Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles

Pierre Jammes

RÉSUMÉ.— À courbure et diamètre bornés, les valeurs propres non nulles du laplacien de Hodge-de Rham agissant sur les formes différentielles d'une variété compacte ne sont pas uniformément minorées comme c'est le cas pour les fonctions, et si l'une d'elle tend vers zéro alors le volume de la variété tend aussi vers zéro, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. On présente ici les résultats obtenus ces dernières années concernant le problème réciproque, à savoir déterminer le comportement asymptotique des premières valeurs propres d'une variété lorsqu'elle s'effondre.

Mots-clefs : effondrement de variétés, laplacien, formes différentielles, petites valeurs propres.

MSC2000 : 58J50, 58C40

1. Introduction

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte connexe orientable de dimension n. Le laplacien de Hodge-de Rham, agissant sur l'espace $\Omega^p(M)$ des p-formes différentielles de M, est défini par $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$, où d désigne la différentielle extérieure et δ la codifférentielle, adjoint de d pour le produit scalaire L^2 sur M. Lorsque $p = 0$, on retrouve le laplacien agissant sur les fonctions.

Le spectre du laplacien de Hodge-de Rham forme un ensemble discret de nombres positifs ou nuls qu'on notera

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \ldots,$$

où les valeurs propres non nulles sont répétées s'il y a multiplicité. La multiplicité de la valeur propre nulle est un invariant topologique : c'est en fait le p-ième nombre de Betti de la variété M.

L'étude du spectre du laplacien agissant sur les fonctions montre qu'à diamètre borné et courbure de Ricci minorée, la 1^{re} valeur propre ne peut pas être arbitrairement petite :

Théorème 1.1. *Soit a et d deux réels strictement positifs et n un entier. Il existe une constante $c(n, a, d) > 0$ telle que si (M, g) est une variété riemannienne de dimension n dont le diamètre et la courbure de Ricci vérifient* $\mathrm{diam}(M, g) \leq d$ *et* $\mathrm{Ric}(M, g) \geq -ag$*, alors*

$$\lambda_{0,1}(M, g) \geq c.$$

Notons que ce problème a fait l'objet de nombreux travaux ([LY80], [Gr80], [BBG85] et [CZ95], par exemple).

B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC90] que le théorème 1.1 ne se généralise pas aux formes différentielles pour $0 < p < n$ — même avec l'hypothèse plus forte de courbure sectionnelle bornée — en donnant pour tout p des exemples de variétés M admettant une suite de métriques (g_i) telle que $\lim_{i\to\infty} \lambda_{p,1}(M, g_i) = 0$, la courbure et le diamètre de M étant uniformément bornés. En outre, ils mettent en évidence le fait que si une valeur propre tend vers zéro à courbure et diamètre bornées — ce qu'on appelera *petite valeur propre* — alors le volume de la variété (ou de manière équivalente son rayon d'injectivité) tend aussi vers zéro, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. Ces résultats soulèvent deux questions :

Question 1.2. *À quelles conditions une variété qui s'effondre admet-elle une — ou plusieurs — petite valeur propre ?*

Question 1.3. *À quelle vitesse les petites valeurs propres tendent-elles vers zéro par rapport au volume ou au rayon d'injectivité de la variété ?*

2. Contexte topologique et géométrique

Toutes les variétés n'admettent pas d'effondrement à courbure bornée, il existe des obstructions topologiques. On peut par exemple remarquer que, par définition, une variété qui s'effondre a un volume minimal nul, et par conséquent sa caractéristique d'Euler et tous ses nombres caractéristiques sont nuls.

