

---

# MULTIPLICITÉ DU SPECTRE DE STEKLOV SUR LES SURFACES ET NOMBRE CHROMATIQUE

*par*

Pierre Jammes

---

**Résumé.** — Dans cet article, on démontre plusieurs résultats sur la multiplicité des premières valeurs propres de Steklov sur les surfaces compactes à bord. On améliore certaines bornes sur la multiplicité, en particulier pour la première valeur propre, et on montre qu'elles sont optimales sur plusieurs surfaces de petit genre. Dans un article précédent, on a défini un nouvel invariant chromatique des surfaces à bord et on a conjecturé qu'il est relié à la multiplicité de la première valeur propre de Steklov. Dans le présent article on étudie cet invariant et on confirme la conjecture dans les cas où la borne optimale est connue.

**Abstract.** — In this article, we prove several results about the multiplicity of the firsts Steklov eigenvalues on compact surfaces with boundary. We improve some bounds on the multiplicity, especially for the first eigenvalue, and we prove they are sharp on some surfaces of small genus. In a previous article, we defined a new chromatic invariant of surfaces with boundary and conjectured that this invariant is related to the bound on the first eigenvalue. In the present article, we study this invariant, and prove that the conjecture is true when the known bound is sharp.

## 1. Introduction

L'étude de la multiplicité des valeurs propres de Steklov a fait récemment l'objet des travaux [FS12], [Jam14], [KKP]. Ces trois articles montrent que sur une surface compacte à bord donnée, la multiplicité de la  $k$ -ième valeur propre de Steklov est majorée en fonction de  $k$  et de la topologie (voir le paragraphe qui suit pour la définition du spectre de Steklov). Dans [Jam14], j'ai montré que ce phénomène est spécifique à la dimension 2 et qu'en dimension plus grande, on peut prescrire arbitrairement le début du spectre de Steklov, avec multiplicité. J'ai aussi conjecturé qu'en dimension 2, la multiplicité maximale de la première valeur propre non nulle est déterminée par un invariant topologique de même

---

*Classification mathématique par sujets (2000).* — 35P15, 58J50, 55A15, 57M15.

*Mots clefs.* — spectre de Steklov, multiplicité de valeurs propres, nombre chromatique.

nature que le nombre chromatique mais spécifique aux surfaces à bord (cf. la conjecture 1.2 ci dessous).

L’objet de cet article est triple. D’abord, améliorer certaines bornes sur la multiplicité du spectre de Steklov en dimension 2, en particulier pour la première valeur propre et sur les surfaces de petit genre. Ensuite, construire des exemples de première valeur propre multiple, ce qui permet de montrer que certaines bornes sont optimales. Enfin, on étudie l’invariant chromatique des surfaces à bord définie dans [Jam14], qu’on appellera *nombre chromatique relatif*, on justifiera en particulier cette dénomination et on calculera sa valeur sur les surfaces de petit genre.

La confrontation de ces différents résultats permet de consolider la conjecture faite dans [Jam14] sur le lien entre la multiplicité de la première valeur propre et le nombre chromatique relatif en montrant qu’elle est vérifiée dans tous les cas où on connaît la borne optimale et qui sont résumés dans la table 1 ci-dessous.

**1.1. Définitions et notations.** — Avant d’énoncer les résultats précis, nous allons rappeler les notions en jeu et préciser quelques définitions.

Soit  $M$  une variété compacte à bord et  $\gamma \in C^\infty(M)$ ,  $\rho \in C^\infty(\partial M)$  deux fonctions densités strictement positives sur  $M$  et  $\partial M$  respectivement (on peut travailler avec des hypothèses de régularité plus faible sur les densités mais ça n’est pas crucial dans la suite). Le problème aux valeurs propres de Steklov consiste à résoudre l’équation, d’inconnues  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(1.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

où  $\nu$  est un vecteur unitaire sortant normal au bord. On parle de problème de Steklov homogène quand  $\gamma \equiv 1$  et  $\rho \equiv 1$ , et le cas  $\gamma \not\equiv 1$  se rattache au problème de Calderón. L’ensemble des réels  $\sigma$  solutions du problème forme un spectre discret positif noté

$$(1.2) \quad 0 = \sigma_0(M, g, \rho, \gamma) < \sigma_1(M, g, \rho, \gamma) \leq \sigma_2(M, g, \rho, \gamma) \dots$$

On omettra les références à  $\rho$  et  $\gamma$  quand ces densités sont uniformément égales à 1.

