77] P. Buser – « Riemannsche Flächen mit Eigenwerten in $(0, 1/4)$ », *Comment. Math. Helv*, 52, p. 25–34, 1977.

[BW84] M. V. Berry et M. Wilkinson – « Diabolical points in the spectra of triangles », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 392 (1802), p. 15–43, 1984.

[Bä92] C. Bär – « Lower eigenvalue estimates for Dirac operators », *Math. Ann.*, 293 (1), p. 39–46, 1992.

[Ca84] Y. Carrière – « Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates », *Math. Z.*, 186, p. 393–400, 1984.

[CC89] B. Colbois et G. Courtois – « Les valeurs propres inférieures à $1/4$ des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité », *Comment. Math. Helv*, 64, p. 349–362, 1989.

[CC90] B. Colbois et G. Courtois – « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms », *Manuscripta Math.*, 68, p. 143–160, 1990.

[CC00] B. Colbois et G. Courtois – « Petites valeurs propres des p-formes différentielles et classe d'Euler des S^1-fibrés », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33 (5), p. 611–645, 2000.

[CCdV88] B. Colbois et Y. Colin de Verdière – « Sur la multiplicité de la première valeur propre d'une surface de Riemann à courbure constante », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 194–208, 1988.

[CdV86] Y. Colin de Verdière – « Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien », *Comment. Math. Helv.*, 61 (2), p. 254–270, 1986.

[CdV87] Y. Colin de Verdière – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), p. 99–615, 1987.

[CdV88] Y. Colin de Verdière – « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 184–193, 1988.

[CdV98] Y. Colin de Verdière – *Spectres de graphes*, volume 4 de *Cours spécialisés*, Soc. math. France, 1998.

[CdVT93] Y. Colin de Verdière et N. Torki – « Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 11, p. 9–18, 1993.

[CES03] B. Colbois et A. El Soufi – « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the "conformal spectrum" », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.

[CES06] B. Colbois et A. El Soufi – « Eigenvalues of the laplacian acting on p-forms and metric conformal deformations », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 134 (3), p. 715–721, 2006, math.DG/0409242.

[CFG92] J. Cheeger, K. Fukaya et M. Gromov – « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Amer. Math. Soc.*, 5 (2), p. 327–372, 1992.

[Ch55] S.-S. Chern – « On Curvature and Characteristic Classes of a Riemannian Manifold », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 20 (1-2), p. 117–126, 1955.

[Ch76] S. Y. Cheng – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.*, 51 (1), p. 43–55, 1976.

[Ch79] J. Cheeger – « Analytic torsion and the heat equation », *Ann. Math.*, 109 (2), p. 259–322, 1979.

[Co04] B. Colbois – « Spectre conforme et métriques extrémales », *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, 22, p. 93–101, 2004.

[CT97] S. Chanillo et F. Trèves – « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *J. Differ. Geom.*, 45 (2), p. 273–287, 1997.

[CZ95] X. Cheng et D. Zhou – « First eigenvalue estimate on Riemannian manifolds », *Hokkaïdo Mathematical Journal*, 24, p. 453–472, 1995.

[Da05] M. Dahl – « Prescribing eigenvalues of the Dirac operator », *Manuscripta Math.*, 118 (2), p. 191–199, 2005, math.DG/0311172.

[DM95] J. Dodziuk et J. McGowan – « The Spectrum of the Hodge Laplacian for a Degenerating Family of Hyperbolic Three Manifolds », *Trans. Amer. Math. Soc*, 347 (6), p. 1981–1995, 1995.

[Do82] J. Dodziuk – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.

[Do87] J. Dodziuk – « A lower bound for the first eigenvalue of a finite-volume negatively curved manifold », *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 18 (2), p. 23–34, 1987.

[DR86] J. Dodziuk et B. Randol – « Lower bounds for λ_1 on a finite-volume hyperbolic manifold », *J. Differ. Geom.*, 24 (1), p. 133–139, 1986.

[EKSH85] A. El Kacimi, V. Sergiescu et G. Hector – « La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie », *Math. Z.*, 188, p. 593–599, 1985.

[Er02] L Erdős – « Spectral shift and multiplicity of the first eigenvalue of the magnetic Schrödinger operator in two dimensions », *Ann. inst. Fourier*, 52 (6), p. 1833–1874, 2002.

[ESGJ07] A. El Soufi, H. Giacomini et M. Jazar – « A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle », *Duke Math. J.*, 135 (1), p. 181–202, 2007, math.DG/0506585.