On peut en fait décrire précisément les variétés qui s'effondrent. Si on se donne une suite de métrique qui effondre une variété M, on peut en extraire une sous-suite (g_i) telle que (M, g_i) converge pour la distance de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique. Dans le cas où cet espace est une variété riemannienne lisse (N, h), on sait que M possède une structure de fibré sur N :

Théorème 2.1 ([Fu87]). *Soit (M_i, g_i) une suite de variétés compactes de dimension n et (N, h) une variété riemannienne compacte de dimension $m < n$. Si pour tout i la courbure sectionnelle de M_i vérifie $|K(M, g_i)| \leq 1$, et si (M, g_i) converge vers (N, h) pour la distance de Gromov-Hausdorff, alors pour tout i suffisamment grand il existe une fibration $\pi_i : M_i \to N$ dont la fibre est une infranilvariété.*

K. Fukaya montre en outre dans [Fu89] un résultat semblable dans le cas général, l'espace limite de l'effondrement étant alors une variété stratifiée.

Dans [CFG92], J. Cheeger, K. Kukaya et M. Gromov étudient de manière précise la métriques des variétés effondrées et montrent que dans la situation du théorème 2.1, la métrique le long des fibres est proche d'une métrique invariante pour la structure nilpotente de la fibre.

Pour l'étude des petites valeurs propres, on se place donc souvent dans une situation M possède une structure de fibré, en se restreignant eventuellement au cas plus simple où la base ou la fibre est fixée.

3. Cohomologie limite

Pour répondre à la question 1.2 dans le cas où (M, g_i) tend vers une variété riemannienne (N, h), J. Lott définit dans [Lo02] un opérateur limite pour le laplacien : quitte à extraire une sous-suite de (g_i), le spectre du laplacien de Hodge-de Rham converge pour tout p et il existe un opérateur noté Δ_∞^p agissant sur un espace des formes différentielles $\Omega^p(N, E^*)$, où E^* est un fibré vectoriel gradué sur N dépendant de M, et dont le spectre $\{\lambda_{p,k}^\infty\}$ vérifie $\lambda_{p,k}^\infty = \lim_{i\to+\infty} \lambda_{p,k}(M, g_i)$. La multiplicité de la valeur propre nulle de Δ_∞^p donne donc le nombre de valeurs propres petites ou nulles produites par l'effondrement. Par théorie de Hodge, on peut aussi identifier le noyau de ce laplacien limite à une cohomologie limite de $\Omega^*(N, E^*)$.

L'étude de ces objets limites n'est pas aisée, et les résultats généraux de [Lo02] étant très techniques, nous ne les énoncerons pas ici. Nous allons cependant en donner des corollaires simples.

Une situation assez bien comprise est celle des fibrés en tores sur le cercle s'effondrant sur leur base. Elle illustre le rôle de la topologie dans l'existence de petites valeurs propres. En combinant les arguments de [Lo02] et [Ja03b] (voir aussi [Ja03a]), on peut écrire :

Théorème 3.1. *Soit $n \geq 2$, $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, d la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 de A et d' sa multiplicité géométrique. On considère le fibré $M \xrightarrow{\pi} S^1$ de fibre T^n construit par suspension du difféomorphisme A. Alors :*

1. *$b_1(M) = d' + 1$;*
2. *Si $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de métrique sur M telle que $|K(M, g_i)| \leq a$ et que la submersion π soit une $\frac{1}{i}$-approximation de Hausdroff, alors il existe une constante $c(M, a) > 0$ telle que $\lambda_{1,d-d'+1}(M, g_i) > c$ pour tout i.*
3. *Pour tout $k \leq d - d'$, il existe une famille de métriques (g_ε^k) sur M de courbure et diamètre uniformément bornés par rapport à ε et une constante $c''(M) > 0$ telle que $(M, g_\varepsilon) \xrightarrow{d_{G\text{-}H}} S^1$ et $\lambda_{1,i}(M, g_\varepsilon^k) \to 0$ pour $i \leq k$ quand $\varepsilon \to 0$, et $\lambda_{1,k+1}(M, g_\varepsilon^k) > c''$ si $k < n$.*
4. *Si la matrice A est semi-simple, alors M n'admet pas de petites valeurs propres en s'effondrant sur S^1, quel que soit le degré.*

Remarque 3.2. Les points 2 et 4 mettent en évidence le rôle de la topologie dans l'existence de petites valeurs propres, et le point 3 montre que la géométrie de l'effondrement a elle aussi une influence.

