Sur la multiplicité des valeurs propres d'une variété compacte

Pierre Jammes

Résumé.— Dans ce survol, on rappelle les résultats connus sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien sur une variété compacte, et on présente des résultats nouveaux concernant les valeurs propres multiples du laplacien de Hodge-de Rham.

Mots-clefs : multiplicité de valeurs propres, laplacien de Hodge-de Rham, operateur de Dirac, tresses quantiques.

MSC2000 : 58J50

1. Introduction

L'objectif de ce survol est de présenter les résultats connus sur le problème la multiplicité des valeurs propres du laplacien, et plus généralement des opérateurs géométriques classiques, sur une variété riemannienne compacte.

La section 2 sera consacrée aux opérateurs agissant sur les fonctions (laplacien et opérateurs de Schrödinger), pour lesquels l'étude de ce problème a été menée dans les années 70 et 80. Dans la section 3, je présenterai les résultats que j'ai obtenu récemment concernant le laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles. J'évoquerais dans la section 4 le cas de l'opérateur de Dirac pour lequel le sujet reste presque entièrement vierge.

Les deux dernières sections seront dédiées à la présentation des techniques utilisées pour construire des valeurs propres multiples. Nous verrons d'abord l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd, qui a été popularisée par Colin de Verdière et qui est utilisée pour prescrire la multiplicité d'une valeur propre (section 5), puis une technique plus originale permettant de créer des valeurs propres doubles (section 6).

2. Opérateurs sur les fonctions

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte. Dans la suite, on notera $\lambda_k(M, g)$ la k-ième valeur propre non nulle du laplacien.

Une premier résultat concernant la multiplicité des valeurs propres a été obtenu par S. Y. Cheng qui montre que sur une surface compacte, la multiplicité de λ_k est majorée en fonction de la topologie :

Théorème 2.1 ([Ch76]). *Pour tout $\gamma \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, il existe une constante $c(\gamma, k)$ telle que si M est une surface compacte de genre γ, alors la multiplicité de $\lambda_k(M, g)$ est majorée par c.*

Cette majoration est aussi valable pour les opérateurs de Schrödinger et a été améliorée (voir [Be80], [Na88], [HHN99]), le meilleur résultat connu sur les surfaces de caractéristique d'Euler négative ayant été obtenu par B. Sévennec ([Sé94], [Sé02]). Le théorème qui suit résume ces résultats, en notant $m_k(\Sigma)$ la multiplicité maximale de la k-ième valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur la surface Σ (c'est-à-dire la $(k-1)$-ième valeur propre non nulle dans le cas du laplacien) :

Théorème 2.2. *La multiplicité m_k vérifie :*
- *$m_2(S^2) = 3$ et $m_k(S^2) \leq 2k - 3$ pour $k \geq 3$;*
- *$m_k(\Sigma) \leq 2k + 1$ pour $\Sigma = \mathbb{R}P^2$ ou K^2 (la bouteille de Klein) ;*
- *$m_k(T^2) \leq 2k + 2$;*
- *$m_k(\Sigma) \leq 2k - 2\chi(\Sigma)$ si $\chi(\Sigma) < 0$.*

Par ailleurs, Y. Colin de Verdière a donné une minoration de m_2 en fonction du nombre chromatique $C(\Sigma)$ de la surface, c'est-à-dire le nombre de sommet du plus grand graphe complet plongeable dans Σ :

Théorème 2.3 ([CdV87]). *Sur toute surface compacte Σ, on a $m_2(\Sigma) \geq C(\Sigma) - 1$.*

Il conjecture en outre qu'on a en fait $m_2(\Sigma) = C(\Sigma) - 1$ sur toute surface compacte. Selon les résultats du théorème 2.2, cette conjecture est vraie pour $\chi(\Sigma) \geq -3$. Il faut noter que $C(\Sigma)$ croît comme la racine carrée du genre de Σ alors que la majoration donnée au théorème 2.2 est seulement linéaire. Démontrer la conjecture de Colin de Verdière nécessiterait donc un saut qualitatif important dans l'amélioration de cette majoration.

Ce problème a aussi été étudié en dimension 2 pour des opérateurs avec champ magnétique ([CdVT93], [BCC98]). Dans ce cas, la multiplicité des valeurs propres peut être arbitrairement grande.