[ESI86] A. El Soufi et S. Ilias – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.

[ESI92] A. El Soufi et S. Ilias – « Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications », *J. Funct. Anal.*, 103 (2), p. 294–316, 1992.

[ESI00] A. El Soufi et S. Ilias – « Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions », *Pac. J. Math.*, 195 (1), p. 91–99, 2000.

[ESI03] A. El Soufi et S. Ilias – « Extremal metrics for the first eigenvalue of the Laplacian in a conformal class », *Proc. Am. Math. Soc.*, 131 (5), p. 1611–1618, 2003.

[FN99] L. Friedlander et N. Nadirashvili – « A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian », *Internat. Math. Res. Notices*, 17, p. 939–952, 1999.

[Fu87a] K. Fukaya – « Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator », *Invent. Math.*, 87, p. 517–547, 1987.

[Fu87b] K. Fukaya – « Collapsing Riemannian manifolds to ones with lower dimension », *J. Differ. Geom.*, 25, p. 139–156, 1987.

[Fu88] K. Fukaya – « A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters », *J. Differ. Geom.*, 28, p. 1–21, 1988.

[Fu89] K. Fukaya – « Collapsing riemannian manifolds to ones with lower dimension II », *J. Math. Soc. Japan*, 45 (2), p. 333–356, 1989.

[Gh83] É. Ghys – « Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un », *Comment. Math. Helv.*, 58, p. 543–572, 1983.

[Gi09] A. Girouard – « Fundamental tone, concentration of density, and conformal degeneration on surfaces », *Canad. J. Math.*, 61 (3), p. 548–565, 2009, math.SP/0510279.

[GM75] S. Gallot et D. Meyer – « Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne », *J. Math. Pur. Appl.*, 54, p. 259–284, 1975.

[GN06] C. Guillarmou et F. Naud – « Wave 0-trace and length spectrum on convex co-compact hyperbolic manifolds », *Comm. Anal. Geom.*, 14 (5), p. 945–967, 2006.

[Gr78a] A. Gray – « Chern numbers and curvature », *Amer. J. Math.*, 100 (3), p. 463–476, 1978.

[Gr78b] M. Gromov – « Almost flat manifolds », *J. Differential Geom.*, 13 (2), p. 231–241, 1978.

[Gr80] M. Gromov – « Paul Levy's isoperimetric inegality », *Prépublication IHÉS*, 1980, paru dans [Gr99].

[Gr81] M. Gromov – « Hyperbolic manifolds (according to Thurston and Jørgensen) », Dans *Séminaire Bourbaki 79/80*, volume 842 de *Lecture Notes in Math.*, pages 40–53, Springer, 1981.

[Gr99] M. Gromov – *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, 1999.

[GT06] V. Gold'shtein et M. Troyanov – « Sobolev inequalities for differential forms ans $L_{q,p}$-cohomology », *J. Geom. Anal.*, 16 (4), p. 597–632, 2006, math.DG/0506065.

[Gu04] P. Guérini – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 37 (2), p. 270–303, 2004.

[He85] G. Henniart – « Les inégalités de Morse », Dans *Séminaire Bourbaki 83/84*, volume 121–122 de *Astérisque*, pages 43–61, Soc. Math. France, 1985.

[He98] M. Herzlich – « Les théorèmes de masse positive », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 16, p. 107–126, 1998.

[Hi74] N. Hitchin – « Harmonic spinors », *Adv. Math.*, 14, p. 1–55, 1974.

[Hi86] O. Hijazi – « A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors », *Commun. Math. Phys.*, 104 (1), p. 151–162, 1986.

[Hi01] O. Hijazi – « Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures », Dans *Geometric methods for quantum field theory*, pages 116–169, World Scientific, 2001.

[HN06] B. Heffler et F. Nier – « Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach : the case with boundary », *Mem. soc. math. France*, 105, 2006.

[HOHON99] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof et N. Nadirashvili – « On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces », *Ann. Global Anal. Geom.*, 17 (1), p. 43–48, 1999.

[Ja03a] P. Jammes – « Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent », *Manuscripta Math.*, 110 (1), p. 13–31, 2003.

[Ja03b] P. Jammes – *Sur le spectre du laplacien des fibrés en tores qui s'effondrent*, Thèse de doctorat, université de Neuchâtel, déc. 2003, math.DG/0506234.