Pour les effondrements sur une variété N quelconque, un autre résultat de [Lo02] donne des majorations du nombre de petites valeurs pour les 1-formes en fonction de la topologie de M et N :

Théorème 3.3 ([Lo02]). *Lorsque M s'effondre à courbure bornée sur N, le nombre maximal m de petites valeurs propres non nulles pour les 1-formes vérifie*

$$m \leq \dim(M) - \dim(N) + b_1(N) - b_1(M) \tag{3.4}$$

et

$$m \leq \dim(M). \tag{3.5}$$

L'inégalité (3.5) a la particularité de ne pas dépendre de l'espace limite, mais elle est peu précise car à dimension fixée, la topologie influe sur le nombre de petites valeurs propres comme le montre le théorème 3.1, ce qui soulève le problème suivant :

Question 3.6. *Comment estimer le nombre maximal de petites valeurs propres que peut admettre une variété M donnée — indépendamment de l'espace limite de l'effondrement — en fonction de sa topologie ?*

4. Minoration du spectre

4.1. Minoration par le rayon d'injectivité

Selon [CC90], si le diamètre, la courbure et le rayon d'injectivité d'une variété compacte (M^n, g) vérifient $|K(M,g)| < a$, $\operatorname{diam}(M,g) < d$ et $\operatorname{inj}(M,g) > r$, où a, d et r sont des réels strictement positifs, alors il existe une constante $c(n,a,d,r) > 0$ telle que $\lambda_{p,1}(M,g) > c(n,a,d,r) > 0$, pour tout p. La démonstration donnée dans [CC90] ne permet malheureusement pas d'expliciter cette constante. Un progrès notable a été réalisé par S. Chanillo et F. Trèves dans [CT97] en donnant une minoration explicite du spectre en fonction du rayon d'injectivité et du nombre de boules géodésiques permettant de recouvrir M. Plus précisément, on se donne un réel $0 < r < \operatorname{inj}(M,g)$, et on note N le nombre de boules géodésiques de rayon $4^{-n}r$ nécessaires pour recouvrir la variété M. On a alors :

Théorème 4.1 ([CT97]). *Il existe une constante $C(n,a) > 0$ telle que si $|K(M,g)| < a$, alors*

$$\lambda_{p,1}(M,g) \geq C \cdot r^{-2} N^{-4(n+1)},$$

pour tout p.

Comme l'ont remarqué B. Colbois et G. Courtois dans [CC00], on peut en déduire une minoration en fonction du seul rayon d'injectivité :

Corollaire 4.2. *Pour tous réels a et d strictement positifs, il existe une constante $c(n,a,d) > 0$ telle que si $|K(M,g)| < a$ et $\operatorname{diam}(M,g) < d$, alors*

$$\lambda_{p,1}(M,g) \geq c \cdot \operatorname{inj}(M,g)^{4n^2+4n-2},$$

pour tout p.

Remarque 4.3. Ces estimations sont très générales : il n'y a aucune hypothèse sur la topologie de la variété.

Nous allons démontrer ici qu'un argument élémentaire de théorie de Hodge permet de préciser ces minorations, en particulier lorsque p est petit par rapport à n.