Il est naturel de se demander si ce lien entre topologie et multiplicité en dimension 2 admet une généralisation. On va voir dans la suite que les réponses apportées jusqu'à présent sont négatives, du moins pour les opérateurs sur les variétés. Il en va différemment des les opérateurs sur les graphes, sur ce sujet on peut consulter le chapitre 5 de [CdV98].

Sur les variétés de dimension plus grande Y. Colin de Verdière a montré que toute rigidité disparaît et qu'on peut prescrire arbitrairement toute partie finie du spectre :

Théorème 2.4 ([CdV86],[CdV87]). *Si $n \geq 3$, pour toute suite finie $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N$, il existe une métrique g sur M telle que $\lambda_k(M, g) = a_k$ pour $k \leq N$.*

En particulier, on peut prescrire la multiplicité des valeurs propres du laplacien. Autrement dit, à partir de la dimension 3, ni la multiplicité des valeurs propres, ni le début du spectre ne contiennent d'information sur la topologie de la variété.

3. Laplacien de Hodge-de Rham

Ces résultats sur la multiplicité des valeurs propres du laplacien agissant sur les fonctions soulèvent la question de leur généralisation au laplacien de Hodge-de Rham, qui agit sur les formes différentielles.

Précisons d'abord quelques notations. Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte orientable de dimension n, le laplacien Δ^p agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p-formes différentielles est défini par $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$ où δ désigne la codifférentielle. Nous noterons son spectre

$$0 = \lambda_{p,0}(M,g) < \lambda_{p,1}(M,g) \leq \lambda_{p,2}(M,g) \leq \dots \tag{3.1}$$

où les valeurs propres non nulles sont répétées s'il y a multiplicité. La multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est un invariant topologique : c'est le nombre de Betti $b_p(M)$. Par théorie de Hodge, le spectre $(\lambda_{p,i}(M,g))_{i\geq 1}$ est la réunion de $(\mu_{p,i}(M,g))_i$ et $(\mu_{p-1,i}(M,g))_i$ où

$$0 < \mu_{p,1}(M,g) \leq \mu_{p,2}(M,g) \leq \dots \tag{3.2}$$

désigne les valeurs propres du laplacien restreint à l'espace des p-formes coexactes, et on a en outre $\mu_{p,i}(M,g) = \mu_{n-p-1,i}(M,g)$ pour tout p et i si M n'a pas de bord. Le spectre complet du laplacien se déduit alors des $\mu_{p,i}(M,g)$ pour $p \leq \frac{n-1}{2}$, c'est donc à la multiplicité de ces valeurs propres qu'on va s'intéresser.

Commençons par mentionner deux faits élémentaires concernant la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham. Le premier est l'existence de valeurs propres multiples en dimension $n = 1(\mathrm{mod}4)$ pour des raisons purement algébriques :

Proposition 3.3. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte sans bord de dimension $n = 1(\mathrm{mod}4)$, alors la multiplicité des $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M,g)$ est toujours paire.*

Démonstration : Si on note $* : \Omega^p(M,g) \to \Omega^{n-p}(M,g)$ la dualité de Hodge, l'opérateur $*\mathrm{d}$ restreint aux $[\frac{n}{2}]$-formes coexactes est un endomorphisme qui commute avec le laplacien. En outre, si $n = 1(\mathrm{mod}4)$, il est antisymétrique (on a dans ce cas $\Delta = -(*\mathrm{d})^2$ pour les $[\frac{n}{2}]$-formes coexactes). En restriction à un espace propre, il est donc antisymétrique et non dégénéré, ce qui implique que cet espace est de dimension paire. Par conséquent, $\mu_{[\frac{n}{2}],i}(M,g)$ est de multiplicité paire pour tout i. ∎

Le second fait est qu'en effectuant le produit riemannien de deux variétés dont l'une est munie d'une métrique pour laquelle le laplacien agissant sur les fonctions a une première valeur propre de grande multiplicité, on peut construire des exemples de variétés admettant des valeurs propres de grandes multiplicités pour les formes d'un degré p donné. Par exemple, le résultat qui suit est démontré dans [Jaa] :

Proposition 3.4 ([Jaa]). *Pour tout entier $n \geq 4$, et tout $1 \leq p < n/2$, il existe une variété compacte M de dimension n telle que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une métrique g sur M telle que $\mu_{p,1}(M,g)$ soit de multiplicité k.*

Ce résultat montre qu'on ne peut pas avoir en général de majoration de la multiplicité en fonction de la topologie comme dans le théorème 2.1 de Cheng. Mais les exemples de la proposition 3.4 ont une topologie particulière (variétés produits) et on ne contrôle la multiplicité de la première valeur propre que pour certains degrés qu'on ne peut pas choisir indépendamment de la topologie.

