Extrema de valeurs propres dans une classe conforme

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— On s'intéresse au problème de savoir quelle est la rigidité apportée au spectre d'une variété riemannienne compacte par le fait de fixer son volume et se classe conforme, et en particulier de déterminer si on peut faire tendre les valeurs propres vers 0 ou l'infini sous cette contrainte. On considère successivement les cas du laplacien usuel agissant sur les fonctions, l'opérateur de Dirac, le laplacien conforme et le laplacien de Hodge-de Rham.

Mots-clefs : valeurs propres, géométrie conforme, métriques extrémales.

MSC2000 : 35P15, 58J50, 58E11

1. Introduction

Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 2$. Si M est munie d'une métrique riemannienne g, on peut définir le laplacien $\Delta = -\mathrm{div}\ \mathrm{grad}$, agissant sur les fonctions de M, dont nous noterons le spectre $0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leq \lambda_2(M,g) \leq \ldots$

Un problème classique consiste à étudier la fonctionnelle $g \mapsto \lambda_k(M,g)$ sous certaines contraintes géométriques et d'en chercher les métriques extrémales. Ce problème peut se généraliser à d'autres opérateurs.

Nous nous intéresserons ici à l'étude de la fonctionnelle

$$g \mapsto \lambda_k(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}, \tag{1.1}$$

le facteur volume permettant de normaliser cette fonctionnelle en la rendant invariante par homothétie, en nous restreignant à l'espace des métriques riemanniennes conformes à une métrique g donnée quelconque, c'est-à-dire à la classe conforme $[g] = \{h^2 g,\ h \in C^\infty(M),\ h > 0\}$, ce sujet ayant connu récemment un grand nombre de développements.

On verra successivement le cas du laplacien usuel agissant sur les fonctions (section 2), l'opérateur de Dirac — ou plus précisément son carré pour que la fonctionnelles (1.1) reste invariante par homothétie — et le laplacien conforme dans la section 3, et le laplacien de Hodge-de Rham dans la section 4.

Je remercie Bernd Ammann et Bruno Colbois pour de nombreuses discussions autour de ce sujet, ainsi que Gérard Besson qui m'a permis d'exposer mes travaux au séminaire de théorie spectrale et géométrie de l'institut Fourier.

2. Laplacien usuel

2.1. Majoration des valeurs propres et spectre conforme

Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, nous noterons le spectre du laplacien usuel $\Delta : f \mapsto \nabla^* \nabla f$, agissant sur les fonctions de M, par

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \dots \tag{2.1}$$

À volume fixé, on peut facilement faire tendre ces valeurs propres vers zéro en construisant des haltères de Cheeger, et on peut aussi les faire tendre vers l'infini d'après [CD94]. Si on fixe la classe conforme, on peut encore exhiber des petites valeurs propres, mais en revanche N. Korevaar a montré que pour tout k, $\lambda_k(M, g)$ est uniformément majorée :

Théorème 2.2 ([Ko93]). *Soit M une variété compacte de dimension n et C une classe conforme de métriques sur M. Il existe une constante $a(C) > 0$ telle que*

$$\sup_{g \in C} \lambda_k(M, g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \leq a \cdot k^{\frac{2}{n}}.$$

Pour $k = 1$, une telle majoration avait déjà été obtenue par A. El Soufi et S. Ilias dans [ESI86] (voir paragraphe suivant).

Ce résultat permet de définir des invariants conformes de la variété M en considérant la borne supérieure de $\lambda_k(M, g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}$ dans une classe conforme. ces invariants ont été définis et étudiés par B. Colbois et A. El Soufi dans [CES03] :

Définition 2.3 ([CES03]). *Soit M une variété riemannienne compacte et C une classe conforme de métriques sur M. La k-ième valeur propre conforme de (M, C) est définie par*

$$\lambda_k^c(M, C) = \sup_{g \in C} \lambda_k(M, g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}}.$$

La suite $(\lambda_k^c(M, C))_k$ est appelée spectre conforme de (M, C).

On connaît peu de valeurs exactes des $\lambda_k^c(M, C)$. Outre le cas de la 1^{re} valeur propre de certaines variétés s'immergeant isométriquement minimalement dans des sphères que nous verrons au paragraphe 2.2, le seul exemple semble être $\lambda_2^c(S^2, C_{\text{can}}) = 16\pi$ calculé par N. Nadirashvili dans [Na02].

B. Colbois et A. El Soufi obtiennent dans [CES03] quelques estimées générales des valeurs propres conformes, à commencer par une minoration par le spectre conforme de la sphère :

Théorème 2.4. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$ on a*

$$\lambda_k^c(M, C) \geq \lambda_k^c(S^n, C_{\text{can}}).$$

Ce résultat était déjà connu pour $k = 1$ ([FN99]).

Leur second résultat est que la différence entre deux valeurs propres conformes consécutives est uniformément minorée :

Théorème 2.5. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$ on a*

$$\lambda_{k+1}^c(M, C)^{\frac{n}{2}} - \lambda_k^c(M, C)^{\frac{n}{2}} \geq \lambda_1^c(S^n, C_{\text{can}})^{\frac{n}{2}} = n^{\frac{n}{2}}\omega_n,$$

où ω_n désigne le volume de S^n pour sa métrique canonique.

On peut en déduire une minoration de $\lambda_k^c(M, C)$ en fonction de n et k :

Corollaire 2.6. *Pour toute classe conforme C sur une variété M de dimension n, et tout entier $k > 0$, on a*

$$\lambda_k^c(M, C) \geq n\omega_n^{\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Notons que dans cette dernière égalité, on a égalité sur les sphères pour $k = 1$ et n quelconque, ainsi que pour $k = n = 2$.

La question se pose naturellement de savoir quelles métriques peuvent réaliser le maximum de $\lambda_k(M, g)$ dans une classe conforme. A. El Soufi et S. Ilias montre dans [ESI03] que pour une telle métrique, la valeur propre $\lambda_k(M, g)$ est nécessairement multiple. On peut en déduire, en conjonction avec le théorème 2.5 qu'une métrique ne peut pas maximiser trois valeurs propres consécutives dans sa classe conforme.

2.2. Volume conforme et 1^re valeur propre conforme

Le cas de la première valeur propre du laplacien est particulier car A. El Soufi et S. Ilias ont donné une majoration plus précise que celle de N. Korevaar — et en un sens optimale — en utilisant le volume conforme.

Si on note G_N le groupe des difféomorphismes conforme de la sphère S^N munie de sa structure conforme canonique, le volume conforme de la variété M pour la classe conforme C, introduit par P. Li et S. T. Yau dans [LY82], est défini par

$$V_c(M, C) = \inf_N \inf_{\varphi:(M,C)\to S^N} \sup_{\gamma \in G_N} \operatorname{Vol}(\gamma \circ \varphi(M)), \tag{2.7}$$

l'application φ parcourant l'ensemble des difféomorphismes conformes de (M, C) dans S^N.

La propriété du volume conforme qui nous intéresse ici est la suivante :

Théorème 2.8. *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, alors*

$$\lambda_1(M, g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} \leq nV_c(M, [g])^{\frac{2}{n}}.$$

Ce théorème est démontré pour $n = 2$ dans [LY82], et généralisé en toute dimension par A. El Soufi et S. Ilias dans [ESI86].