Théorème 4.4. *Pour tous réels a et d strictement positifs, Il existe des constantes $C_1(n,a), C_2(n,a,d) > 0$ telle que si $|K(M,g)| < a$ et $\operatorname{diam}(M,g) < d$, alors on a pour tout p*

$$\lambda_{p,1}(M,g) \geq C_1 \cdot r^{-2} N^{-7(p+1)}$$

et

$$\lambda_{p,1}(M,g) \geq C_2 \cdot \operatorname{inj}(M,g)^{7n(p+1)-2}.$$

Démonstration : Soit λ une valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les p-formes. Si λ admet une forme propre exacte ω, S. Chanillo et F. Trèves exhibent dans la démonstration du théorème 1.1 de [CT97] une $(p-1)$-forme φ et une constante $c(n,a) > 0$ telle que $\mathrm{d}\varphi = \omega$ et $\|\varphi\|_2 \leq c \cdot rN^{\frac{7}{2}p}\|\omega\|_2$. Si on note φ' la forme propre coexacte telle que $\mathrm{d}\varphi' = \omega$, on a alors $\lambda = \frac{\|\omega\|_2^2}{\|\varphi'\|_2^2} \geq \frac{\|\omega\|_2^2}{\|\varphi\|_2^2} \geq c^{-2}r^{-2}N^{-7p}$. Si λ n'admet pas de p-forme propre exacte, alors elle admet une p-forme propre coexacte, dont la différentielle sera une $(p+1)$-forme propre exacte, de même valeur propre. En appliquant l'inégalité précédente à cette $(p+1)$-forme, on obtient, $\lambda \geq c^{-2}r^{-2}N^{-7(p+1)}$.

Selon [Gr80], le nombre N est majoré par $c' \operatorname{inj}(M,g)^{-n}$, où c' est une constante strictement positive dépendant de a, d et n, ce qui permet de conclure à la minoration $\lambda_{p,1}(M,g) \geq C_2 \cdot \operatorname{inj}(M,g)^{7n(p+1)-2}$. □

Remarque 4.5. Quand $p > \frac{n}{2}$, on peut améliorer la minoration en utilisant le fait que $\lambda_{p,1}(M,g) = \lambda_{n-p,1}(M,g)$.

À degré fixé, l'exposant du rayon d'injectivité dans la minoration du théorème 4.4 est une fonction affine de n au lieu d'une fonction quadratique comme au corollaire 4.2. On peut envisager de se débarrasser de cette dépendance par rapport au degré :

Question 4.6. *Peut-on obtenir une minoration du spectre de la forme $\lambda_{p,1}(M,g) > c(n,a,d) \cdot \operatorname{inj}(M,g)^{an+b}$, où a et b sont des réels indépendants de p ?*

4.2. Spectre des fibrés principaux en tores

Une situation pour laquelle le comportement asymptotique des petites valeurs propres est bien connu est celle des fibrés en cercles s'effondrant sur leur base, qui a été étudiée par B. Colbois et G. Courtois :

Théorème 4.7 ([CC00]). *Soit a et d deux réels strictement positifs et $M \xrightarrow{\pi} N$ un fibré en cercle de dimension n et de classe d'Euler $[e] \in H^2(N)$ sur une variété riemannienne (N,h). Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h)) > 0$ et $C_i(n,a,d,(N,h)) > 0$ pour $i = 1,2,3$ telles que si g est une métrique sur M vérifiant $\operatorname{diam}(M,g) \leq d$, $|K(M,g)| \leq a$ et telle que la submersion π soit une ε-approximation de Hausdorff pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors pour $1 \leq p \leq n$,*

1. *$\lambda_{p,m_p+1}(M,g) \geq C_1$;*
2. *Si $[e] \neq 0$, alors $C_2\|e\|_2^2\varepsilon^2 \leq \lambda_{1,1}(M,g) \leq C_3\|e\|_2^2\varepsilon^2$, où $\|e\|_2$ est la norme du représentant harmonique de $[e]$;*
3. *Si $\dim H^2(N,\mathbb{R}) = 1$, alors*

$$C_2\|e\|_2^2\varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M,g) \leq C_3\|e\|_2^2\varepsilon^2 \text{ pour } 1 \leq k \leq m_p,$$

avec $m_p = b_p(N) + b_{p-1}(N) - b_p(M)$.

