Rapport de stage MMA 1
Juin-Juillet 1995

problème des diviseurs et paires d'exposants

Pierre Jammes

Directeur de stage : Christian Mauduit

stage effectué au
Laboratoire de Mathématiques Discrètes
163 avenue de Luminy - Case 930
13288 Marseille Cedex 9

1. Introduction

1.1. Le problème des diviseurs de Dirichlet

Etant donné un entier n, on note $d(n)$ le nombre de ses diviseurs. Le problème de Dirichlet consiste a évaluer la fonction $S(x) = \sum_{n \leq x} d(n)$. Un argument élementaire, que nous résumerons dans la section 4 et dont on peut trouver un présentation plus détaillée dans [HW79] ch. 18 ou [Te95] ch. I.3, permet de montrer que

$$S(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(x^{1/2}), \tag{1.1}$$

où γ est la constante d'Euler. Ce résultat conduit naturellement à se demander si on peut améliorer la majoration de $\Delta(x)$, où

$$\Delta(x) = S(x) - x(\ln x + 2\gamma - 1). \tag{1.2}$$

Le 1$^{\text{er}}$progrès fut apporté par Voronoï en 1903 (voir [Te95] ch. I.6 et les références qui y sont données), qui obtint $\Delta(x) = O(x^{1/3} \ln x)$, en utilisant des sommes d'exponentielles.

A partir de 1922, Van de Corput apporta une contribution importante à la théorie des sommes d'exponentielles, ce qui ouvrit la voie à d'autres travaux, en particulier sur les paires d'exposants. Tous ces résultats permettent d'affiner la majoration de Δ.

Dans ce rapport, nous rappelerons d'abord quelques résultats sur la méthode de Van der Corput, puis nous exposerons la théorie des paires d'exposants en nous basant sur [GK91]. Ensuite, nous verrons leur application au problème des diviseurs de Dirichlet.

1.2. Notations

Dans tout ce qui suit, n désignera toujours un entier.

L'expression $e(x)$ désignera $e^{2\pi i x}$.

Nous utiliserons la notation de Vinogradov $\ll$. Si f et g sont deux fonctions, g étant à valeurs réelles positives, $f \ll g$ signifie $|f| \leq K|g|$, où K est une constante indépendante des paramètres entrant en jeu. $f \approx g$ signifiera que $f \ll g$ et $g \ll f$.

Si x est un réel, $\|x\|$ désignera l'entier le plus proche de x. Autrement dit,

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|.$$

Nous utiliserons aussi la factorielle généralisée notée $(\alpha)_n$, définie par

$$(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_{n+1} = (\alpha + n)(\alpha)_n.$$

2. La méthode de Van der Corput

Dans cette partie, notre but est d'obtenir une majoration de l'expression

$$S = \sum_{n \in I} e(f(n)), \tag{2.1}$$

où $I =]a, b]$ (a et b étant entiers).

2.1. Premières estimations

L'inégalité triangulaire donne :

$$|S| \leq \sum_{n \in I} |e(f(n))| = |I| = b - a, \tag{2.2}$$

mais l'égalité n'est atteinte que si $f(n) = xn + y$, avec x entier. Si x n'est pas entier, alors

$$|\sum_{n \in I} e(xn + y)| = \frac{|e(bx) - e(ax)|}{|e(x) - 1|} \leq \frac{1}{|\sin \pi x|}.$$

En utilisant le fait que $|\sin \pi x| \geq 2\|x\|$ pour tout x, on obtient

$$|\sum_{n \in I} e(xn + y)| \ll \|x\|^{-1}. \tag{2.3}$$

Ce résultat est généralisé dans le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Kusmin-Landau). *Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ et que f' est monotone et vérifie $\|f'\| \geq \lambda > 0$ sur I, alors*

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll \lambda^{-1}.$$

L'hypothèse $\|f'\| \geq \lambda > 0$ est plutôt restrictive, mais ce premier théorème permet de démontrer le suivant :