[Ja04] P. Jammes – « Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores », prépublication, 2004, math.DG/0404536.

[Ja05] P. Jammes – « Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 23, p. 115–124, 2005.

[Ja07a] P. Jammes – « Extrema de valeurs propres dans une classe conforme », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 24, p. 23–43, 2007, arXiv :0804.0488.

[Ja07b] P. Jammes – « Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.

[Ja08a] P. Jammes – « Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies », *Geom. Dedicata*, 135, p. 29–37, 2008, arXiv :0801.2638.

[Ja08b] P. Jammes – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, 83 (3), p. 521–537, 2008, math.DG/0601738.

[Ja09a] P. Jammes – « Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », *J. Geom. Anal.*, 19 (3), p. 643–654, 2009, math.DG/0608758.

[Ja09b] P. Jammes – « Sur la multiplicité des valeurs propres d'une variété compacte », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 26, p. 1–11, 2009.

[Ja10a] P. Jammes – « Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens », *Ann. inst. Fourier*, 60 (1), p. 257–290, 2010, math.DG/0505417.

[Ja10b] P. Jammes – « Minoration du spectre des variétés hyperboliques de dimension 3 », *Bull. Soc. math. France*, à paraître, 2010, arXiv :1033.3645.

[Ja10c] P. Jammes – « Sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Witten », *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître, 2010, arXiv :1003.5391.

[Ja11a] P. Jammes – « Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham », *Comment. Math. Helv.*, 86 (4), p. 967–984, 2011, arXiv :0804.0104.

[Ja11b] P. Jammes – « Un théorème de la masse positive pour le problème de Yamabe en dimension paire », *J. reine angew. Math.*, 650, p. 101–106, 2011, arXiv :0807.3179.

[Ko87] O. Kobayashi – « Scalar curvature of a metric with unit volume », *Math. Ann.*, 279, p. 253–265, 1987.

[Ko93] N. Korevaar – « Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics », *J. differ. geom.*, 37 (1), p. 73–93, 1993.

[Ku72] R. Kulkarni – « On the Bianchi Identities », *Math. Ann.*, 199, p. 175–204, 1972.

[La06a] M.-L. Labbi – *Courbure riemannienne : différentes notions de positivité*, habilitation à diriger des recherches, université de Montpellier II, 2006, math.DG/0611371.

[La06b] M.-L. Labbi – « On Weitzenböck curvature operators », prépublication, 2006, math.DG/0607521.

[LM89] H.-B. Lawson et M.-L. Michelson – *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[Lo86] J. Lott – « Eigenvalue bounds for the Dirac operator », *Pacific J. of Math.*, 125 (1), p. 117–126, 1986.

[Lo96] J. Lohkamp – « Discontinuity of geometric expansions », *Comment. Math. Helv.*, 71 (2), p. 213–228, 1996.

[Lo02] J. Lott – « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. Journal*, 114, p. 267–306, 2002, math.DG/9902111.

[Lo04] J. Lott – « Remark about the spectrum of the p-form Laplacian under a collapse with curvature bounded below », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132, p. 911–918, 2004, math.DG/0202196.

[LP87] J. Lee et T. Parker – « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc.*, 17 (1), p. 37–91, 1987.

[LY80] P. Li et S.T. Yau – « Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold », Dans *Proceedings Symposium on Pure Math.*, volume 36, pages 205–239, 1980.

[LY82] P. Li et S.T. Yau – « A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. », *Invent. Math.*, 69 (2), p. 269–291, 1982.

[Ma08a] T. Mantuano – « Discretization of Riemannian manifolds applied to the Hodge Laplacian », *Amer. J. Math.*, 130 (6), p. 1477–1508, 2008, math/0609599.

[Ma08b] P. Massot – « Geodesible contact structures on 3–manifolds », *Geom. Topol.*, 12 (3), p. 1729–1776, 2008.

[Mc93] J. McGowan – « The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.

[Mo66] C. Morrey – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, 1966.

[Mo05] P. Mounoud – « Feuilletages totalement geodesiques, flots riemanniens et variétés de Seifert », *Ann. Inst. Fourier*, 55 (4), p. 1411–1438, 2005.

[MOU84] H. Muto, Y. Ohnita et H. Urakawa – « Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit spheres and the first eigenvalues of their Laplacian », *Tôhoku Math. J.*, 36, p. 253–267, 1984.

[Na88] N. Nadirashvili – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.*, 61 (1), p. 225–238, 1988.