On peut noter que l'exposant de ε dans les estimations des petites valeurs propres est indépendant de la dimension, et que le paramètre ε est l'ordre de grandeur de la longueur des fibres, qu'on peut interpréter comme l'ordre de grandeur du rayon d'injectivité ou du volume de M. La question se pose naturellement de savoir dans quelle mesure ces estimations se généralisent :

Question 4.8. *Peut-on obtenir une minoration de $\lambda_{p,1}(M,g)$ asymptotiquement de l'ordre de $\operatorname{inj}(M,g)^2$ ou $\operatorname{Vol}(M,g)^2$ quand la variété s'effondre ?*

Notons qu'une minoration du spectre par $\operatorname{Vol}(M)^2$ entrainerait une minoration par $\operatorname{inj}(M)^{2n}$, ce qui répondrait affirmativement à la question 4.6. Par ailleurs, on ne peut pas en général majorer les premières valeurs propres comme dans le théorème 4.7 : quand la fibre est de dimension strictement supérieure à 1, le nombre de petites valeurs propres varie *a priori* avec la géométrie de l'effondrement, même en supposant que le fibré est principal (voir [Ja03a]).

L'étude des fibrés principaux en tores menée dans [Ja04] apporte quelques éléments de réponse à la question 4.8. Tout d'abord, la réponse est négative en ce qui concerne la minoration par le rayon d'injectivité :

Théorème 4.9. *Pour tout entier $k \geq 1$ et pour toute variété (N,h) telle que $b_2(N) \geq k$, il existe un fibré principal M en tore T^k sur N, une famille de métrique $(g_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ sur M, et des réels strictement positifs $C(k,(N,h))$ et*

$\varepsilon_0(k,(N,h))$ tels que la courbure et le diamètre de (M,g_ε) soient uniformément bornés par rapport à ε, $\mathrm{Vol}(M,g_\varepsilon)=\varepsilon$ pour tout ε, et

$$\lambda_{p,1}(M,g_\varepsilon)\leq C\cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g_\varepsilon) \tag{4.10}$$

pour $p=1$ et 2, et pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$.

De plus, si $b_1(N)>b_2(M)$, on a aussi pour $p=2$ et 3

$$\lambda_{p,b_1(N)-b_2(M)}(M,g_\varepsilon)\leq C\cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g_\varepsilon) \tag{4.11}$$

L'étude du spectre des fibrés principaux en tores qui s'effondrent, et en particulier la démonstration du théorème 4.9, fait appel à la théorie des approximations diophantiennes, comme le montre l'exemple des fibrés en tore T^2 :

Exemple 4.12. Soit M un fibré principal en tores T^2 sur une variété N et g une métrique T^2-invariante sur M. Si on se donne un vecteur $v=(1,\alpha)\in\mathbb{R}^2$ avec α irrationnel, il induit par l'action de T^2 un champ de vecteur invariant V tangent aux fibres. On définit une famille de métrique (g_ε) sur M en décomposant g en la somme $g=g_V\oplus g_\perp$ d'une métrique g_V dans la direction du champ V et d'une métrique $g_\perp$ sur l'orthogonal de V dans TM, et en posant $g_\varepsilon=\varepsilon^2 g_V\oplus g_\perp$. La variété (M,g_ε) s'effondre sur N quand $\varepsilon\to 0$ car α est irrationnel, la courbure reste bornée et on montre dans [Ja04] qu'on peut de plus choisir le fibré M de sorte que l'effondrement produise une petite valeur propre pour les 1-formes, qui est alors de l'ordre de ε^2.

Si on note

$$\mu(\alpha)=\sup\left\{\nu,\ |\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^\nu}\text{ a une infinité de solutions }(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

l'exposant d'irrationnalité de α, on peut montrer (cf. [Ja05]) que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\lambda_{1,1}(M,g_\varepsilon)}{\ln \mathrm{inj}(M,g_\varepsilon)}=\frac{2\mu(\alpha)}{\mu(\alpha)-1}.$$

Rappelons que $\mu(\alpha)$ vaut 2 pour presque tous les irrationnels, et en particulier pour les irrationnels algébriques, mais peut aussi prendre toutes les valeurs dans $[2,+\infty]$ selon le choix de α.