La principale motivation de P. Li et S. T. Yau était d'utiliser le théorème 2.8 pour démontrer des cas particuliers de la conjecture de Willmore. Signalons que cette inégalité a trouvé récemment une nouvelle application : en la généralisant à des orbivariétés, I. Agol a montré dans [Ag06] qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes de réflexions kleiniens arithmétiques maximaux.

L'inégalité du théorème 2.8 a l'intérêt qu'on peut caractériser le cas d'égalité et en exhiber des exemples.

Définition 2.9 ([ESI92]). *On dit qu'une métrique g sur une variété compacte M est λ_1-minimale si (M, g) s'immerge isométriquement minimalement dans une sphère par ses premières fonctions propres.*

Théorème 2.10 ([ESI86]). *Soit (M, g) est une variété riemannienne compacte. On a l'égalité $\lambda_1(M, g)\operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = nV_c(M, [g])^{\frac{2}{n}}$ si et seulement si (M, g) est λ_1-minimale.*

Remarque 2.11. La λ_1-minimalité est aussi fortement liée à l'extrémalité de la métrique pour la fonctionnelle (1.1) dans l'espace de toute les métriques (voir [Na96] et [ESI00]).

La condition de λ_1-minimalité a été étudiée par T. Takahashi dans [Ta66], où il montre qu'elle est équivalente à l'existence d'une famille de premières fonctions propres $(f_1, \ldots, f_k)$ telle que $g = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{d}f_i^2$, et que cette condition est vérifiée sur les variétés homogènes irréductibles. Elle l'est aussi sur les variétés fortement harmoniques ([Be78]) et sur quelques autres exemples ([MOU84]). On peut en déduire les valeurs exactes du volume conforme et de la première valeur propre conforme sur les espaces projectifs munis de leur métrique canonique :

variété	dimension	V_c	λ_1^c
S^n	n	ω_n	$n\omega_n^{\frac{2}{n}}$
$\mathbb{R}P^n$	n	$\left(\frac{2(n+1)}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\omega_n}{2}$	$2^{\frac{n-2}{n}}(n+1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$
$\mathbb{C}P^n$	$2n$	$\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)^{n} \frac{1}{n!}$	$4\pi(n+1)n!^{-\frac{1}{n}}$
$\mathbb{H}P^n$	$4n$	$\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)^{2n} \frac{1}{(2n+1)!}$	$8\pi(n+1)(2n+1)!^{-\frac{1}{2n}}$
$\mathbb{C}\mathrm{a}P^2$	16	$\frac{6(3\pi)^8}{11!}$	$48\pi\left(\frac{6}{11!}\right)^{\frac{1}{8}}$

Remarque 2.12. En dimension 2, la fonctionnelle (1.1) est uniformément majorée sur l'espace de toute les métriques, et une métrique réalisant son maximum est λ_1-minimale. Outre le cas de la sphère, on connaît deux valeurs explicites de λ_1^c dans cette situation. Sur le tore, le maximum est atteint par

le tore équilatéral $T^2_{\mathrm{eq}} = \mathbb{R}^2/\Big((1,0)\mathbb{Z} \oplus (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\mathbb{Z}\Big)$ et $\lambda_1^c(T_{\mathrm{eq}}) = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi^2$ (voir [Na96]). Ce maximum a aussi été récemment calculé sur la bouteille de Klein dans [ESGJ07].

Remarque 2.13. La propriété de λ_1-minimalité est stable par produit : on peut facilement vérifier que si deux variétés ont même première valeur propre et que leur métrique peut s'écrire sous la forme $g = \sum_{i=1}^k \mathrm{d}f_i^2$ où les f_i sont des premières fonctions propres, il en va de même pour leur produit. On peut construire ainsi d'autres exemples comme le tore de Clifford $S^1 \times S^1$.

2.3. Spectre conforme minimal

L. Friedlander et N. Nadirashvili ont redémontré de manière indépendante dans [FN99] que $\lambda_1(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ est majoré dans une classe conforme. Ils définissent aussi un nouvel invariant différentiable de M par $\nu(M) = \inf_g \lambda_1^c(M,[g])$ et montrent qu'il est toujours minoré par $\lambda_1^c(S^n, C_{\mathrm{can}})$. On peut définir un « spectre conforme minimal » pour M en étendant cet invariant aux autres valeurs propres par

$$\nu_k(M) = \inf_g \lambda_k^c(M,[g]). \tag{2.14}$$

Ces invariants sont très mal connus. On peut déduire des résultats évoqués précédemment que $\nu_1(S^n) = \lambda_1^c(S^n, C_{\mathrm{can}})$, on peut aussi affirmer que $\nu_2(S^2) = 16\pi$ et $\nu_1(\mathbb{R}P^2) = 12\pi$ en utilisant le fait que ces deux variétés n'ont qu'une classe conforme. A. Girouard a récemment montré dans [Gi] que $\nu_1(T^2) = \nu_1(K^2) = 8\pi$ où K^2 désigne la bouteille de Klein, et on conjecture que pour toute surface compacte Σ autre que $\mathbb{R}P^2$, on a $\nu_1(\Sigma) = 8\pi$.

Il est difficile d'extrapoler ce que peut être le comportement de ces invariants à partir d'aussi peu d'exemples, surtout que la dimension 2 pourrait être pathologique. Le cas du plan projectif montre cependant que l'invariant $\nu_1(M)$ n'est pas trivial.

Un approche possible pour obtenir des estimées de $\nu_1(M)$ est d'utiliser le volume conforme pour définir un nouvel invariant différentiel :

Définition 2.15. *Si M est une variété différentielle compacte, on définit le* volume conforme minimal de M *par*

$$V_{\mathrm{cm}}(M) = \inf_g V_{\mathrm{c}}(M,[g]).$$

On a alors la majoration suivante, qui découle immédiatement du théorème 2.8 :

$$\nu_1(M) \leq n V_{\mathrm{cm}}(M)^{\frac{2}{n}}. \tag{2.16}$$

Remarque 2.17. Pour définir le volume conforme minimal, il suffit dans la relation (2.7) de supprimer la condition que le difféomorphisme φ est conforme. Contrairement au spectre conforme minimal dont la définition fait appel à des structures riemanniennes et conformes sur la variété, on a seulement besoin ici de sa structure différentielle.

Les seules valeurs exactes connues du volume conforme minimal sont $V_{\mathrm{cm}}(S^n) = \omega_n$ et $V_{\mathrm{cm}}(\mathbb{R}P^2) = 6\pi$. On peut cependant montrer qu'à dimension fixée, il est uniformément majoré :

Théorème 2.18 ([Jaa]). *Pour toute entier $n \geq 2$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que pour toute variété compacte M de dimension n, on a $V_{\mathrm{cm}}(M) \leq c(n)$.*

Le principe de la démonstration est d'étudier comment varie le volume conforme minimal quand on pratique des chirurgies sur la variété.

3. Opérateur de Dirac et laplacien conforme

3.1. Notations

Je rassemble ici deux opérateurs qui semblent assez différent par construction mais qui se révèlent avoir de nombreuses propriétés communes.