On s’intéressera à la multiplicité de ces valeurs propres, et si on se donne une surface compacte à bord  $\Sigma$ , on notera  $m_k(\Sigma)$  la multiplicité maximale de  $\sigma_k(\Sigma, g, \rho, \gamma)$  quand on fait varier  $g$ ,  $\rho$  et  $\gamma$ .

On établira des liens entre ce spectre et les graphes plongés dans la surface. On introduit pour cela les deux définitions suivantes :

**Définition 1.3.** — Soit  $\Gamma$  un graphe fini et  $\Sigma$  une surface compacte à bord. Un plongement de  $\Gamma$  dans  $\Sigma$  sera appelé plongement propre si ce plongement envoie tous les sommets de  $\Gamma$  sur  $\partial\Sigma$ .

**Remarque 1.1.** — Les graphes qui se plongent proprement dans le disque sont connus sous le nom de graphes planaires extérieurs (*outerplanar graphs*).

**Définition 1.4.** — Si  $\Sigma$  est une surface compacte à bord, on appelle nombre chromatique relatif de  $\Sigma$ , noté  $\text{Chr}_0(\Sigma)$ , la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes finis qui admettent un plongement propre dans  $\Sigma$ .

Avec ces notations, la conjecture énoncée dans [Jam14] peut se reformuler ainsi (l'équivalence entre les deux énoncés est l'un des objets de la section 3, cf. remarque 3.2) :

**Conjecture 1.2.** — Pour toute surface  $\Sigma$  compacte à bord, on a

$$m_1(\Sigma) = \text{Chr}_0(\Sigma) - 1.$$

Cette conjecture adapte au spectre de Steklov une conjecture analogue énoncée par Y. Colin de Verdière dans [CdV87] et reliant la multiplicité de la 2<sup>nd</sup>e valeur propre des opérateurs de Schrödinger et le nombre chromatique usuel.

Enfin, on utilisera les notations suivantes :  $\mathbb{S}^2, \mathbb{D}^2, \mathbb{P}^2, \mathbb{M}^2, \mathbb{T}^2$  et  $\mathbb{K}^2$  désigneront respectivement la sphère de dimension 2, le disque, le plan projectif, le ruban de Möbius, le tore et la bouteille de Klein. Si  $\Sigma$  est une surface close, on désignera par  $\Sigma_p$  la surface  $\Sigma$  privée de  $p$  disques disjoints, où  $p$  est un entier strictement positif. Par exemple, on a  $\mathbb{M}^2 = \mathbb{P}_1^2$  et  $\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}_1^2$ .

**1.2. Résultats.** — Un premier résultat de cet article est de démontrer qu'on a au moins une inégalité dans l'égalité de la conjecture 1.2 :

**Théorème 1.3.** — Soit  $\Sigma$  une surface compacte à bord. Il existe des densités  $\gamma \in C^\infty(\Sigma)$ ,  $\rho \in C^\infty(\partial\Sigma)$  et une métrique  $g$  sur  $\Sigma$  telles que la multiplicité de  $\sigma_1(\Sigma, g, \gamma, \rho)$  soit  $\text{Chr}_0(\Sigma) - 1$ .

On va s'attacher ensuite à améliorer les bornes connues sur la multiplicité des valeurs propres, en commençant par considérer une surface quelconque. Rappelons d'abord le résultat de [KKP], qui est la meilleure majoration connue pour une surface  $\Sigma$  et une valeur propre  $\sigma_k$  quelconques (elle est démontré dans [KKP] pour  $\gamma \equiv 1$  mais sans hypothèse de régularité sur  $\rho$ ) :

**Théorème 1.4 ([KKP]).** — Si  $\Sigma$  est une surface compacte à bord de caractéristique d'Euler  $\chi$  et dont le bord possède  $l$  composantes connexes, alors

$$(1.5) \quad m_k(\Sigma) \leq 2k - 2\chi - 2l + 5$$

et

$$(1.6) \quad m_k(\Sigma) \leq k - 2\chi + 4$$

pour tout  $k \geq 1$ , cette dernière égalité étant stricte pour les surfaces non simplement connexes.