Récemment, j'ai démontré une généralisation partielle du théorème 2.4 :

Théorème 3.5 ([Jab]). *Soit M^n une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 6$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si on se donne une suite $0 < a_{1,1} < a_{1,2} \leq a_{1,3} \leq \ldots \leq a_{1,N}$ et des suites $0 < a_{p,1} \leq a_{p,2} \leq \ldots \leq a_{p,N}$ pour $2 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$, alors il existe une métrique g sur M telle que $\mu_{p,k}(M,g) = a_{p,k}$ pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq p \leq [\frac{n-3}{2}]$.*

Si la dimension est suffisamment grande, on obtient donc le même résultat que pour les fonctions, en exceptant la valeur propre $\mu_{1,1}$ ainsi que le degré $p = [\frac{n-1}{2}]$ pour lesquels le problème reste ouvert :

Question 3.6. *La multiplicité des valeurs propres $\mu_{1,1}(M,g)$ et $\mu_{[\frac{n-1}{2}],k}(M,g)$ peut-elle être arbitrairement grande sur une variété quelconque ?*

En utilisant les mêmes techniques que pour le théorème 3.5, on peut apporter un début de réponse en ce qui concerne les 1-formes :

Théorème 3.7 ([Jab]). *Si M^n une variété compacte connexe orientable sans bord de dimension $n \geq 5$, alors il existe sur M une métrique g telle que la multiplicité de $\mu_{1,1}(M,g)$ soit égale à 3.*

La méthode utilisée ne permet cependant pas de prescrire les autres valeurs propres.

Le problème le plus intéressant semble être de comprendre ce qui se passe en dimension 3. En effet, les exemples produits de la proposition 3.4 sont de dimension au moins 4. L'énoncé de S. Y. Cheng pourrait donc s'étendre aux 1-formes coexactes en dimension 3 :

Question 3.8. *Sur une variété M de dimension 3, existe-t-il une borne sur la multiplicité de $\mu_{1,k}(M,g)$ dépendant uniquement de k et de la topologie de M ?*

Pour établir un tel résultat, on peut difficilement espérer adapter de la démonstration de Cheng dont les arguments sont spécifiques aux fonctions (domaines nodaux) et à la topologie en dimension 2. Mais de manière un peu paradoxale, si la multiplicité est bornée en dimension 3, on pourrait déduire le théorème 2.1 par l'intermédiaire du produit d'une surface et d'un cercle.

Le seul élément de réponse connu à la question 3.8 est donné dans [Jaa] : par une technique assez différente de celle du théorème 3.5 et décrite dans la section 6, j'ai montré qu'on pouvait construire un nombre arbitraire de valeurs propres doubles sur les variétés de dimension 3. Le problème de l'existence de multiplicité plus grande reste posé.

4. Opérateur de Dirac

Pour l'opérateur de Dirac, le problème de la multiplicité des valeurs propres est presque totalement ouvert. M. Dahl a montré dans [Da05] qu'on pouvait prescrire toute partie finie non nulle du spectre de l'opérateur de Dirac sur les variétés compactes de dimension $n \geq 3$, à condition que les valeurs propres soient simples. Le problème de prescrire leur multiplicité reste à résoudre.

L'opérateur de Dirac soulève un problème particulier. En effet, la dimension de son noyau n'est pas un invariant topologique. Le théorème de l'indice en donne seulement une minoration (on sait grâce aux travaux récents de B. Ammann, C. Bär, M. Dahl et E. Humbert qu'elle est optimale, cf. [BD02] et [ADH09]), et on conjecture que cette dimension peut être arbitrairement grande sur toute variété de dimension $n \geq 3$. Cette conjecture est démontrée pour la sphère S^3 ([Hi74]) et pour les sphères de dimension $0(\mathrm{mod}4)$ ([Se00]). En revanche, sur une surface compacte de genre γ, la dimension du noyau est majorée par $\gamma + 1$ (voir [Hi74]).