Si (M, g) est une variété riemannienne munie d'une structure spinorielle χ, on peut définir l'opérateur de Dirac D agissant sur les sections du fibré des spineurs $\Sigma_g M$ (voir par exemple [Hi01]). C'est un opérateur elliptique du 1^{er} ordre dont le spectre n'est pas borné inférieurement. Par commodité, et pour garder une certaine cohérence des notations par rapport aux autres opérateurs traités dans ce texte, nous considérerons le spectre de D^2, que nous noterons

$$0 \leq \lambda_1(M, \chi, g) \leq \lambda_2(M, \chi, g) \leq \dots . \tag{3.1}$$

On notera en outre $\lambda^+(M, \chi, g)$ la première valeur propre strictement positive.

Le laplacien conforme, appelé aussi opérateur de Yamabe, qui agit sur les fonctions de M est défini par

$$\mathrm{L}_g : f \mapsto \Delta f + \frac{n-2}{4(n-1)} \operatorname{scal}_g f, \tag{3.2}$$

où scal_g désigne la courbure scalaire pour la métrique g. Le spectre de L est borné inférieurement, mais peut contenir un nombre fini de valeur propres négatives. Nous noterons son spectre complet par

$$\lambda_1(M, \mathrm{L}_g) \leq \lambda_2(M, \mathrm{L}_g) \leq \dots \tag{3.3}$$

et par $\lambda^+(M, \mathrm{L}_g)$ (resp. $\lambda^-(M, \mathrm{L}_g)$) la plus petite valeur propre (en valeur absolue) strictement positive (resp. strictement négative).

Les opérateurs D et L ont en commun une propriété de covariance conforme : on dit qu'on opérateur T d'ordre j est conformément covariant s'il vérifie la relation

$$\mathrm{T}_{h^2 g} = h^{-\frac{n+j}{2}} \mathrm{T}_g h^{\frac{n-j}{2}} \tag{3.4}$$

où h est une fonction strictement positive et T_g désigne l'opérateur T pour la métrique g. En particulier, la dimension des noyaux de D et L sont des invariants conformes, ce qui justifie le fait de ne s'intéresser ici qu'à leurs valeurs propres non nulles.

Certaines connivences entre les spectres de ces deux opérateurs sont bien connues, citons par exemple l'inégalité suivante due à O. Hijazi ([Hi86]) sur laquelle nous reviendront :

$$\lambda_1(M,\chi,g) \geq \frac{n}{4(n-1)}\lambda_1(M,\mathrm{L}_g). \tag{3.5}$$

Cette inégalité n'est significative que si $\lambda_1(M,\mathrm{L}_g)$ est strictement positif.

3.2. Minoration conforme du spectre

Le comportement du spectre de ces deux opérateurs contraste avec le cas du laplacien usuel. Le premier résultat obtenu est qu'on ne peut pas faire tendre les valeurs propres vers zéro dans une classe conforme :

Théorème 3.6. *Soit (M,χ) une variété spinorielle compacte et C une classe conforme de métrique sur M. Alors*

$$\inf_{g\in C} \lambda^+(M,\chi,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} > 0.$$

Ce théorème à été démontré par J. Lott ([Lo86]) dans le cas ou l'opérateur de Dirac est inversible, et dans le cas général par B. Ammann ([Am03b]). Les deux auteurs remarquent que la démonstration est valable pour n'importe quel opérateur elliptique autoadjoint conformément covariant de degré strictement inférieur à n, et quel que soit le signe des valeurs propres. On peut donc remplacer $\lambda^+(M,\chi,g)$ par $\lambda^+(M,\mathrm{L}_g)$ ou $|\lambda^-(M,\mathrm{L}_g)|$ dans le théorème 3.6.

Dans [Am03a], B. Ammann étudie l'existence de métriques réalisant la borne inférieure du théorème 3.6. Dans le cas où cette borne est plus petite que celle de la sphère canonique (cette condition est étudiée plus en détail dans [AHM06], elle est en particulier vérifiée par $M = \mathbb{R}P^{4k+3}$), il montre qu'elle est atteinte en élargissant la classe conforme C à des métriques dégénérées de la forme h^2g où g est une métrique de C et h une fonction $C^{2,\alpha}$ qui peut s'annuler.

Dans le cas où l'invariant de Yamabe, défini par

$$Y(M,C) = \inf_{g\in C} \frac{\int_M \mathrm{scal}_g\,\mathrm{d}v_g}{\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{3.7}$$

est strictement positif, ce qui est une restriction topologique et géométrique assez importante, on a aussi l'identité classique pour $n \geq 3$

$$\inf_{g\in C} \lambda_1(M,\mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = Y(M,C), \tag{3.8}$$

qui nous dit que $\lambda^+(M,\mathrm{L}_g) = \lambda_1(M,\mathrm{L}_g)$ en donnant au passage une minoration optimale de $\lambda^+(M,\mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$, et qui fournit aussi en conjonction avec l'inégalité de Hijazi (3.5) une minoration explicite de $\lambda_1(M,\chi,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ pour $n \geq 3$. C. Bär a étendu dans [Bä92] cette inégalité à la dimension 2 :

$$\lambda_1(S^2,\chi,g)\,\mathrm{Vol}(S^2,\chi,g) \geq 4\pi. \tag{3.9}$$

Pour les surfaces de genre supérieur ou égal à 1, l'invariant de Yamabe est négatif ou nul, et donc l'inégalité est triviale.

Signalons aussi que dans [AH06b], B. Ammann et É. Humbert étudient l'existence de métriques minimisant $\lambda_2(M,\mathrm{L}_g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$.

3.3. Les invariants σ et τ

On a vu que la majoration de la première valeur propre du laplacien dans une classe conforme permettait de définir un invariant différentiel par un min-max. On peut définir des invariants similaires à l'aide de l'opérateur de Dirac et du laplacien conforme et d'un max-min.

Un invariant de ce type a déjà été défini à l'aide de l'invariant de Yamabe. Cet invariant, introduit indépendamment par O. Kobayashi [Ko87] et R. Schoen [Sc87], est noté $\sigma(M)$ et appelé invariant de Schoen ou invariant de Yamabe différentiel :

$$\sigma(M) = \sup_g Y(M,[g]), \tag{3.10}$$

Comme pour toute classe conforme C on a $Y(M,C) \leq n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$ cette borne supérieure est finie, et $\sigma(M) \leq n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}$. Dans le cas ou $\sigma(M)$ est strictement positif, l'égalité (3.8) nous dit que c'est l'invariant annoncé pour le laplacien conforme :

$$\sigma(M) = \sup_g \inf_{\tilde{g}\in[g]} \lambda_1(M,\mathrm{L}_{\tilde{g}})\,\mathrm{Vol}(M,\tilde{g})^{\frac{2}{n}}. \tag{3.11}$$

Remarque 3.12. L'invariant qu'on pourrait définir de la même manière avec $\lambda^+(M,\mathrm{L}_g)$ semble moins pertinent (et plus difficile à étudier) car le nombre de valeurs propres négatives ou nulles de L dépend de la classe conforme.