Les majorations de multiplicité que nous allons montrer sont de plusieurs types. Dans les deux théorèmes qui suivent, nous donnons deux majorations de  $m_k$  sur n'importe quelle surface : le premier précise l'inégalité (1.6) en utilisant les outils développés dans [FS12], le deuxième théorème est une application des techniques

développées par B. Sévenec ([Sév94], [Sév02]) pour majorer la multiplicité de la première valeur propre du laplacien. Nous donnerons ensuite des majorations spécifiques aux premières valeurs propres des surfaces de petit genre.

**Théorème 1.5.** — *Si  $\Sigma$  est une surface compacte à bord de caractéristique d'Euler  $\chi$  et dont le bord possède  $l$  composantes connexes, alors pour tout  $k \geq 1$  :*

$$(1.7) \quad m_k(\Sigma) \leq k - 2\chi + 3.$$

**Remarque 1.6.** — La majoration (1.7) est optimale pour  $k = 1$  sur le disque et le ruban de Möbius, et dans les deux cas l'égalité est atteinte par un problème homogène, c'est-à-dire avec  $\rho \equiv 1$  et  $\gamma \equiv 1$  (pour la métrique canonique dans le cas du disque et pour une métrique  $S^1$ -invariante construite dans [FS12] pour le ruban de Möbius).

**Remarque 1.7.** — L'inégalité (1.7) étend les cas d'inégalité stricte de (1.6) à toutes les surfaces. Les techniques de [FS12] qui autorisent cette démonstration unifiée permettent aussi les raffinements obtenus dans les théorèmes 1.12 et 1.13.

**Théorème 1.8.** — *Soit  $\Sigma$  une surface compacte à bord de caractéristique d'Euler  $\chi$  et dont le bord possède  $l$  composantes connexes. Si  $\chi + l \leq -1$ , alors*

$$(1.8) \quad m_1(\Sigma) \leq 5 - \chi - l.$$

*Si  $l = 1$  et  $\chi \leq -2$ , alors*

$$(1.9) \quad m_1(\Sigma) \leq 3 - \chi.$$

**Remarque 1.9.** — Si on note  $\bar{\chi}$  la caractéristique d'Euler de la surface close obtenue en collant un disque sur chaque bord de  $\Sigma$ , la majoration (1.8) s'écrit  $m_1(\Sigma) \leq 5 - \bar{\chi}$ . Elle est optimale pour  $\bar{\chi} = -1$  et  $l \geq 2$ , et  $\bar{\chi} = -2$  ou  $-3$  et  $l \geq 3$ . L'inégalité (1.9) peut s'écrire  $m_1(\Sigma) \leq 4 - \bar{\chi}$ , elle est optimale pour  $\bar{\chi} = 1, 2, 3$ . Les valeurs propres multiples correspondantes sont données par le théorème 1.3 et le calcul des nombres chromatiques relatifs fait dans la section 3.

**Remarque 1.10.** — Contrairement au théorème 1.5 et aux travaux [FS12], [KKP] et [Jam14], le théorème 1.8 n'utilise pas les résultats de Cheng [Che76] sur la structure de l'ensemble nodal des fonctions propres mais les techniques topologiques de Sévenec (voir le théorème 5.5 et la remarque 5.6). Les hypothèses de régularité sur la métrique ou les densités  $\gamma$  ou  $\rho$  sont donc seulement celles utilisées par le théorème nodal de Courant, qui sont très faibles en dimension 2 (cf. [Ale98]).

Dans les trois théorèmes qui suivent, on donne des bornes spécifiques aux surfaces de petit genre. Le premier adapte des résultats analogues obtenus par G. Besson [Bes80] et Y. Colin de Verdière [CdV87] pour le laplacien.

**Théorème 1.11.** —  *$m_1(\mathbb{T}_p^2) = 6$  pour  $p \geq 3$  et  $m_1(\mathbb{K}_p^2) = 5$  pour  $p \geq 2$ .*

Avec des techniques similaires mais en utilisant des arguments spécifiques au spectre de Steklov, on améliore deux bornes :

**Théorème 1.12.** —  $m_1(\mathbb{P}_2^2) = 4$  et  $m_1(\mathbb{T}_1^2) = 5$ .

Enfin, on majore la multiplicité de la 2<sup>e</sup> valeur propre du disque au moyen d'une stratégie indépendante de toutes celles évoquées jusqu'ici.