Par ailleurs, en dimension $n \neq 3(\mathrm{mod}4)$ le spectre de l'opérateur de Dirac est symétrique par rapport à 0, ce qui implique que la dimension du noyau ne peut varier que de 2 en 2. Sur une variété où l'opérateur de Dirac est inversible pour certaines métriques, la simple existence de spineurs harmoniques est donc un problème de multiplicité.

5. Propriété de stabilité d'une valeur propre multiple

5.1. Les formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$

Pour comprendre les difficultés que posent la prescription de multiplicité, nous allons d'abord étudier le jouet des formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$.

On fixe un réel λ_0 et un $\varepsilon > 0$ petit, et on considère les deux familles de

formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ représentées par les matrices

$$A_t = \begin{pmatrix} \lambda_0 + t & 0 \\ 0 & \lambda_0 - t \end{pmatrix} \text{ et } B_{t,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + t & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda_0 - t \end{pmatrix}$$

où t est un paramètre réel. Les spectres des formes quadratiques A_t et $B_{t,\varepsilon}$ sont représentés sur la figure suivante :

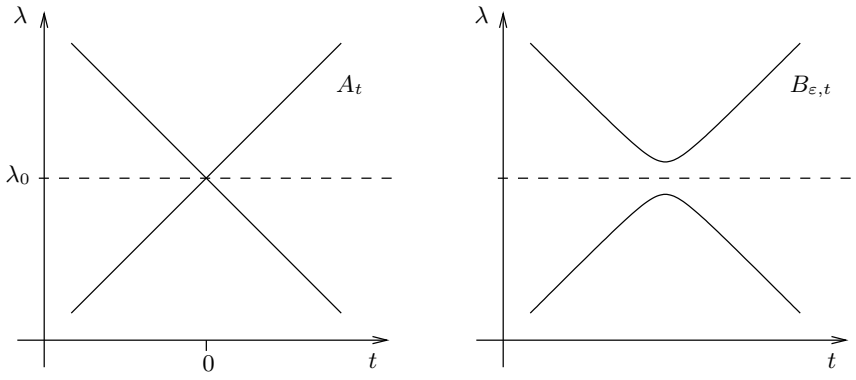

FIG. 1 –

Pour la famille A_t, on a une valeur propre double pour $t = 0$, mais pour la famille $B_{t,\varepsilon}$ la perturbation ε détruit cette multiplicité et faire varier t ne suffit pas à la rétablir.

On peut imaginer que ces formes quadratiques sont la restriction du laplacien à l'espace engendré par deux fonctions (ou formes) propres. La famille A_t correspondant à une famille de métriques modèles g_t pour lesquelles on sait calculer le spectre et $B_{t,\varepsilon}$ à une perturbation de ces métriques. On voit que, contrairement à la prescription d'une valeur propre simple qui peut se faire par simple application du théorème des valeurs intermédiaires, on n'obtient pas de valeur propre multiple de manière automatique avec une famille à un paramètre de métriques.

Remarque 5.1. Pour la famille $B_{t,\varepsilon}$, la droite propre associée à la plus grande valeur propre est proche de l'axe (Ox) pour $t \gg \varepsilon$ et proche de (Oy) pour $t \ll -\varepsilon$. Quand t change de signe, les deux droites propres de $B_{t,\varepsilon}$ échangent donc leur position. Cette propriété interviendra dans la section 6.

5.2. L'hypothèse de transversalité d'Arnol'd

Pour construire des valeurs propres multiples du laplacien, on fait appel à un principe de transversalité dû à Arnol'd et popularisé par Y. Colin de Verdière, et qui généralise le principe des valeurs intermédiaires évoqué plus haut.

Cette propriété de transversalité et son utilisation sont illustrés sur la figure 2 : on suppose qu'on connaît une famille de métriques modèles (g_a) pour laquelle on contrôle le spectre, en particulier on sait que pour une métrique g_0, une valeur propre λ_0 a la multiplicité souhaitée. En outre, on s'assure que l'ensemble des métriques pour lesquelles on a la même multiplicité coupe transversalement l'espace de métriques modèles en g_0 (on verra plus loin comment vérifier cette propriété).