Théorème 2.5 (Van der Corput). *Soit f une fonction à valeur réelle $\mathcal{C}^2$. S'il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\lambda \leq |f''(x)| \leq \alpha\lambda$ sur I, alors*

$$\sum_{n \in I} |e(f(n))| \ll \alpha|I|\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}.$$

Démonstration : Soit $\delta \in]0, 1/2[$. D'après les hypothèses, on peut diviser I en au plus $\alpha|I|\lambda + 2$ intervalles sur lesquels $\|f'\| \geq \delta$, et au plus $\alpha|I|\lambda + 1$ intervalles de longueur $\leq 2\delta/\lambda$. On applique le théorème 2.4 sur le premier groupe d'intervalles, et l'inégalité (2.2) sur le second. On obtient alors

$$\sum_{n \in I} |e(f(n))| \ll (\alpha|I|\lambda + 1)(1/\delta + \delta/\lambda + 1).$$

$\delta = \lambda^{1/2}$ donne le résultat dans le cas $\lambda \leq 1/4$. Dans le cas contraire, le résultat découle de l'inegalité (2.2). ∎

2.2. L'inégalité de Weyl-Van der Corput

Van der Corput a aussi amélioré un résultat de Weyl dans le lemme suivant, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.6 (Weyl-Van der Corput). *Soit ξ une fonction à valeur complexe telle que $\xi(n) = 0$ si $n \notin I$, et H un entier positif. Alors*

$$|\sum_n \xi(n)|^2 \leq \frac{|I| + H}{H} \sum_{|h|<H} \left(1 - \frac{|h|}{H}\right) \sum_n \xi(n)\overline{\xi(n-h)}.$$

Démonstration : On a

$$H \sum_n \xi(n) = \sum_{k=1}^{H} \sum_n \xi(n+k) = \sum_n \sum_{k=1}^{H} \xi(n+k).$$

La somme $\sum_{k=1}^{H} \xi(n+k)$ est nul sauf si $a - H < n \leq b - 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\begin{aligned} H^2 \sum_n \xi(n) &\leq (|I| + H) \sum_n |\sum_{k=1}^{H} \xi(n+k)|^2 \\ &\leq (|I| + H) \sum_{k=1}^{H} \sum_{l=1}^{H} \sum_n \overline{\xi(n+k)}\xi(n+l). \end{aligned}$$

On obtient le résultat en regroupant les termes tels que $l - k = h$. ■

Nous appliquerons ce lemme avec

$$\xi(n) = \begin{cases} e(f(n)) & \text{si } n \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous poserons aussi

$$S_1(h) = \sum_{n \in I(h)} e(f(n+h) - f(n)),$$

où $I(h) = \{n, n \in I \text{ et } n + h \in I\}$. Si on suppose de plus que $H \leq |I|$, on a alors

$$|S|^2 \leq \frac{2|I|}{H} \sum_{|h|<H} |S_1(h)|.$$

Comme $S_1(-h) = \overline{S_1(h)}$, on peut écrire

$$|S|^2 \leq \frac{2|I|^2}{H} + \frac{4|I|}{H} \sum_{1 \leq |h| \leq H} |S_1(h)|. \tag{2.7}$$

C'est sous cette forme que nous appliquerons l'inégalité de Weyl-Van der Corput.

3. La méthode des paires d'exposants

3.1. Introduction

Dans cette partie, la notation (2.1) est conservée, mais on suppose qu'il existe un entier N tel que $I \subset [N, 2N]$. nous travaillerons sur une certaine famille de fonctions (voir section 3.3) dont la principale propriété est que $f' \approx yx^{-s}$, où y et s sont des réels strictement positifs. On obtient alors des majorations de S de la forme

$$S \ll L^k N^l,$$

où $L = yN^{-s}$. (k, l) est alors appelé une paire d'exposants. Nous montrerons que si (k, l) est une paire d'exposants, alors

$$A(k,l) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{k+l+1}{2k+2}\right) \text{ et } B(k,l) = \left(l - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)$$

sont des paires d'exposants. Comme $(0, 1)$ est trivialement une paire d'exposants (cela découle de (2.2)), on obtiendra de nouvelles paires d'exposants en appliquant A et B à cette paire.