**Théorème 1.13.** —  $m_2(\mathbb{D}^2) = 2$ .

**Remarque 1.14.** — On sait déjà que  $m_1(\mathbb{D}^2) = 2$ . Par ailleurs, M. Karpukhin, G. Kokarev et I. Polterovich montrent dans [KKP] que  $m_k(\mathbb{D}^2) = 2$  si  $k$  est assez grand. Ces résultats laissent penser qu'on a  $m_k(\mathbb{D}^2) = 2$  quel que soit  $k$ . Cette multiplicité est atteinte par la métrique canonique.

La table 1 rassemble les valeurs connues de  $m_1(\Sigma_p)$ , où  $\Sigma$  est une surface close. Pour les surfaces  $\Sigma$  concernées, la valeur de  $m_1$  ne dépend pas de  $p$  quand  $p \geq 4$ . Rappelons que la majoration de  $\mathbb{S}_p^2$  pour  $p \geq 2$  est montrée dans [FS12], [Jam14] et [KKP] et l'égalité découle du théorème 1.3 pour  $p$  quelconque et d'un exemple construit dans [FS11] pour le cas  $p = 2$ . Toutes les bornes contenues

| $p =$                          | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------------|---|---|---|---|
| $\mathbb{S}^2$                 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| $\mathbb{P}^2$                 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| $\mathbb{K}^2$                 | ? | 5 | 5 | 5 |
| $\mathbb{T}^2$                 | 5 | ? | 6 | 6 |
| $\#3\mathbb{P}^2$              | 5 | 6 | 6 | 6 |
| $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ | 6 | 7 | 7 | 7 |
| $\#4\mathbb{P}^2$              | 6 | ? | 7 | 7 |
| $\#5\mathbb{P}^2$              | 7 | ? | 8 | 8 |

TABLE 1. Valeur de  $m_1$  sur les surfaces de petit genre

dans la table 1 sont bien conformes à la conjecture 1.2 (comparer avec les nombres chromatiques relatifs indiqués dans la table 2, section 3).

Les majorations de multiplicité pour la première valeur propre du laplacien induisent des critères de plongement de graphes dans les surfaces. Dans le cas du spectre de Steklov, on peut en tirer des critères de plongement propre dans les surfaces à bord. Cet aspect sera précisé dans la section 4 (corollaire 4.1). Comme par ailleurs on sait caractériser spectralement les graphes qui admettent un plongement non entrelacé dans  $\mathbb{R}^3$ , on obtient, par un cheminement inattendu,

le critère de plongement qui suit. Rappelons qu'un plongement d'un graphe dans  $\mathbb{R}^3$  est non entrelacé si tout ensemble de cycles disjoints forme un entrelacs trivial.

**Corollaire 1.10.** — *Si un graphe admet un plongement propre dans  $\mathbb{M}^2$  ou  $\mathbb{P}_2^2$ , alors il admet un plongement non entrelacé dans  $\mathbb{R}^3$ .*

**Remarque 1.15.** — L'hypothèse que les sommets du graphe soient sur le bord est indispensable ; sans elle on peut trouver facilement des contre-exemples, à commencer par le graphe complet à 6 sommets.

**Remarque 1.16.** — Si la conjecture 1.2 est vraie pour  $\mathbb{K}_1^2$ , alors le corollaire 1.10 s'applique aussi à cette surface.

On discutera dans la section 4 (remarque 4.4) l'existence de démonstrations plus élémentaire de ce corollaire.

Dans la section 2.1, nous rappellerons quelques résultats techniques concernant le spectre de Steklov et les opérateurs sur les graphes. La section 3 sera consacrée à l'étude du nombre chromatique relatif : on justifiera en particulier cette dénomination et on calculera sa valeur sur les surfaces de petit genre. On verra dans la section 4 comment construire des valeurs propres multiples sur une surface à l'aide d'un graphe proprement plongé et on en déduira le théorème 1.3 et le corollaire 1.10. Enfin, on démontrera dans la section 5 les différentes bornes sur la multiplicité.

Je remercie Y. Colin de Verdière et I. Polterovich pour leurs remarques sur la première version de cet article.