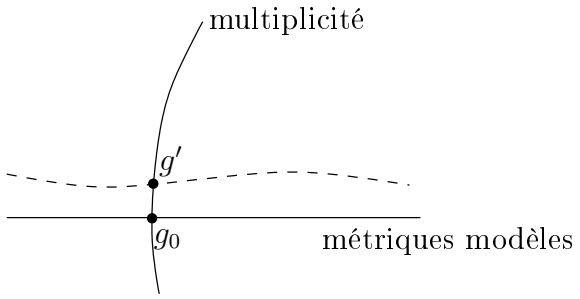

FIG. 2 –

Si on perturbe la famille modèle de métriques (ligne pointillée sur la figure 2), l'hypothèse de transversalité garantit que la famille perturbée contient une métrique g' pour laquelle on a la même multiplicité que pour g_0.

La famille (g_a) est généralement une famille de métriques sur un espace singulier (un graphe dans [CdV86], un domaine de la variété dans [CdV86], [CdV87] et [Jab])). On cherche alors à montrer que pour tout a, il existe une famille $(g_{\varepsilon,a})$ de métriques sur M qui fait tendre le spectre de M vers celui de l'espace singulier de manière uniforme par rapport au paramètre a. La famille perturbée de la figure 2 est alors la famille $(g_{\varepsilon,a})$ pour un ϵ fixé et suffisamment petit.

Il s'avère que la propriété de transversalité peut se vérifier de manière intrinsèque à la famille (g_a). Dans [CdV88], Y. Colin de Verdière énonce deux critères qui implique cette propriété et que nous allons rappeler. On suppose que le paramètre a prend ses valeurs dans une boule B^k de $\mathbb{R}^k$ centrée en 0 et que pour la métrique g_0, la valeur propre λ_0 a un espace propre E_0 de dimension N. Pour les petites valeurs de a, le laplacien associé à g_a possède des valeurs propres proches de λ_0 dont la somme des espaces propres est de dimension N. On identifie alors cette somme à E_0 et on note q_a la forme quadratique associée à g_a transportée sur E_0.

Définition 5.2. *On dit que λ_0 vérifie l'hypothèse de transversalité forte (resp. faible) si l'application $\Psi : a \mapsto q_a$ de B^k dans $\mathcal{Q}(E_0)$ est une submersion en 0, (respectivement essentielle en 0).*

Rappelons que Ψ est essentielle en 0 s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\Phi : B^k \to \mathcal{Q}(E_0)$ vérifie $\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$, alors il existe $a_0 \in B^k$ tel que $\Phi(a_0) = q_0$. On peut

vérifier que l'hypothèse forte implique l'hypothèse faible.

Supposons que la famille de métriques (g_a) vérifie l'hypothèse faible de transversalité. Si $(g_{\varepsilon,a})$ est une perturbation suffisamment petite de la famille (g_a) et qu'on note $\Phi(a)$ la forme quadratique sur E_0 associée à $g_{\varepsilon,a}$, alors on aura $\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Il existe donc un paramètre a_0 tel que $\Phi(a_0) = q_0$, et la métrique g' de la figure 2 est alors g_{ε,a_0}.

6. Valeurs propres doubles et tresses quantiques

Il existe un autre procédé permettant d'obtenir des valeur propres multiples, mais se limitant à la multiplicité 2. Il est exploité dans [Jaa] pour construire un nombre arbitraire de valeur propre double du laplacien de Hodge-de Rham, y compris en dimension 3.

Cette construction repose sur un phénomène lié à la multiplicité et baptisé « diabolo » dans [BW84], dont on peut par exemple trouver la description dans [Ar76] (appendice 10) et [CdV98] (chapitre 5). Nous allons ici en donner une description en termes de tresses quantiques, c'est-à-dire des tresses dont les brins représentent des espaces propres du laplacien.

Pour faire coïncider deux valeurs propres, on commence par construire une famille de métrique (g_a), $a \in [0,1]$, de manière à reproduire le phénomène décrit au paragraphe 5.1 pour la famille de forme quadratique $B_{t,\varepsilon}$. Si les deux valeurs propres restent distinctes pour tout a, les deux droites propres associées permutent leurs positions en tournant d'un quart de tour (cf. remarque 5.1). On prolonge ensuite cette famille de métrique pour $a \in [1,2]$ de sorte que $g_2 = g_0$ et que les deux droites échangent une seconde fois leurs positions, en s'assurant qu'*elles tournent à nouveau dans le même sens* (par exemple en utilisant des propriétés de symétrie de la métrique).

Si on représente les deux droites propres par les brins d'une tresse à deux brins, on obtient la figure 3.a : les deux brins échangent deux fois leur positions pour former une tresse non triviale.