Le second résultat de [Ja04] est qu'on peut minorer le spectre des 1-formes d'un fibré principal en tore par le carré du volume :

Théorème 4.13. *Soit deux réels a et d strictement positifs, un entier $n\geq 3$ et (N,h) une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à n. Il existe des constantes $\varepsilon_0(n,a,d,(N,h))>0$, $C(n,a,d,(N,h))>0$ et $C'(n,a,d,(N,h))>0$ telles que si (M,g) est une variété riemannienne de dimension n vérifiant $\mathrm{diam}(M,g)\leq d$, $|K(M,g)|\leq a$ et si $\pi:(M,g)\to$*

(N,h) est une fibration principale de fibre T^k qui soit une ε-approximation de Hausdorff avec $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors

$$\lambda_{1,1}(M,g) \geq C \cdot \mathrm{Vol}^2(M,g) \geq C' \cdot \mathrm{inj}^{2k}(M,g). \tag{4.14}$$

Le théorème 4.13 soulève les deux questions suivantes qui restent ouvertes :

Question 4.15. *Peut-on généraliser cette minoration aux p-formes différentielles, pour tout p ?*

Question 4.16. *La minoration du spectre par le volume au carré de la variété se généralise-t-elle à d'autres familles de variétés ?*

5. Petites valeurs propres à courbure minorée

Récemment a été abordé le problème de l'existence de petites valeurs propres sous une hypothèse géométrique plus faible, à savoir que la courbure sectionnelle est seulement bornée inférieurement, le diamètre restant majoré. Plus précisément, des exemples de petites valeurs propres ont été exhibés pour une famille d'effondrements à courbure minorée présentée par T. Yamaguchi dans [Ya91] : soit M une variété sur laquelle agit un groupe de Lie compact G (cette action n'est pas nécessairement libre). On munit M et G des métriques bi-invariantes g et $\bar{g}$ respectivement, et pour tout ε ont définit sur M la métrique g_ε comme étant la métrique quotient de $((G,\varepsilon^2\bar{g}) \times (M,g))/G$ pour l'action diagonale de G. La variété (M,g_ε) tend pour la distance de Gromov-Hausdorff vers M/G quand $\varepsilon \to 0$, la courbure de g_ε restant uniformément minorée.

J. Takahashi a exhibé dans [Ta02] un premier exemple de petite valeur propre en considérant une action de S^1 sur S^{2n} (remarque : comme la caractéristique d'Euler des sphères de dimension paire est non nulle, elles ne peuvent pas s'effondrer à courbure bornée). J. Lott a généralisé ce résultat dans [Lo04] en donnant pour tous les effondrements de Yamaguchi décrits ci-dessus une minoration du nombre de petites valeurs propres qui dépend de la topologie de M et M/G.

Les connaissances sur ce problème restent très limitées. On ne sait par exemple pas si la liste de petite valeurs propres donné dans [Lo04] est exhaustive. En outre, le comportement asymptotique du spectre dépend de la géométrie de l'effondrement, comme le montre l'exemple des sphères de dimension impaire :

Exemple 5.1. On considère l'action de $\mathrm{SO}(2n)$ sur la sphère S^{2n-1}. L'effondrement de Yamaguchi $(S^{2n-1}, g_\varepsilon)$ associé à cette action est une simple homothétie qui effondre la sphère sur un point sans produire de petite valeur propre. Cependant, comme S^{2n-1} est muni d'une structure de fibré en cercle, on peut ensuite appliquer le théorème 4.7 et effondrer ce fibré de manière à obtenir une suite de métriques g'_ε telle que $g'_\varepsilon \leq g_\varepsilon$ et $\lambda_{1,1}(M, g'_\varepsilon) < \varepsilon$, la courbure restant uniformément minorée.