3.2. Lemmes

Nous aurons besoin des lemmes qui suivent :

Lemme 3.1. *Posons*

$$L(H) = \sum_{i=1}^{m} A_i H^{a_i} + \sum_{j=1}^{n} B_j H^{-b_j},$$

où $A_i, B_j, a_i,$ et b_j sont positifs. Soit $H_1 \le H_2$. Alors il existe un $H \in [H_1, H_2]$ tel que

$$L(H) \ll \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(A_i^{b_j} B_j^{a_i}\right)^{1/(a_i+b_j)} + \sum_{i=1}^{m} A_i H_1^{a_i} + \sum_{j=1}^{n} B_j H_2^{-b_j},$$

La constante de majoration ne dépendant que de m et n.

Démonstration : Posons $L_+(H) = \max(A_1 H^{a_1}, \ldots, A_m H^{a_m})$ et $L_-(H) = \max(B_1 H^{-b_1}, \ldots, B_m H^{-b_m})$. Comme $L \le mL_+ + nL_-$, il suffit de majorer L_+ et L_-.

L_+ est une fonction croissante, et $L_+(0) = 0, L_+(\infty) = \infty$. L_- est une fonction décroissante, et $L_-(0) = \infty, L_+(\infty) = 0$. Il y a donc un unique H_0 tel que $L_+(H_0) = L_-(H_0)$. Distinguons trois cas :$H_1 \le H_0 \le H_2, H_0 < H_1$, et $H_0 > H_2$.

Si $H_1 \leq H_0 \leq H_2$, alors il existe i et j tels que $L_+(H_0) = A_i H_0^{a_i} = L_-(H_0) = B_j H_0^{-b_j}$, et donc

$$L_+(H_0) = L_-(H_0) = \left(A_i^{b_j} B_j^{a_i}\right)^{1/(a_i+b_j)}.$$

Si $H_0 < H_1$, alors

$$L_-(H_1) < L_+(H_1) \leq \sum_{i=1}^{m} A_i H_1^{a_i}.$$

Si $H_0 > H_2$, alors

$$L_-(H_2) < L_+(H_2) \leq \sum_{j=1}^{n} B_j H_2^{-b_j}.$$

■

Lemme 3.2. *Soit f une fonction $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ avec $f'' < 0$ sur cet intervalle, et $[a,b] \subset [N,2N]$. Soit $\alpha = f'(b)$ et $\beta = f'(a)$. Supposons qu'il existe un $F > 0$ tel que*

$$f^{(2)}(x) \approx FN^{-2}, f^{(3)}(x) \ll FN^{-3}, \text{ et } f^{(4)} \ll FN^{-4}$$

sur $[a,b]$. Soit x_ν defini par $f'(x_\nu) = \nu$, et soit $\phi(\nu) = -f(x_\nu) + \nu x_\nu$. Alors

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) = \sum_{\alpha \leq \nu \leq \beta} \frac{e(-\phi(\nu) - 1/8)}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} + O\left(\ln(2L) + L^{-1/2} N^{1/2}\right).$$

Ce dernier lemme, que nous admettrons, a été introduit par Van der Corput.

3.3. Définitions

En définissant les familles $\mathcal{F}$ de fonctions sur lesquelles nous travaillerons, il faut s'assurer que les fonctions vérifiant $f'(x) = yx^{-s}$ pour un $s > 0$ y appartiennent, ansi que certaines fonctions intermédiaires que nous introduirons par la suite (voir lemmes 3.5 et 3.7).

Définition 3.3. *Soit N, y, s et ϵ des réels positifs avec $\epsilon < 1/2$ et soit P un entier positif. $\mathcal{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ est l'ensemble des fonctions f telle que :*

1. *f est $\mathcal{C}^P$ sur un intevalle $[a,b] \subset [N,2N]$*
2. *si $0 \leq p \leq P-1$ et $a \leq x \leq b$ alors $|f^{(p+1)}(x) - (-1)^p (s)_p y x^{-s-p}| < \epsilon (s)_p y x^{-s-p}$.*