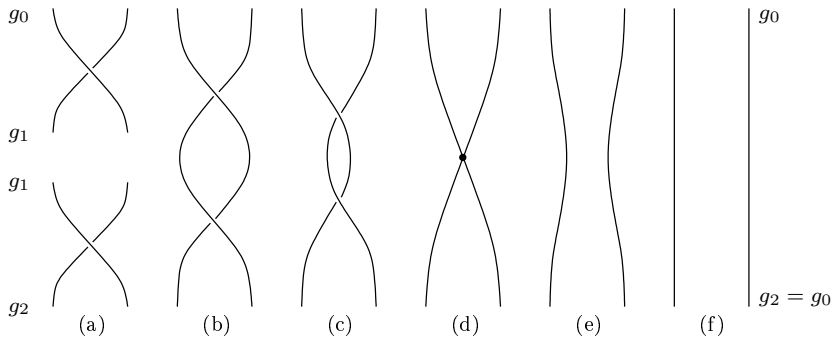

FIG. 3 –

Pour achever la construction, on rétracte le lacet (g_t) sur g_0. Comme la tresse correspondant à un lacet trivial est triviale, les brins de la tresse doivent s'intersecter au cours de la déformation du lacet (figures 3.b à 3.f). Cette dégénérescence s'interprète spectralement par le fait que les deux valeurs propres coïncident.

Dans [Jaa], on donne une démonstration précise de l'existence d'une valeur propre double et une construction explicite pour le laplacien de Hodge-de Rham.

Références

[ADH09] B. Ammann, M. Dahl et E. Humbert – « Surgery and harmonic spinors », *Adv. Math.*, 220 (2), p. 523–539, 2009, math.DG/0606224.

[Ar76] V. Arnol'd – *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, 1976.

[BCC98] G. Besson, B. Colbois et G. Courtois – « Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2 », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (1), p. 331–345, 1998.

[BD02] C. Bär et M. Dahl – « Surgery and the spectrum of the Dirac operator », *J. Reine Angew. Math.*, 552, p. 53–76, 2002, math.DG/0201195.

[Be80] G. Besson – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier*, 30 (1), p. 109–128, 1980.

[BW84] M. V. Berry et M. Wilkinson – « Diabolical points in the spectra of triangles », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 392 (1802), p. 15–43, 1984.

[CdV86] Y. Colin de Verdière – « Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du laplacien », *Comment. Math. Helv.*, 61 (2), p. 254–270, 1986.

[CdV87] Y. Colin de Verdière – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 20 (4), p. 99–615, 1987.

[CdV88] Y. Colin de Verdière – « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.*, 63 (2), p. 184–193, 1988.

[CdV98] Y. Colin de Verdière – *Spectres de graphes*, volume 4 de *Cours spécialisés*, SMF, 1998.

[CdVT93] Y. Colin de Verdière et N. Torki – « Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 11, p. 9–18, 1993.

[Ch76] S. Y. Cheng – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.*, 51 (1), p. 43–55, 1976.

[Da05] M. Dahl – « Prescribing eigenvalues of the Dirac operator », *Manuscripta Math.*, 118 (2), p. 191–199, 2005, math.DG/0311172.

[Hi74] N. Hitchin – « Harmonic spinors », *Adv. Math.*, 14, p. 1–55, 1974.

[HHN99] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof et N. Nadirashvili – « On the multiplicity of eigenvalues of the Laplacian on surfaces », *Ann. Global Anal. Geom.*, 17 (1), p. 43–48, 1999.

[Jaa] P. Jammes – « Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », *J. Geom. Anal.*, math.DG/0608758, à paraître.

[Jab] P. Jammes – « Prescription de la multiplicité des valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham », prépublication, arXiv :0804.0104v1.

[Na88] N. Nadirashvili – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.*, 61 (1), p. 225–238, 1988.

[Se00] L. Seeger – *Metriken mit harmonischen Spinoren auf geradedimensionalen Sphären*, thèse de doctorat, Universität Hamburg, 2000.

[Sé94] B. Sévennec – « Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 12, p. 29–36, 1994.

[Sé02] B. Sévennec – « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.*, 324 (1), p. 195–211, 2002.

Pierre Jammes
Université d'Avignon et des pays de Vaucluse
Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie (EA 2151)
33 rue Louis Pasteur
F-84000 Avignon
Pierre.Jammes@univ-avignon.fr