Remarque 5.2. L'exemple 5.1 peut se généraliser aux fibrés en cercles dont la base s'effondre à courbure minorée. On peut noter par ailleurs qu'on utilise le fait que la variété admet une petite valeur propre à courbure bornée.

Question 5.3. *Existe-t-il une variété M dont le volume minimal est nul, qui n'admet pas de petite valeur propre à courbure sectionnelle bornée mais qui en admet à courbure minorée ?*

On peut aussi envisager d'affaiblir encore l'hypothèse sur la courbure :

Question 5.4. *Existe-t-il une variété qui n'admet pas de petite valeur propre à courbure sectionnelle minorée mais qui en admet à courbure de Ricci minorée ?*

Enfin, on peut reformuler la question 4.8 avec ces hypothèses :

Question 5.5. *À diamètre borné et courbure minorée, peut-on minorer la première valeur propre du laplacien de Hodge-de Rham par le volume de la variété au carré ?*

Références

[BBG85] P. Bérard, G. Besson et S. Gallot — « Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov », *Inventiones Mathematicae*, 80, p. 295–308, 1985.

[CC90] B. Colbois et G. Courtois — « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms », *Manuscripta mathematica*, 68, p. 143–160, 1990.

[CC00] B. Colbois et G. Courtois — « Petites valeurs propres des p-formes différentielles et classe d'Euler des S^1-fibrés », *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 33, p. 611–645, 2000.

[CFG92] J. Cheeger, K. Fukaya et M. Gromov — « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Am. Math. Soc.*, 5, p. 327–372, 1992.

[CT97] S. Chanillo et F. Trèves — « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *Journal of Differential Geometry*, 45 (2), p. 273–287, 1997.

[CZ95] X. Cheng et D. Zhou — « First eigenvalue estimate on Riemannian manifolds », *Hokkaïdo Mathematical Journal*, 24, p. 453–472, 1995.

[Fu87] K. Fukaya — « Collapsing riemannian manifolds to ones with lower dimension », *Journal of Differential Geometry*, 25, p. 139–156, 1987.

[Fu89] K. Fukaya — « Collapsing riemannian manifolds to ones with lower dimension II », *J. Math. Soc. Japan*, 45 (2), p. 333–356, 1989.

[Gr80] M. Gromov — « Paul Levy's isoperimetric inegality », *Prépublication IHÉS*, 1980.

[Ja03a] P. Jammes — « Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent », *Manuscripta mathematica*, 110 (1), p. 13–31, 2003.

[Ja03b] P. Jammes — *Sur le spectre du laplacien des fibrés en tores qui s'effondrent*, Thèse de doctorat, université de Neuchâtel, déc. 2003, math.DG/0506234.

[Ja04] P. Jammes — « Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores », prépublication, 2004, math.DG/0404536.

[Ja05] P. Jammes — « Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens », prépublication, 2005, math.DG/0505417.

[Lo02] J. Lott — « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. Journal*, 114, p. 267–306, 2002, math.DG/9902111.

[Lo04] J. Lott — « Remark about the spectrum of the p-form Laplacian under a collapse with curvature bounded below », *Proc. Am. Math. Soc.*, 132, p. 911–918, 2004, math.DG/0202196.

[LY80] P. Li et S.T. Yau — « Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold », *Proceedings Symposium on Pure Math.*, pages 205–239, 1980.

[Ta02] J. Takahashi — « Small eigenvalues on p-forms for collapsings of the even-dimensional spheres », *Manuscripta mathematica*, 109 (1), p. 63–71, 2002.

[Ya91] T. Yamaguchi — « Collapsing and pinching under a lower curvature bound », *Annals of math.*, 133 (2), p. 317–357, 1991.

Pierre Jammes
Université d'Avignon
laboratoire de mathématiques
33 rue Louis Pasteur
F-84000 Avignon
Pierre.Jammes@univ-avignon.fr