Définition 3.4. *Soit $k \in [0,1/2]$ et $l \in [1/2,1]$. (k,l) est une paire d'exposants si pour tout $s > 0$, il existe P et $\epsilon < 1/2$ tels que pour tout $N > 0, y > 0$ et $f \in \mathcal{F}(N,P,s,y,\epsilon)$, on ait $S \ll (yN^{-s})^k N^l + y^{-1} N^s$.*

Nous supposerons en fait toujours dans nos démonstrations que $yN^{-s} \geq 1$, car si $yN^{-s} < 1/2$, le théorème 2.4 donne

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll y^{-1} N^s,$$

et si $1/2 \leq yN^{-s} < 1$, alors

$$\sum_{n \in I} e(f(n)) \ll N^{1/2},$$

d'après le théorème 2.5.

3.4. Transformations A et B

3.4.1. Transformation A

Le fait que $A(k, l)$ soit une paire d'exposants découle de l'inégalité (2.7), et donc la démonstration fait intervenir la fonction $f_1(x) = f(x) - f(x+h)$. On aura donc besoin du lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit $f \in \mathcal{F}(N, P, s, y, \epsilon)$ définie sur $[a, b]$, et $h \in [1, \min\{b - a, 2\epsilon N/(s+P)\}[$. Alors f_1 est définie sur $[a, b-h]$, et $f_1 \in \mathcal{F}(N, P-1, s+1, shy, 3\epsilon)$*

On pourra donc appliquer la définition de la paires d'exposants à (k, l) et f_1.

Théorème 3.6. *Si $(k.l)$ est une paire d'exposants, alors*

$$(\kappa, \lambda) = A(k, l) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{k+l+1}{2k+2} \right)$$

est une paire d'exposants.

Démonstration : On a bien $(\kappa, \lambda) \in [0, 1/2] \times [1/2, 1]$. Maitenant soit y, d et N. Il suffit de montrer qu'il existe P_1 et ϵ_1 strictement positifs tels que si $f \in \mathcal{F}(N, P_1, s, y, \epsilon_1)$ et $L \geq 1$ alors $S \ll L^\kappa N^\lambda$.

1^{er} cas : $L \geq \ln N$.

Soit $P > 0$ et $\epsilon \in]0, 1/2[$ tels que si $f \in \mathcal{F}(N, P, s, y, \epsilon)$, alors $S \ll (yN^{-s})^k N^l + y^{-1} N^s$. Montrons que $P_1 = P + 1$ et $\epsilon_1 = \epsilon/3$ conviennent.

Soit $H \leq \min\{b - a, 2\epsilon N/(s+P)\}$. L'inégalité (2.7) donne

$$|S| \ll \frac{N^2}{H} + \frac{N}{H} \sum_{1 \leq h \leq H} |S_1(h)|.$$

D'après le lemme 3.5, $f_1 \in \mathcal{F}(N, P-1, s+1, shy, 3\epsilon)$, donc, comme (k, l) est une paire d'exposants,

$$\begin{aligned} |S|^2 &\ll H^{-1} N^2 + H^{-1} N \sum_{1 \leq h \leq H} \left((hLN^{-1})^k N^l + h^{-1} L^{-1} N \right) \\ &\ll H^{-1} N^2 + H^k L^k N^{l-k+1} + H^{-1} L^{-1} N^2 \ln N. \end{aligned}$$

Comme $L \geq \ln N$, le 1$^{\text{er}}$ terme domine le 3$^{\text{e}}$. L'application du lemme 3.1 donne $S \ll L^\kappa N^\lambda + N(b-a)^{-1/2}$. Si le 1$^{\text{er}}$ terme domine, on a la majoration souhaitée. Sinon, l'inégalité (2.2) donne $S \ll \min(N(b-a)^{-1/2}, b-a) \ll N^{2/3}$. Comme $\lambda \geq 2/3$, on a bien $S \ll N^\kappa L^\lambda$.

2$^{\text{e}}$cas : $1 \leq L \leq \ln N$.