L'invariant σ a été plus étudié que l'invariant ν de Friedlander-Nadirashvili vu au paragraphe 2.3 en raison de ses liens avec le problème de Yamabe, l'existence de métriques de courbure scalaire positive et la recherche de métriques d'Einstein (voir par exemple [Sc89]). Un certain nombre de travaux récents portent sur l'évolution de $\sigma(M)$ quand on procède à des chirurgies sur M (voir notamment [Pe98], [Pe00] et [PY99]). Je ne présenterai pas ici l'ensemble des résultats obtenus, je me contenterai de rappeler quelques valeurs exactes connues de l'invariant σ.

En dimension quelconque, on sait calculer l'invariant σ sur les variétés suivantes (voir [Ko87] et [Sc89]) :

$$\sigma(S^n) = \sigma(\#i(S^{n-1} \times S^1)) = n(n-1)\omega_n^{\frac{2}{n}}, \text{ et } \sigma(T^n \# N) = 0$$

pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$ et toute variété N telle que $\sigma(N) \geq 0$.

Une attention particulière a été portée aux variétés de dimension 3 : pour tous entiers i, j, k et l tels que $i+j \geq 1$, on a

$$\sigma(\#i(\mathbb{R}P^3)\#j(\mathbb{R}P^2 \times S^1)\#k(S^2 \times S^1)\#l(S^2 \ltimes S^1)) = 6\pi^{\frac{2}{3}} = \frac{\sigma(S^3)}{2^{\frac{2}{3}}},$$

où $S^2 \ltimes S^1$ désigne le fibré non orientable en cercle sur S^2 (voir [AN07] et les références qui y sont données). L'exemple de $\mathbb{R}P^3$, calculé par H. L. Bray et A. Neves dans [BN04], vient conforter la conjecture selon laquelle pour les quotients de la sphères, on a $\sigma(\Gamma \backslash S^n) = n(n-1)\left(\omega_n/|\Gamma|\right)^{\frac{2}{n}}$.

Dans [AH06a], B. Ammann et É. Humbert définissent l'invariant correspondant pour l'opérateur de Dirac

$$\tau(M,\chi) = \sup_g \inf_{\tilde{g}\in[g]} \sqrt{\lambda_1(M,\chi,\tilde{g})}\,\mathrm{Vol}(M,\tilde{g})^{\frac{1}{n}}, \tag{3.13}$$

l'une des motivations étant que que l'inégalité de Hijazi le lie à l'invariant de Schoen :

$$\tau(M,\chi)^2 \geq \frac{n}{4(n-1)}\sigma(M). \tag{3.14}$$

Dans ce cas aussi le nombre de valeurs propres nulles peut varier avec la classe conforme, c'est la raison pour laquelle on considère $\lambda_1(M,\chi,\tilde{g})$ et pas $\lambda^+(M,\chi,\tilde{g})$.

On a la majoration $\tau(M,\chi) \leq \tau(S^n,\chi) = \frac{n}{2}\omega_n^{\frac{1}{n}}$ (voir [Am03b], [AGHM] et [AHM04]) et on connaît la valeur de τ sur quelques variétés : dans [AH06a], B. Ammann et É. Humbert déduisent de (3.14) que

$$\tau(S^{n-1}\times S^1,\chi) = \frac{n}{2}\omega_n^{\frac{1}{n}} = \tau(S^n,\chi), \tag{3.15}$$

et montrent que $\tau(T^2,\chi) = 0$ ou $2\sqrt{\pi}$ selon la structure spinorielle χ. Dans [AH], ils étendent ce dernier résultat aux autres surfaces orientables compactes et montrent en toute dimension que $\tau(M,\chi)$ croit par adjonction d'anses.

3.4. Grandes valeurs propres

Les valeurs propres non nulles de l'opérateur de Dirac et du laplacien conforme ne sont pas bornées sur une classe conforme comme celle du laplacien usuel :

Théorème 3.16 ([AJ07]). *Soit M une variété compacte de dimension n et C une classe conforme de métrique sur M. Si $n \geq 3$, alors*

$$\sup_{g\in C} \lambda^+(M, \mathrm{L}_g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = +\infty,$$

et

$$\inf_{g\in C} \lambda^-(M, \mathrm{L}_g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = -\infty.$$

Si $n \geq 2$ et que M est munie d'une structure spinorielle χ, alors

$$\sup_{g\in C} \lambda^+(M, \chi, g) \operatorname{Vol}(M, g)^{\frac{2}{n}} = +\infty.$$

La démonstration de ce théorème utilise des métriques, baptisées « métriques Pinocchio » dans [AB00], qui sont telles qu'un domaine de la variété soit presque isométrique à la réunion d'un cylindre arbitrairement long et d'une demi-sphère collée à l'une de ses extrémité (le « nez » de la métrique). Pour l'opérateur de Dirac et en dimension $n \geq 3$ on utilise la formule de Schrödinger-Lichnerovicz

$$\mathrm{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\mathrm{scal}_g \tag{3.17}$$

et le fait que la courbure scalaire est minorée sur le nez pour contrôler la première valeur propre. Le laplacien conforme vérifie par définition une relation semblable à (3.17), ce qui permet d'adapter facilement la démonstration à cet opérateur. Le cas de la dimension 2 est plus technique car la courbure d'un cylindre est alors nulle, mais on peut s'aider du fait que toute métrique est localement conformément plate.

4. Laplacien de Hodge-de Rham

4.1. Définitions et notations

Le laplacien de Hodge-de Rham agit sur l'espace $\Omega(M)$ des formes différentielles de la variété (M, g), et est défini par

$$\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d},$$

où δ désigne la codifférentielle. Son spectre en restriction aux formes de degré p sera noté

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \ldots \tag{4.1}$$

où les valeurs propres non nulles sont répétées s'il y a multiplicité. La multiplicité de la valeur propre nulle, si elle existe, est un invariant topologique : c'est le nombre de Betti $b_p(M)$.

L'espace des p-formes coexactes est stable par le laplacien, et on notera

$$0 < \mu_{p,1}(M,g) \leq \mu_{p,2}(M,g) \leq \dots \qquad (4.2)$$

le spectre du laplacien restreint à cet espace. La théorie de Hodge nous dit que le spectre $(\lambda_{p,i}(M,g))_{i\geq 1}$ est la réunion de $(\mu_{p,i}(M,g))_i$ et $(\mu_{p-1,i}(M,g))_i$. On a de plus $\lambda_{p,i}(M,g) = \lambda_{n-p,i}(M,g)$ et donc $\mu_{p,i}(M,g) = \mu_{n-p-1,i}(M,g)$ car on considère des variétés sans bord. Par conséquent, le spectre complet du laplacien se déduit des $\mu_{p,i}(M,g)$ pour $p \leq \frac{n-1}{2}$, et on se restreindra souvent dans la suite à l'étude de ces valeurs propres. Rappelons aussi que $(\lambda_{p,0}(M,g))$ est le spectre du laplacien agissant sur les fonctions, et qu'il est aussi égal à $(\mu_{p,0}(M,g))$ si on excepte la valeur propre nulle.