## 2. Rappels

**2.1. Le spectre de Steklov.** — On va rappeler ici quelques propriétés du spectre de Steklov que nous utiliserons. Il est l'ensemble des réels  $\sigma$  pour lesquels le problème

$$(2.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M \end{cases},$$

où  $\nu$  est un vecteur unitaire sortant normal au bord, admet des solutions non triviales.

Le spectre de Steklov  $(\sigma_k(M, g, \gamma, \rho))_k$  est le spectre d'un opérateur Dirichlet-Neumann  $H^1(\partial M) \rightarrow L^2(\partial M)$  défini par  $\Lambda_{\rho, \gamma} u = \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma u}{\partial \nu}$ , où  $\mathcal{H}_\gamma u$  est le prolongement harmonique de  $u$  pour la densité  $\gamma$ , c'est-à-dire que  $\operatorname{div}(\gamma \nabla(\mathcal{H}_\gamma u)) = 0$ . Il est auto-adjoint pour la norme de Hilbert  $\|u\|^2 = \int_{\partial M} u^2 \rho dv_g$  (voir [Ban80], [SU90] et [Uh109] ; ces références traitent les cas  $\rho \equiv 1$  ou  $\gamma \equiv 1$  mais l'adaptation au cas général est aisée).

Pour montrer le théorème 1.3 on utilisera la caractérisation variationnelle suivante du spectre :

$$(2.2) \quad \sigma_k(M, g, \rho) = \inf_{V_{k+1} \in H^1(M)} \sup_{f \in V_{k+1} \setminus \{0\}} \frac{\int_M |df|^2 \gamma \, dv_g}{\int_{\partial M} f^2 \rho \, dv_g},$$

où  $V_k$  parcourt les sous-espaces de dimension  $k$  de l'espace de Sobolev  $H^1(M)$ .

On aura aussi recours à un problème de Steklov avec condition de Neumann sur une partie du bord. Si on partitionne  $\partial M$  en deux domaines (ou unions finies de domaines)  $\partial_S M$  et  $\partial_N M$ , ce problème consiste à considérer la variante suivante du problème de Steklov :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0 & \text{dans } M \\ \gamma \frac{\partial f}{\partial \nu} = \sigma \rho f & \text{sur } \partial M_S \\ \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial M_N \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'on demande à la fonction harmonique  $f$  de vérifier la condition de Neumann sur  $\partial M_N$ . Cette condition revient à poser  $\rho \equiv 0$  sur  $\partial M_N$ . Le spectre obtenu est celui d'un opérateur Dirichlet-Neumann défini sur  $\partial_S M$ . On notera  $(\sigma_k(M, \partial M_S, g, \gamma, \rho))_k$  son spectre.

**2.2. Opérateurs sur les graphes.** — On rappelle ici la définition des laplaciens et des opérateurs de Schrödinger sur les graphes, en se référant par exemple à [CdV98].

Soit  $\Gamma$  un graphe fini et  $S$  son ensemble de sommets. La géométrie du graphe est déterminée par la donnée, pour chaque paire  $\{x, y\}$  de sommets adjacents, d'un réel  $l_{xy}$  qui représente la longueur de l'arête reliant  $x$  à  $y$ . L'ensemble des  $l_{xy}$  sera appelé une métrique sur le graphe  $\Gamma$ . Le laplacien agissant sur les fonctions  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est alors défini par

$$(2.4) \quad \Delta f(x) = \sum_{y \sim x} \frac{f(x) - f(y)}{l_{xy}},$$

où la somme porte sur l'ensemble des sommets adjacents à  $x$ . Cet opérateur a un spectre positif et sa plus petite valeur propre est simple vaut 0.

Si on se donne une fonction  $V$  sur l'ensemble des sommets, on peut définir un opérateur de Schrödinger  $H_V$  sur  $\Gamma$  par  $H_V f(x) = \Delta f(x) + V(x)f(x)$ . Une propriété de ces opérateurs nous sera utile : si la première valeur propre de  $H_V$  est nulle, alors son spectre est celui d'une forme quadratique d'un laplacien relativement à une norme de Hilbert  $|f| = \sum_{x \in S} \mu_x f^2(x)$ . Les coefficients  $\mu_x$  s'interprètent comme une mesure sur l'espace des sommets du graphe.