En utilisant le théorème 2.5, on obtient $S \ll N^{1/2}(\ln N)^{1/2} \ll N^{2/3} \ll L^\kappa N^\lambda$. ∎

3.4.2. Transformation B

Ici encore, nous avons besoin d'un lemme préliminaire qui nous assure que les fonctions auxiliaires que nous utiliserons sont dans un ensemble $\mathcal{F}$ approprié.

Lemme 3.7. *Soit $f \in \mathcal{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ définie sur $[a,b]$. Soit $\alpha = f'(b)$ et $\beta = f'(a)$. Pour $\nu \in [\alpha,\beta]$,soit x_ν défini par $f'(x_\nu) = \nu$ et ϕ par $\phi(\nu) = \nu x_\nu - f(x_\nu)$. Soit $\sigma = 1/s$ et $\nu = y^\sigma$. Alors il existe une constante $C = C(s,P)$ telle que $|\phi^{p+1}(\nu) - (-1)^p(\sigma)_p \eta\nu^{-\sigma-p}| < C\epsilon(\sigma)_p\eta\nu^{-\sigma-p}$ quelques soient $0 \leq p \leq P-1$ et $\alpha \leq \nu \leq \beta$.*

Théorème 3.8. *Si (k,l) est une paire d'exposants, alors $(\kappa,\lambda) = B(k,l) = (l-1/2, k+1/2)$ est une paire d'exposants.*

Démonstration : On a bien $(\kappa,\lambda) \in [0,1/2] \times [1/2,1]$. Soit y, d et N. On cherche P_1 et ϵ_1 strictement positifs tels que si $f \in \mathcal{F}(N,P_1,s,y,\epsilon_1)$ et $L \geq 1$ alors $S \ll L^\kappa N^\lambda$. Soit $P > 0$ et $\epsilon \in]0,1/2[$ tels que si $f \in \mathcal{F}(N,P,s,y,\epsilon)$, alors $S \ll (yN^{-s})^k N^l + y^{-1}N^s$. Montrons que $P_1 = P$ et $\epsilon_1 = \epsilon/C$, où C est la constante du lemme 3.7, conviennent. f vérifie les hypothèses du lemme 3.2 avec $F = LN$, donc

$$S = \sum_{\alpha \leq \nu \leq \beta} \frac{e(-\phi(\nu) - 1/8)}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} + O\left(\ln(2L) + L^{-1/2}N^{1/2}\right). \tag{3.9}$$

Le lemme précédent donne

$$T(w) \stackrel{def}{=} \sum_{\alpha < \nu \leq w} e(\phi(\nu)) \ll (\eta J^{-\sigma})^k J^l + \eta^{-1}J^\sigma \ll N^k J^l + N^{-1}.$$

Donc la somme de l'égalité (3.9) vaut

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\beta |f''(x_w)|^{-1/2} d\overline{T(w)} \\
&= \left[\overline{T(w)}|f''(x_w)|^{-1/2}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \overline{T(w)} \frac{d}{dw}|f''(x_w)|^{-1/2} dw \\
&\ll (N^k L^l + N^{-1})\left((LN^{-1})^{-1/2} + \int_\alpha^\beta \left|\frac{d}{dw}|f''(x_w)|^{-1/2}\right| dw\right) \\
&\ll L^\kappa N^\lambda + L^{-1/2}N^{-1/2}.
\end{aligned}$$

On a donc finalement $S \ll L^\kappa N^\lambda + \ln(2L) + L^{-1/2}N^{1/2}$. Comme $\kappa > 0$ et $L \geq 1$, le 1^{er} terme domine les deux autres. ■

4. Application des paires d'exposants au problème des diviseurs

4.1. Introduction

Notre but dans cette section est d'améliorer la majoration du terme d'erreur de l'équation (1.1). Nous allons pour cela l'exprimer à l'aide de la fonction ψ définie par $\psi(x) = x - [x] - 1/2$. En nous aidant des travaux de Vaaler ([Va85]), nous pourront ensuite majorer l'expression obtenue en utilisant les paires d'exposants.

4.2. Evaluation de S

Nous aurons besoin ici du résultat classique suivant.

Lemme 4.1. *Si $y \geq 1$ alors*

$$\sum_{m \leq y} \frac{1}{m} = \ln y + \gamma - \frac{\psi(y)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

où γ est la constante d'Euler.