Le laplacien de Hodge-de Rham n'est pas conformément covariant, mais il possède une autre propriété très utile pour étudier les extrema conformes du spectre, à savoir qu'on peut comparer les spectres de deux métriques dont on connaît le rapport de quasi-isométrie :

Proposition 4.3 ([Do82]). *Soit g et $\tilde{g}$ deux métriques riemanniennes sur une variété compacte M de dimension n, et τ une constante strictement positive. Si les deux métriques vérifient $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, alors*

$$\frac{1}{\tau^{3n-1}}\lambda_{p,k}(M,g) \leq \lambda_{p,k}(M,\tilde{g}) \leq \tau^{3n-1}\lambda_{p,k}(M,g),$$

pour tout entiers $k \geq 0$ et $p \in [0,n]$.

Si deux métriques vérifient $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$, on a aussi $\frac{1}{\tau}h^2 g \leq h^2\tilde{g} \leq \tau h^2 g$ pour toute fonction h strictement positive. Par conséquent, pour montrer qu'on peut faire tendre une valeur propre vers 0 ou $+\infty$ dans une classe conforme, il suffit de le montrer pour la classe conforme d'une métrique g bien choisie, le résultat se transposant automatiquement à n'importe quelle autre classe conforme.

Remarque 4.4. Outre la continuité du spectre pour la topologie C^0, la proposition 4.3 implique que la dimension du noyau du laplacien ne dépend pas de la métrique. On ne peut donc pas espérer un tel résultat pour l'opérateur de Dirac.

4.2. Prescription du spectre

Le comportement du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans une classe conforme est en partie analogue à celui de l'opérateur de Dirac, mais on va voir que pour certains degrés toute rigidité disparaît et qu'on peut prescrire arbitrairement le début spectre.

Le premier résultat qui a été obtenu est que, comme pour l'opérateur de Dirac, on peut rendre les valeurs propres arbitrairement grande :

Théorème 4.5 ([CES06]). *Si M est une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$ et C une classe conforme sur M, alors*

$$\sup_{g\in C} \inf_{1\leq p\leq \frac{n}{2}} \mu_{p,1}(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = +\infty. \tag{4.6}$$

Remarque 4.7. Ce théorème est énoncé dans [CES06] pour les variétés de dimension $n \geq 4$, mais la démonstration s'applique parfaitement aux 1-formes coexactes en dimension 3.

Les métriques utilisée par B. Colbois et A. El Soufi pour démontrer le théorème 4.5 sont des « métriques Pinocchio », comme dans le cas de l'opérateur de Dirac, mais les outils d'analyse sont différents : on utilise le lemme de McGowan (voir [Mc93], lemme 2.3), qui permet de minorer le spectre de la variété en fonction des spectres d'une famille de domaines qui recouvre M. Le théorème 4.5 n'est bien sûr pas valable pour $p = 0$ comme on l'a déjà vu.

Ce résultat appelle naturellement la question de savoir si l'existence de petites valeurs propres dans une classe conforme pour spectre des fonctions se généralise aux formes :

Question 4.8 ([Co04]). *Étant donnés $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ et $k \geq 1$, a-t-on*

$$\inf_{g\in C} \mu_{p,k}(M,g)\operatorname{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} = 0\ ? \tag{4.9}$$

Dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham, cette question a une résonance particulière. En effet, le noyau du laplacien étant canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham, chercher les petites valeurs propres du laplacien revient à déterminer quelles déformations de la métrique tendent à « créer » de la cohomologie. Ce problème a pour l'instant été étudié dans deux situations géométriques particulières : les limites adiabatiques associées aux feuilletages riemanniens (voir par exemple [ALK00] et les références qui y sont données) et les effondrement à courbure bornée (voir [Ja05] pour une présentation synthétique des résultats à ce sujet). Ces deux situations se recoupent partiellement — sans que l'on puisse réduire l'une à l'autre —, mais sont très différentes des déformations à volume et classe conforme fixée. Une déformation conforme est ponctuellement isotrope mais globalement inhomogène, alors que les limites adiabatiques sont des déformations homogènes et anisotropes (en tout point, on décompose l'espace tangent en la somme $T_xM = H \oplus V$ de deux espaces muni chacun d'une métrique g_H et g_V, et on considère la famille de métrique $g_\varepsilon = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$ avec $\varepsilon \to 0$), et que les effondrements à courbure bornée permettent, sous certaines conditions topologiques, une anisotropie encore plus grande.

J'ai apporté une première partie de la réponse à la question 4.8 dans [Jab] en montrant que pour presque tous les degrés, on peut faire tendre un nombre arbitraire de valeur propres vers zéro :

Théorème 4.10. *Soit M une variété compacte sans bord de dimension $n \geq 5$, k l'entier tel que $n = 2k+3$ ou $n = 2k+4$ et C une classe conforme sur M. Pour tout réel $V > 0$ et toute suite d'entiers positifs ou nuls $N_1, N_2, \ldots, N_k$, il existe une famille de métriques $(g_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ contenue dans C et une constante $c > 0$ telles que $\mu_{p,N_p}(M, g_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\mu_{p,N_p+1}(M, g_\varepsilon) > c$ pour tout $1 \leq p \leq k$, $\mu_{k+1,1}(M, g_\varepsilon) > c$ et $\mathrm{Vol}(M, g_\varepsilon) = V$.*

On peut donc prescrire le nombre de petite valeurs propres pour les formes coexactes. Les degrés $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} - 1$ si n est pair, et le degré $[\frac{n}{2}]$ si n est impair font exception, on verra au paragraphe 4.4 qu'on ne peut pas faire tendre les valeurs propres vers zéro dans ces cas.

La construction géométrique intervenant dans la démonstration du théorème 4.10 consiste à écraser la métrique en dehors du voisinage tubulaire d'une ou plusieurs sous-variétés, les formes harmoniques de ces sous-variétés peuvent alors s'étendre en des formes test ayant un petit quotient de Rayleigh. La difficulté est alors de contrôler précisément le nombre de petites valeurs propres. Cette technique échoue pour les degrés proches de $\frac{n}{2}$ car la norme L^2 des formes devient alors conformément invariante ou presque invariante.