[Na96] N. Nadirashvili – « Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces », *Geom. Funct. Anal.*, 6 (5), p. 877–897, 1996.

[Na02] N. Nadirashvili – « Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere », *J. Differential. Geom.*, 61 (2), p. 335–340, 2002.

[OR09] J.-P. Otal et E. Rosas – « Pour toute surface hyperbolique de genre g, $\lambda_{2g-2} > 1/4$ », *Duke Math. J.*, 150 (1), p. 101–115, 2009, arXiv :0905.0506.

[Ot08] J.-P. Otal – « Three topological properties of small eigenfunctions on hyperbolic surfaces », Dans *Geometry and dynamics of groups and spaces.*, volume 265 de *Progress in Math.*, pages 685–695, 2008.

[Pa10] J. Park – « Ruelle zeta function and prime geodesic theorem for hyperbolic manifolds with cusps », Dans *Casimir force, Casimir operators and the Riemann hypothesis*, pages 89–104, de Gruyter, 2010.

[Pe98] J. Petean – « Computations of the Yamabe invariant », *Math. Res. Lett.*, 5 (6), p. 703–709, 1998, math.DG/9808053.

[Pe00] J. Petean – « The Yamabe invariant of simply connected manifolds », *J. Reine Angew. Math.*, 523, p. 225–231, 2000, math.DG/9808062.

[PY99] J. Petean et G. Yun – « Surgery and the Yamabe invariant », *Geom. Funct. Anal.*, 9 (6), p. 1189–1199, 1999, math.DG/9808052.

[Ra05] S. Ramanan – *Global calculus*, volume 65 de *Graduate Studies in Mathematics*, Amer. Math. Soc., 2005.

[Ro02] X. Rong – « Collapsed riemannian manifolds with bounded sectional curvature », Dans *Proceedings of the ICM*, pages 323–338, 2002, math.DG/0304267.

[RP01a] J. I. Royo Prieto – « The Euler class for Riemannian flows », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 332 (1), p. 45–50, 2001.

[RP01b] J. I. Royo Prieto – « The Gysin sequence for Riemannian flows », Dans *Global Differential Geometry : The Mathematical Legacy of Alfred Gray*, volume 288 de *Contemporary Mathematics*, pages 415–419, AMS, 2001.

[Sc82] R. Schoen – « A lower bound for the first eigenvalue of a negatively curved manifold », *J. Differ. Geom.*, 17, p. 233–238, 1982.

[Sc84] R. Schoen – « Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature », *J. Differential Geom.*, 20 (2), p. 479–495, 1984.

[Sc87] R. Schoen – « Recent progress in geometric partial differential equations », Dans *Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley/Calif. 1986)*, pages 121–130, AMS, 1987.

[Sc89] R. Schoen – « Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related », Dans *Topics in calculus of variations*, volume 1365 de *Lect. Notes Math.*, pages 120–154, Springer Verlag, 1989.

[Sé94] B. Sévennec – « Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 12, p. 29–36, 1994.

[Se00] L. Seeger – *Metriken mit harmonischen Spinoren auf geradedimensionalen Sphären*, thèse de doctorat, Universität Hamnburg, 2000.

[Sé02] B. Sévennec – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.*, 324 (1), p. 195–211, 2002.

[St73] A. Stehney – « Courbure d'ordre p et les classes de Pontrjagin », *J. Differ. Geom.*, 8, p. 125–134, 1973.

[SY79] R. Schoen et S.-T. Yau – « On the proof of the positive mass conjecture in general relativity », *Comm. Math. Phys.*, 65 (1), p. 45–76, 1979.

[SY81] R. Schoen et S.-T. Yau – « Proof of the positive mass theorem. II », *Comm. Math. Phys.*, 79 (2), p. 231–260, 1981.

[SY88] R. Schoen et S.-T. Yau – « Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature », *Invent. Math.*, 92 (1), p. 47–71, 1988.

[Ta66] T. Takahashi – « Minimal immersions of Riemannian manifolds », *J. Math. Soc. Japan*, 18, p. 380–385, 1966.

[Ta96] M. Taylor – *Partial differential equations I*, Springer, 1996.

[Ta02] J. Takahashi – « Small eigenvalues on p-forms for collapsings of the even-dimensional spheres », *Manuscripta Math.*, 109 (1), p. 63–71, 2002.

[Th97] W. Thurston – *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1997.

[Tr68] N.-S. Trudinger – « Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, 22, p. 265–274, 1968.