### 3. Nombre chromatique relatif d'une surface à bord

On va montrer dans cette section différents résultats concernant le nombre chromatique relatif des surfaces à bord, et en particulier calculer cet invariant sur les surfaces de petit genre.

Rappelons d'abord que le nombre chromatique d'une surface close  $\Sigma$ , c'est-à-dire la borne supérieure des nombres chromatiques des graphes qu'on peut plonger dans  $\Sigma$ , est donné par la formule

$$(3.1) \quad \text{Chr}(\Sigma) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)}}{2} \right\rfloor$$

sauf pour la bouteille de Klein, pour laquelle  $\text{Chr}(\mathbb{K}^2) = 6$ . L'étude de cet invariant, amorcée par P. J. Heawood [Hea90] et L. Heffter [Hef91] a été achevée par G. Ringel et J. Youngs [RY68] en genre non nul, et K. Appel et W. Haken [AH76] pour la sphère. On peut consulter [RY68] pour un survol historique.

Notre premier résultat sur le nombre chromatique relatif est un encadrement analogue à la majoration du nombre chromatique obtenue par Heawood dans [Hea90]. Rappelons que si  $\Sigma$  est une surface close, on note  $\Sigma_p$  la surface obtenue en lui enlevant  $p$  disques disjoints.

**Théorème 3.1.** — *Le nombre chromatique relatif  $\text{Chr}_0(\Sigma_p)$  est une fonction croissante de  $p$  et vérifie les inégalités*

$$(3.2) \quad \text{Chr}(\Sigma) - 1 \leq \text{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \inf \left( \text{Chr}(\Sigma), \frac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2} \right).$$

En outre,  $\text{Chr}_0(\Sigma_p)$  est le nombre de sommets du plus grand graphe complet proprement plongeable dans  $\Sigma_p$ , et on a  $\text{Chr}_0(\Sigma_1) = \text{Chr}(\Sigma) - 1$  et  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) = \text{Chr}(\Sigma)$  si  $p \geq (\text{Chr}(\Sigma) - 1)/2$ .

**Remarque 3.2.** — Le fait que  $\text{Chr}_0(\Sigma_p)$  soit réalisé par un graphe complet établit l'équivalence entre la conjecture 1.2 et la conjecture énoncée dans [Jam14].

Ce théorème permet de calculer la valeur exacte du nombre chromatique relatif sur un certain nombre de surfaces. On va compléter cette liste par des surfaces de petit genre. D'abord dans le cas où la caractéristique d'Euler de  $\Sigma$  vérifie  $\chi(\Sigma) \geq -1$ . On aura alors la valeur de  $\text{Chr}_0(\Sigma_p)$  pour tout  $p$  :

**Proposition 3.3.** —  $\text{Chr}_0(\mathbb{P}_2^2) = 5$ ,  $\text{Chr}_0(\mathbb{K}_2^2) = 6$  et  $\text{Chr}_0(\#3\mathbb{P}_2^2) = 7$ .

On va aussi calculer quelques nombres chromatiques relatifs supplémentaires dans le cas où  $-2 \geq \chi(\Sigma) \geq -7$ . La liste ne sera pas exhaustive mais elle contiendra tous les cas pour lesquels on sait démontrer la conjecture 1.2 :

**Proposition 3.4.** — *Soit  $\Sigma$  une surface close.*

1.  $\text{Chr}_0(\#2\mathbb{T}_2^2) = \text{Chr}_0(\#4\mathbb{P}_3^2) = 8$ .
2. Si  $\chi(\Sigma) = -3$  ou  $-4$ , alors  $\text{Chr}_0(\Sigma_3) = 9$ .
3. Si  $\chi(\Sigma) = -5$  alors  $\text{Chr}_0(\Sigma_4) = 10$ .
4.  $\text{Chr}_0(\#4\mathbb{T}_3^2) = 10$ .