L'existence de de grandes et de petites valeurs propres à volume fixé pour le laplacien de Hodge-de Rham a permis à P. Guérini de montrer dans [Gu04] qu'on pouvait prescrire le volume et le début du spectre sur une variété compacte quelconque, généralisant ainsi aux formes différentielles les résultats obtenus par Y. Colin de Verdière et J. Lohkamp pour les fonctions. Les théorèmes 4.5 et 4.10 permettent de prescrire simultanément le volume, le début du spectre et la classe conforme :

Théorème 4.11 ([Jab]). *Soit M une variété compacte, connexe, orientable et sans bord de dimension $n = 2k + 3$ ou $2k + 4$ où $k \in \mathbb{N}^*$, C une classe conforme de métriques riemanniennes sur M, V un réel strictement positif et $N \geq 1$ un entier. On se donne pour tout entier $p \in \{1, \ldots, k\}$ une suite de réels $0 < \nu_{p,1} < \nu_{p,2} < \ldots < \nu_{p,N}$.*

Il existe une métrique $g \in C$ telle que
- *$\mu_{p,i}(M, g) = \nu_{p,i}$ pour tout $i \leq N$ et $p \in \{1, \ldots, k\}$;*
- *$\mu_{k+1,1}(M, g) > \sup_{p,i}\{\nu_{p,i}\}$;*
- *$\mathrm{Vol}(M, g) = V$.*

Remarque 4.12. La minoration $\mu_{k+1,1}(M, g) > \sup_{p,i}\{\nu_{p,i}\}$ assure qu'on a l'égalité $\lambda_{k+1,i}(M, g) = \mu_{k,i}(M, g)$ pour $i \leq N$. On peut donc prescrire les N premières valeurs propres des $(k + 1)$-formes, les formes propres correspondantes étant alors exactes, de valeurs propres égales à $(\mu_{k,i}(M, g))_{i=1}^N$. Si n est impair, on prescrit ainsi le spectre en tout degré $2 \leq p \leq n - 2$. En dimension paire, le degré $p = n/2 = k + 2$ fait exception. En degré 1 et $n - 1$ on ne prescrit pas arbitrairement le début du spectre car on ne contrôle pas les $\mu_{0,i}(M, g)$, mais on peut assurer que les valeurs $\nu_{1,1}, \ldots, \nu_{1,N}$ sont contenues dans $(\lambda_{1,i}(M, g))_{i\geq1}$ et $(\lambda_{n-1,i}(M, g))_{i\geq1}$.

Le théorème 4.11 contraste avec la rigidité apparaissant dans les cas du laplacien agissant sur les fonctions et de l'opérateur de Dirac. Dans le cas du laplacien de Hodge-de Rham il reste une certaine souplesse, mais de justesse puisque certains degrés font exception.

On peut se demander si la prescription du spectre en degré $n/2$ serait possible si on supprimait la contrainte sur le volume de la variété, ou, de manière équivalente, si on peut faire tendre une unique valeur propre vers zéro sans fixer le volume. Ce problème reste à éclaircir (voir question 4.25).

4.3. Inégalités de Sobolev pour les formes différentielles

Pour achever de répondre à la question 4.8 nous aurons à faire appel à des inégalités de Sobolev pour les formes différentielles, dont certaines constantes s'avèrent être des invariants conformes, et que nous allons rappeler ici. Elles reposent essentiellement sur le fait que la différentielle extérieure définit un complexe elliptique sur l'espaces des formes différentielles. Les ouvrages consacrés aux opérateurs (pseudo)différentiels et aux inégalités elliptiques développent rarement le cas des opérateurs agissant sur les sections d'un fibré vectoriel ; on peut toutefois se référer au chapitre 6 de [Mo66], et une définition précise d'un complexe elliptique est donnée dans [Ra05] (chapitre 9) et dans [Ag94].

On se donne une variété riemannienne compacte (M^n, g), et deux réels $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$. L'inégalité de Sobolev classique sur les fonctions assure l'existence de deux constantes $A, B > 0$ telles que pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$,

$$\|f\|_{L^r} \leq A\|\mathrm{d}f\|_{L^s} + B\|f\|_{L^1}. \tag{4.13}$$

Cette inégalité se généralise aux formes différentielles en faisant intervenir la codifférentielle :

Théorème 4.14. *Il existe trois constantes $A, B, C > 0$ dépendant de g, r et s telles que pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega(M)$, on a*

$$\|\omega\|_r \leq A\|\mathrm{d}\omega\|_s + B\|\delta\omega\|_s + C\|\omega\|_1. \tag{4.15}$$

Le théorème 4.14 est un corollaire immédiat de l'inégalité elliptique associée à l'opérateur $(\mathrm{d} + \delta)$ et de la continuité de l'injection de Sobolev.

Nous aurons en fait besoin d'une inégalité prenant une forme différente :

Théorème 4.16. *Soit (M, g) une variété compacte de dimension n, et deux réels $r, s > 1$ tels que $\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{n}$. Il existe une constante $c(M, g, r, s) > 0$ telle que pour toute p-forme $\omega \in \Omega^p(M, g)$, on a*

$$\inf_{\mathrm{d}\varphi=0} \|\omega - \varphi\|_r \leq c\|\mathrm{d}\omega\|_s. \tag{4.17}$$

On peut démontrer ce théorème en utilisant le fait qu'en restriction à l'orthogonal des formes harmoniques le dernier terme de l'inégalité (4.15) est superflu (quitte à modifier les constantes A et B), et en appliquant cette inégalité à la projection orthogonale de ω sur les formes coexactes. On trouve aussi dans l'appendice de [GT06] une démonstration détaillée du théorème 4.16 se basant sur l'inégalité elliptique du laplacien de Hodge-de Rham.

L'inégalité du théorème 4.16 nous intéressera pour une particularité apparaissant quand on fixe le degré p et qu'on pose $r = \frac{n}{p}$ et $s = \frac{n}{p+1}$. En effet, les normes $\|\omega - \varphi\|_r$ et $\|\mathrm{d}\omega\|_s$ sont alors conformément invariantes, et par conséquent la constante optimale dans l'inégalité (4.17) en restriction aux p-formes est un invariant conforme, qu'on notera

$$K_p(M,[g]) = \sup_{\omega \in \Omega^p(M)} \inf_{\mathrm{d}\varphi = 0} \frac{\|\omega - \varphi\|_{\frac{n}{p}}}{\|\mathrm{d}\omega\|_{\frac{n}{p+1}}}, \tag{4.18}$$

Remarque 4.19. On ne connaît actuellement aucune estimée de la constante K_p.

4.4. Minoration du spectre

Sur les variétés de dimension $n \geq 3$, la constante de Sobolev K_p que nous avons défini au paragraphe précédent permet de minorer le spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans les cas qui ne sont pas couverts par le théorème 4.10 :

Théorème 4.20 ([Ja07]). *Soit M^n une variété compacte de dimension $n \geq 3$, C une classe conforme de métriques sur M. Pour toute métrique $g \in C$, on a*

$$\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}} \geq K_{[\frac{n}{2}]}(M,C)^{-2}.$$

Si n est pair, cette inégalité est optimale.

Remarque 4.21. Quand n est pair, on a $\mu_{\frac{n}{2}-1,i}(M,g) = \mu_{\frac{n}{2},i}(M,g)$. Les théorèmes 4.10 et 4.20 répondent donc complètement à la question 4.8.

Remarque 4.22. Une conséquence du théorème 4.20 est que, paradoxalement, les déformations de la métriques qui apparaissent dans la démonstration du théorème 4.10 et qui tendent à créer de l'homologie ne produisent pas de petites valeurs propres en degré médian.

Remarque 4.23. On peut facilement trouver des variétés qui s'effondrent en faisant tendre $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}$ vers zéro. On ne peut donc pas donner de majoration uniforme de $K_{[\frac{n}{2}]}(M,C)$ en fonction de bornes sur le diamètre et la courbure de la variété pour une métrique $g \in C$.

Remarque 4.24. Une conséquence assez inattendue du théorème 4.20 est la construction, pour tout $n \geq 4$ et tout $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ de variétés M de dimension n telles que la multiplicité de $\mu_{p,1}(M,g)$ soit arbitrairement grande (voir [Ja06]).