Théorème 4.2. *Soit Δ défini par (1.2). Alors*

$$\Delta(x) = -2 \sum_{n \leq x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{n}\right) + O(1).$$

Démonstration : Commençons par écrire :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n \leq x} d(n) \\
&= \sum_{mr \leq x} 1 \\
&= \sum_{m \leq x^{1/2}} \sum_{r \leq x/m} 1 + \sum_{r \leq x^{1/2}} \sum_{m \leq x/r} 1 - \sum_{m \leq x^{1/2}} \sum_{r \leq x^{1/2}} 1 \\
&= 2\left(\sum_{m \leq x^{1/2}} \sum_{r \leq x/m} 1\right) - \sum_{m \leq x^{1/2}} \sum_{r \leq x^{1/2}} 1
\end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned}\sum_{m\leq x^{1/2}}\sum_{r\leq x/m}1 &= \sum_{m\leq x^{1/2}}\left[\frac{x}{m}\right]=\sum_{m\leq x^{1/2}}\left(\frac{x}{m}-\psi\left(\frac{x}{m}\right)-\frac{1}{2}\right)\\ &= x(\frac{1}{2}\ln x+\gamma)-x^{1/2}\psi(x^{1/2})-\frac{1}{2}x^{1/2}\\ &\quad -\sum_{m\leq x^{1/2}}\psi\left(\frac{x}{m}\right)+O(1),\end{aligned}$$

d'après le lemme 4.1.

D'autre part :

$$\sum_{m\leq x^{1/2}}\sum_{r\leq x^{1/2}}1=[x^{1/2}]^2=x-2x^{1/2}\psi(x^{1/2})-x^{1/2}+O(1),$$

d'où le résultat. ■

4.3. Sommation de ψ

L'idée est d'approximer ψ par une somme d'exponentielles.

Lemme 4.3. *Soit $J\geq 1$. Il existe des coefficients $\gamma(j)$ tels que*

$$\psi(w)\leq J^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}\gamma(j)e(jw),$$

avec $\gamma(j)\ll|j^{-1}|$.

Ce lemme se déduit d'un Théorème de Vaaler, dont on peut trouver la démonstration dans [Va85] ou [GK91]. On peut maintenant utiliser les paires d'exposants.

Théorème 4.4. *Soit (k,l) une paire d'exposants, et P et ϵ les paramètres correspondants. si $f\in\mathcal{F}(N,P,s,y,\epsilon)$ et si f est définie sur $[a,b]$, alors*

$$\sum_{n\in I}\psi(f(n))\ll y^{k/(k+1)}N^{((1-s)k+l)/(k+1)}+y^{-1}N^s.$$

Démonstration : L'application du lemme 4.3 donne

$$\sum_{n\in I}\psi(f(n))\ll NJ^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}j^{-1}\left|\sum_{a<n\leq b}e(jf(n))\right|.$$

Comme (k,l) est une paire d'exposants, on en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{n\in I}\psi(f(n)) &\ll NJ^{-1}+\sum_{1\leq|j|\leq J}j^{-1}((jyN^{-s})^kN^l+j^{-1}y^{-1}N^s)\\ &\ll NJ^{-1}+J^kN^{l-ks}y^k+y^{-1}N^s.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en posant $J^{k+1}=y^{-k}N^{sk-l+1}$. ■

4.4. Application

Théorème 4.5. *Si* $(k,l) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *est une paire d'exposants, alors*

$$\Delta(x) \ll x^{(k+l)/(2k+2)}.$$

Démonstration : Commençons par écrire

$$\sum_{m \leq x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{1 \leq j \leq J} \sum_{m \in I_j} \psi\left(\frac{x}{m}\right),$$

où $I_j = \{n, 2^{-j}x^{1/2} < n \leq 2^{-j+1}x^{1/2}\}$. En appliquant le théorème 4.4, on obtient

$$\sum_{m \leq x^{1/2}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) \ll x^{(k+l)/(2k+2)} \sum_{1 \leq |j| \leq J} 2^{-j(l-k)} + \sum_{1 \leq |j| \leq J} 2^{-2j}.$$

la dernière somme est majorée par 1. Comme $(k,l) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $l > k$, et donc

$$\sum_{1 \leq |j| \leq J} 2^{-j(l-k)}$$

converge, d'où le résultat. ■

On notera par la suite $\theta(k,l) = (k+l)/(2k+2)$ l'exposant obtenu.