[Va83] J. R. Vanstone – « The Poincaré map in mixed exterior algebra », *Canad. Math. Bull.*, 26 (2), p. 129–136, 1983.

[Va84] J. R. Vanstone – « A canonical decomposition in mixed exterior algebra », *Canad. J. Math.*, 36 (2), p. 361–373, 1984.

[Wi81] E. Witten – « A new proof of the positive energy theorem », *Comm. Math. Phys.*, 80 (3), p. 381–402, 1981.

[Wi82] E. Witten – « Supersymmetry and Morse theory », *J. Differ. Geom.*, 17, p. 661–692, 1982.

[Wi00] T. J. Willmore – « Surfaces in Conformal Geometry », *Geom. Dedicata*, 18 (3-4), p. 255–264, 2000.

[Ya60] H. Yamabe – « On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Osaka Math. J.*, 12, p. 21–37, 1960.

[Ya91] T. Yamaguchi – « Collapsing and pinching under a lower curvature bound », *Ann. Math.*, 133 (2), p. 317–357, 1991.

Table des matières

Résumé

1 Introduction **1**

2 Laplacien de Hodge-de Rham **5**
2.1. Définitions et décomposition de Hodge 5
2.2. Caractérisation et propriétés des valeurs propres 6
2.3. Variétés à bord 7
2.4. Inégalités de Sobolev 8
2.5. L'algèbre de courbure 10
2.5.1. Définition 10
2.5.2. Applications 11
2.6. Laplacien de Witten 12
2.6.1. Définition 12
2.6.2. Cohomologie 14
2.6.3. Interprétation comme laplacien à densité 14
2.6.4. Conditions de bord 15

3 Spectre des variétés qui s'effondrent **17**
3.1. Variétés qui s'effondrent 19
3.1.1. Structure de fibré 19
3.1.2. Les flots riemanniens et leurs effondrements 20
3.2. Existence de petites valeurs propres 21
3.2.1. Cohomologie limite 21
3.2.2. Fibrés sur le cercle 22
3.2.3. Flots riemanniens 23
3.3. Minoration du spectre 24
3.3.1. Variétés quelconques 24
3.3.2. Fibrés principaux en tores 24
3.4. Questions 26
3.4.1. Effondrements à courbure bornée 26
3.4.2. Effondrements à courbure minorée 26

4 Spectre et géométrie conforme **29**
4.1. Laplacien agissant sur les fonctions 31
4.1.1. Spectre conforme 31
4.1.2. Volume conforme et première valeur propre du laplacien 32
4.1.3. Volume conforme et chirurgies 34
4.2. Opérateur de Dirac et opérateurs conformément covariants . . 36
4.2.1. Opérateurs conformément covariants 36
4.2.2. Minoration conforme du spectre 37
4.2.3. Invariants σ et τ 38
4.2.4. Grandes valeurs propres 40
4.3. Laplacien de Hodge-de Rham 41
4.3.1. Obstruction conforme en degré médian 41
4.3.2. Prescription de spectre 42
4.4. Questions 44
4.4.1. Estimées d'invariants conformes 44
4.4.2. Métriques extrémales 45

5 Petites valeurs propres des variétés hyperboliques **47**
5.1. Surfaces hyperboliques 48
5.1.1. Convergence de variétés et convergence de spectre . . 48
5.1.2. Petites valeurs propres et topologie 48
5.2. Spectre des variétés hyperboliques de dimension 3 50
5.2.1. Topologie et géométrie des 3-variétés hyperboliques . . 50
5.2.2. Petites valeurs propres 52
5.3. Questions 54

6 Multiplicité de valeurs propres **55**
6.1. Opérateurs sur les fonctions 56
6.1.1. Surfaces 56
6.1.2. Variétés de grande dimension 57
6.1.3. L'hypothèse de transversalité d'Arnol'd 57
6.2. Opérateurs sur les formes différentielles 59
6.2.1. Laplacien de Hodge-de Rham 59
6.2.2. Laplacien de Witten 62
6.2.3. Construction de valeurs propres doubles et tresses quantiques 64
6.3. Questions 66
6.3.1. Laplacien de Hodge-de Rham 66
6.3.2. Opérateur de Dirac 67

7 Masse positive et problème de Yamabe **69**
7.1. Masse d'une variété asymptotiquement euclidienne 69
7.2. Projections stéréographiques et problème de Yamabe 70
7.3. Questions 73

Publications **75**

Bibliographie **77**

Table des matières **87**