On peut se demander s'il existe d'autres rigidités, par exemple :

Question 4.25. *Le rapport* $\mu_{[\frac{n}{2}],k+1}(M,g)/\mu_{[\frac{n}{2}],k}(M,g)$ *est-t-il borné sur une classe conforme ?*

Comme pour les fonctions, on peut définir un spectre conforme pour les formes différentielles par

$$\mu_k^c(M,C) = \inf_{g\in C} \mu_{[\frac{n}{2}],k}(M,g)\,\mathrm{Vol}(M,g)^{\frac{2}{n}}. \tag{4.26}$$

Le théorème 4.20 donne la valeur de la première valeur propre conforme en fonction de la constante K_p en dimension paire, et une minoration en dimension impaire. On peut aussi donner une majoration du spectre conforme en fonction de celui de la sphère :

Théorème 4.27 ([Ja07]). *Pour toute classe conforme C sur la variété compacte M et tout $k \geq 1$, on a*

$$\mu_k^c(M,C) \leq \mu_k^c(S^n, C_{\mathrm{can}}) \leq k^{\frac{2}{n}} \mu_1^c(S^n, C_{\mathrm{can}}),$$

où C_{can} est la classe conforme de la métrique canonique de la sphère.

Un problème naturel est de déterminer si la borne inférieure $\mu_k^c(M,C)$ est atteinte par une métrique régulière, en particulier si $k=1$. Dans [Ja07], on établit le critère suivant :

Théorème 4.28. *Soit g une métrique lisse de volume 1 sur M telle que l'on ait $\mu_{[\frac{n}{2}],1}(M,g) = \mu_1^c(M,[g])$. Si $n = 3$ mod 4, alors il existe une $\left[\frac{n}{2}\right]$-forme propre coexacte non nulle de valeur propre $\mu_1^c(M,[g])$ et de longueur constante. Si n est pair, toutes les formes propres coexacte de degré $\frac{n}{2}-1$ et de valeur propre $\mu_1^c(M,[g])$ sont de longueur constante.*

Remarque 4.29. Sur les sphères munies de leur métrique canonique, les premières formes propres ne sont pas de longueur constantes (voir l'appendice de [GM75]). Contre toute attente, la métrique canonique de la sphère n'est donc pas extrémale pour la première valeur propre ! Le théorème 4.28 laisse présager que les métriques extrémales pour les formes différentielles sont en général assez différentes de celles des fonctions.

En dimension 4, on peut déduire du théorème 4.28 une condition nécessaire sur la topologie pour l'existence de métriques extrémales lisses :

Corollaire 4.30. *Si M est une variété compacte de dimension 4 et de caractéristique d'Euler non nulle, il n'existe pas de métrique régulière g de volume 1 telle que $\mu_{1,1}(M,g) = \mu_1^c(M,[g])$.*

Dans le cas des fonctions on connaît des conditions nécessaires sur les métriques extrémales (cf. [ESI03]), mais pas d'obstruction topologique comme celle du corollaire 4.30.

On ne connaît finalement aucun exemple de métrique extrémale pour ce problème, ni même de valeur explicite de $\mu_1^c(M,[g])$. Il existe toutefois des candidats sérieux, comme certaines variétés effondrées ayant une petite valeur propre dont la forme propre est de longueur constante, en particulier dans les situations topologiques les plus simples, par exemple :

- les fibrés en cercles sur les surfaces munies d'une métrique effondrée adaptée (au sens de [CC00], définition 2.1) ;
- les sphères munies d'une métrique de Berger ;
- les fibrés en tores sur le cercle munis d'une métrique homogène effondrée produisant une petite valeur propre (voir [Ja03]).

On peut utiliser le spectre conforme des formes différentielles pour définir des invariants différentiels de la variété comme on l'a vu pour les autres opérateurs, en posant

$$\mu_k(M) = \sup_g \mu_k^c(M,[g]). \tag{4.31}$$

Le théorème 4.27 assure que cette borne supérieure est finie. On ne connaît cependant la valeur de ces invariants sur aucune variété, deux raisons en étant que $\mu_k(M)$ n'est pas défini en dimension 2, contrairement à ce qui se passe pour le laplacien sur les fonctions ou l'opérateur de Dirac, et que le laplacien de Hodge-de Rham n'est pas conformément covariant. Même sur les sphères, on peut seulement affirmer que $\mu_k(S^n) = \mu_k^c(S^n, C_{\text{can}})$ sans en expliciter la valeur (voir le théorème 4.28 et la remarque 4.29 ci-dessus). La question de la trivialité des ces invariants reste ouverte.

Références

[AB00] B. Ammann et C. Bär – « Dirac eigenvalues and total scalar curvature », *J. Geom. Phys.*, 33, p. 229–234, 2000, math.DG/9909061.

[Ag94] M. S. Agranovich – « Elliptic operators on closed manifolds », Dans *Partial Differential Equations VI, elliptic and parabolic operators*, volume 63 de *Encycl. Math. Sci.*, Springer Verlag, 1994.

[Ag06] I. Agol – « Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups », Dans *Proceedings of the international congress of mathematicians*, volume 2, pages 951–960, EMS, 2006, math.DG/0512560.

[AGHM] B. Ammann, J. F. Grosjean, É. Humbert et B. Morel – « A spinorial analogue of Aubin's inequality », *Math. Z.*, math.DG/0308107, à paraître.

[AH] B. Ammann et É. Humbert – « The spinorial τ-invariant and 0-dimensional surgery », *J. Reine Angew. Math.*, math.DG/0607716, à paraître.

[AH06a] B. Ammann et É. Humbert – « The first conformal Dirac eigenvalue on 2-dimensional tori », *J. Geom. Phys.*, 56 (4), p. 623–642, 2006, math.DG/0412409.

[AH06b] B. Ammann et É. Humbert – « The second Yamabe invariant », *J. Funct. Anal.*, 235 (2), p. 377–412, 2006, math.DG/0502094.

[AHM04] B. Ammann, É. Humbert et B. Morel – « Un problème de type Yamabe sur les variétés spinorielles compactes », *C. R. Acad. Sci. Paris*, 338 (12), p. 929–934, 2004.

[AHM06] B. Ammann, É. Humbert et B. Morel – « Mass endomorphism and spinorial yamabe type problems on conformally flat manifolds », *Comm. Anal. Geom.*, 14 (1), p. 163–182, 2006.

[AJ07] B. Ammann et P. Jammes – « The supremum of conformally covariant eigenvalues in a conformal class », prépublication, 2007, arXiv :0708.0529.

[ALK00] J. A. Álvarez López et Y. A. Kordyukov – « Adiabatic limits and spectral sequences for riemannian foliations », *Geom. Funct. Anal.*, 10 (5), p. 977–1027, 2000, math.DG/9902147.

[Am03a] B. Ammann – « The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions », prépublication, 2003, math.DG/0309061.

[Am03b] B. Ammann – « A spin-conformal lower bound of the first positive Dirac eigenvalue », *Differ. Geom. Appl.*, 18 (1), p. 21–32, 2003.