4.5. Amélioration de la majoration de Δ et limites de la méthode

4.5.1. Nouvelles majorations

On peut maintenant utiliser les transformations A et B pour obtenir des paires d'exposants qui améliorent la majoration de Δ. Comme $B^2 = Id$, les nouvelles paires d'exposants seront de la forme $A^{q_1}BA^{q_2}\ldots BA^{q_r}B(0,1)$ ou $BA^{q_1}BA^{q_2}\ldots BA^{q_r}B(0,1)$ Par exemple, la paire $(2/7, 5/7) = BAAB(0,1)$ donne

$$\theta = 1/3,$$

et

$$\theta BAAAB(0,1) = 27/82 < 1/3.$$

La question se pose naturellement de savoir quel est la meilleure majoration qu'on puisse obtenir par cette méthode. En 1985, Graham a construit un algorithme qui permet de déterminer des valeurs approchées du minimum de θ sur l'ensemble des paires obtenues à partir de (0,1) avec les opérations A et B, où θ est une fonction rationelle quelconque en k et l. Pour le problème des diviseurs, ce minimum vaut $0,329021 \pm 10^{-6}$.

4.5.2. Nouvelles paires d'exposants

Des travaux récents ([HW88] et [Wa89]) ont permis de montrer, indépendement de la méthode précedente, que $(9/56+\epsilon, 37/56+\epsilon)$ puis $(89/560+\epsilon, 369/560+\epsilon)$ sont des paires d'exposants. Ces nouvelles paires permettent d'affiner encore la majoration de Δ. Par exemple

$$\theta BAA(9/56, 37/56) \simeq 0.328947\ldots$$

Cependant, l'amélioration reste faible, et à partir d'un certain point, la transformation A n'est d'aucune utilité. En effet,

$$\theta(k,l) \longrightarrow \frac{1}{4} \text{ quand } (k,l) \longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

Alors que

$$\inf \theta A([0,1/2]\times[1/2,1]) > \frac{1}{3} \text{ et } \inf \theta BA([0,1/2]\times[1/2,1]) = \frac{3}{10}.$$

4.6. progrès récents et futurs

Récemment, Iwaniec et Mozzochi ont montré dans [IM88] que $\Delta(x) = O(x^{7/22+\epsilon})$ pour tout ϵ, ce qui est une meilleure majoration que les précedentes, mais reste assez éloigné de la conjecture classique

$$\Delta(x) = O(x^{1/4+\epsilon}).$$

Cependant, même si celle-ci semble actuellement hors de portée, les techniques utilisées semblent prometteuses, et ont déjà été appliquées à l'étude de la fonction ζ de Riemann. Réciproquement, une meilleure connaissance de la fonction ζ pourrait aussi permettre des progrès dans le problème de Dirichlet.

Références

[GK91] S.W. Graham et G. Kolesnik – *Van der Corput's method of exponential sums*, volume 126 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, 1991.

[HW79] G.H. Hardy et E.M. Wright – *An Introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, 5e édition, 1979.

[HW88] M.N. Huxley et N. Watt – « Exponential sums and the Riemann zeta-function », *Proc. London Math. Soc.*, 57, p. 1–24, 1988.

[IM88] H. Iwaniec et C. J. Mozzochi – « On the divisor and circle problems », *J. Number Theory*, 29 (1), p. 60–93, 1988.

[Te95] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 de *Cours spécialisés*, SMF, 1995.

[Va85] J.D. Vaaler – « Some extremal problems in Fourier analysis », *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12 (2), p. 183–216, avril 1985.

[Wa89] N. Watt – « Exponential sums and the Riemann zeta-function II », *J. London Math. Soc.*, 39, p. 385–404, 1989.