[AN07] K. Akutagawa et A. Neves – « Classification of all 3-manifolds with Yamabe invariant greater than that of $\mathbb{R}P^3$ », *J. Differential Geom.*, 75 (3), p. 359–386, 2007, math.DG/0502122.

[Be78] A. L. Besse – *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer Verlag, 1978.

[BN04] H. L. Bray et A. Neves – « Classification of prime 3-manifolds with σ-invariant greater than $\mathbb{R}P^3$ », *Ann. Math.*, 159 (1), p. 407–424, 2004.

[Bä92] C. Bär – « Lower eigenvalue estimates for Dirac operators », *Math. Ann.*, 293 (1), p. 39–46, 1992.

[CC00] B. Colbois et G. Courtois – « Petites valeurs propres des p-formes différentielles et classe d'Euler des S^1-fibrés », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 33 (5), p. 611–645, 2000.

[CD94] B. Colbois et J. Dodziuk – « Riemannian metrics with large λ_1 », *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122 (3), p. 905–906, 1994.

[CES03] B. Colbois et A. El Soufi – « Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics : the "conformal spectrum" », *Ann. Global Anal. Geom.*, 23 (4), p. 337–349, 2003, math.DG/0409316.

[CES06] B. Colbois et A. El Soufi – « Eigenvalues of the laplacian acting on p-forms and metric conformal deformations », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 134 (3), p. 715–721, 2006, math.DG/0409242.

[Co04] B. Colbois – « Spectre conforme et métriques extrémales », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 22, p. 93–101, 2004.

[Do82] J. Dodziuk – « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.

[ESGJ07] A. El Soufi, H. Giacomini et M. Jazar – « A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle », *Duke Math. J.*, 135 (1), p. 181–202, 2007, math.DG/0506585.

[ESI86] A. El Soufi et S. Ilias – « Immersions minimales, première valeur propre du laplacien et volume conforme », *Math. Ann.*, 275 (2), p. 257–267, 1986.

[ESI92] A. El Soufi et S. Ilias – « Majoration de la seconde valeur propre d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte et applications », *J. Funct. Anal.*, 103 (2), p. 294–316, 1992.

[ESI00] A. El Soufi et S. Ilias – « Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions », *Pac. J. Math.*, 195 (1), p. 91–99, 2000.

[ESI03] A. El Soufi et S. Ilias – « Extremal metrics for the first eigenvalue of the Laplacian in a conformal class », *Proc. Am. Math. Soc.*, 131 (5), p. 1611–1618, 2003.

[FN99] L. Friedlander et N. Nadirashvili – « A differential invariant related to the first eigenvalue of the Laplacian », *Internat. Math. Res. Notices*, 17, p. 939–952, 1999.

[Gi] A. Girouard – « Fundamental tone, concentration of density to points and conformal degeneration on surfaces », *Canad. J. Math.*, math.SP/0510279, à paraître.

[GM75] S. Gallot et D. Meyer – « Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne », *J. Math. Pur. Appl.*, 54, p. 259–284, 1975.

[GT06] V. Gold'shtein et M. Troyanov – « Sobolev inequalities for differential forms ans $L_{q,p}$-cohomology », *J. Geom. Anal.*, 16 (4), p. 597–632, 2006, math.DG/0506065.

[Gu04] P. Guérini – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 37 (2), p. 270–303, 2004.

[Hi86] O. Hijazi – « A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors », *Commun. Math. Phys.*, 104 (1), p. 151–162, 1986.

[Hi01] O. Hijazi – « Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures », Dans *Geometric methods for quantum field theory*, pages 116–169, World Scientific, 2001.

[Jaa] P. Jammes – « Première valeur propre du laplacien, volume conforme et chirurgies », *Geom. Dedicata*, arXiv :0801.2638, à paraître.

[Jab] P. Jammes – « Prescription du spectre du laplacien de Hodge-de Rham dans un classe conforme », *Comment. Math. Helv.*, math.DG/0601738, à paraître.

[Ja03] P. Jammes – « Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent », *Manuscripta Math.*, 110 (1), p. 13–31, 2003.

[Ja05] P. Jammes – « Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles », *Sémin. théor. spectr. géom.*, 23, p. 115–124, 2005.

[Ja06] P. Jammes – « Construction de valeurs propres doubles du laplacien de Hodge-de Rham », prépublication, 2006, math.DG/0608758.

[Ja07] P. Jammes – « Minoration conforme du spectre du laplacien de Hodge-de Rham », *Manuscripta Math.*, 123 (1), p. 15–23, 2007, math.DG/0604591.

[Ko87] O. Kobayashi – « Scalar curvature of a metric with unit volume », *Math. Ann.*, 279, p. 253–265, 1987.

[Ko93] N. Korevaar – « Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics », *J. differ. geom.*, 37 (1), p. 73–93, 1993.

[Lo86] J. Lott – « Eigenvalue bounds for the Dirac operator », *Pacific J. of Math.*, 125 (1), p. 117–126, 1986.

[LY82] P. Li et S.T. Yau – « A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. », *Invent. Math.*, 69 (2), p. 269–291, 1982.

[Mc93] J. McGowan – « The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds », *Math. Ann.*, 297 (4), p. 725–745, 1993.

[Mo66] C. Morrey – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer Verlag, 1966.

[MOU84] H. Muto, Y. Ohnita et H. Urakawa – « Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit spheres and the first eigenvalues of their Laplacian », *Tôhoku Math. J.*, 36, p. 253–267, 1984.

[Na96] N. Nadirashvili – « Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces », *Geom. Funct. Anal.*, 6 (5), p. 877–897, 1996.

[Na02] N. Nadirashvili – « Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere », *J. Differential. Geom.*, 61 (2), p. 335–340, 2002.

[Pe98] J. Petean – « Computations of the Yamabe invariant », *Math. Res. Lett.*, 5 (6), p. 703–709, 1998, math.DG/9808053.

[Pe00] J. Petean – « The Yamabe invariant of simply connected manifolds », *J. Reine Angew. Math.*, 523, p. 225–231, 2000, math.DG/9808062.

[PY99] J. Petean et G. Yun – « Surgery and the Yamabe invariant », *Geom. Funct. Anal.*, 9 (6), p. 1189–1199, 1999, math.DG/9808052.

[Ra05] S. Ramanan – *Global calculus*, volume 65 de *Graduate Studies in Mathematics*, AMS, 2005.

[Sc87] R. Schoen – « Recent progress in geometric partial differential equations », Dans *Proc. Int. Congr. Math. (Berkeley/Calif. 1986)*, pages 121–130, AMS, 1987.

[Sc89] R. Schoen – « Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related », Dans *Topics in calculus of variations*, volume 1365 de *Lect. Notes Math.*, pages 120–154, Springer Verlag, 1989.

[Ta66] T. Takahashi – « Minimal immersions of Riemannian manifolds », *J. Math. Soc. Japan*, 18, p. 380–385, 1966.

Pierre Jammes
Université d'Avignon et des pays de Vaucluse
Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie (EA 2151)
33 rue Louis Pasteur
F-84000 Avignon
`Pierre.Jammes@univ-avignon.fr`