La table 2 rassemble en fonction de  $\Sigma$  et  $p$  les nombres chromatiques qu'on peut calculer à l'aide du théorème 3.1, des propositions 3.3 et 3.4 et en utilisant la monotonie du nombre chromatique relatif par rapport à  $p$  et par somme connexe. On se limite aux surfaces  $\Sigma$  telles que  $\chi(\Sigma) \geq -7$ .

| $p =$             | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  |
|-------------------|---|---|----|----|----|
| $\mathbb{S}^2$    | 3 | 4 | 4  | 4  | 4  |
| $\mathbb{P}^2$    | 5 | 5 | 6  | 6  | 6  |
| $\mathbb{K}^2$    | 5 | 6 | 6  | 6  | 6  |
| $\mathbb{T}^2$    | 6 | 6 | 7  | 7  | 7  |
| $\chi = -1$       | 6 | 7 | 7  | 7  | 7  |
| $\#2\mathbb{T}^2$ | 7 | 8 | 8  | 8  | 8  |
| $\#4\mathbb{P}^2$ | 7 | ? | 8  | 8  | 8  |
| $\chi = -3$       | 8 | 8 | 9  | 9  | 9  |
| $\chi = -4$       | 8 | ? | 9  | 9  | 9  |
| $\chi = -5$       | 9 | 9 | 9  | 10 | 10 |
| $\#4\mathbb{T}^2$ | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| $\chi = -7$       | 9 | ? | 10 | 10 | 10 |

TABLE 2. Nombre chromatique relatif des surfaces de petit genre

On va montrer séparément le résultat le plus technique du théorème 3.1 :

**Lemme 3.3.** —  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}.$

*Démonstration.* — On pose  $c = (5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p})/2$ . Étant donné un graphe  $\Gamma$  plongé proprement dans  $\Sigma_p$ , on va montrer qu'on peut le colorier avec  $c$  couleurs. Quitte à ajouter (temporairement) des sommets et des arêtes, on peut supposer d'une part que toutes les faces de la décomposition de  $\Sigma_p$  induite par  $\Gamma$  sont simplement connexes, et d'autre part que  $\partial\Sigma_p$  est recouvert par des arêtes. Il peut apparaître des arêtes multiples (plusieurs arêtes en les mêmes sommets) ou des boucles (arête reliant un sommet à lui-même) lors de cette étape mais ça n'est pas gênant pour la suite. On note  $s$  et  $a$  le nombre de sommets et d'arêtes de  $\Gamma$ ,  $\delta$  le degré minimal de ses sommets et  $f$  le nombre de faces de la décomposition de  $\Sigma_p$  induite par  $\Gamma$ .

On commence par majorer  $\delta$ . Comme chaque face est bordée par au moins trois arêtes et que chaque arête (sauf celles qui sont sur le bord, qui sont en nombre égal au nombre de sommets) est adjacente à deux faces, on a  $3f \leq 2a - s$ . De plus, le degré minimal vérifie les inégalités  $\delta s \leq 2a$  et  $\delta + 1 \leq s$ . Il découle alors de la formule d'Euler-Poincaré, en notant  $\chi = \chi(\Sigma) - p$  la caractéristique d'Euler de  $\Sigma_p$  et en supposant que  $\delta \geq 4$ , que

$$\begin{aligned}
 6\chi &= 6f + 6s - 6a \leq 4s - 2a \\
 &\leq 4s - \delta s = (4 - \delta)s \leq (4 - \delta)(\delta + 1) \\
 (3.4) \quad &\leq -\delta^2 + 3\delta + 4.
 \end{aligned}$$

Comme  $\delta$  vérifie l'inéquation  $\delta^2 - 3\delta - 4 + 6\chi \leq 0$ , on en déduit que  $\delta \leq (3 + \sqrt{25 - 24\chi})/2 = c - 1$ . Si  $\delta \leq 4$ , cette inégalité est trivialement vérifiée dès que  $\chi \leq 0$ .

On construit ensuite un coloriage par une double récurrence sur  $p$ , et sur  $s$  à  $p$  fixé. On supprime ici les boucles qui sont apparues en ajoutant des arêtes dans l'étape précédente ; la majoration de  $\delta$  reste valable.

Si  $s = c$ , le graphe  $\Gamma$  se colorie évidemment avec  $c$  couleurs. Dans le cas contraire, on a  $s \geq \delta + 2$ . On note alors  $x$  un sommet de degré minimal et on considère le graphe  $\Gamma'$  obtenu en supprimant le sommet  $x$  et les arêtes qui lui sont adjacentes. La récurrence se décompose en deux cas, selon que la composante de bord où est situé  $x$  porte d'autres sommets de  $\Gamma$  où non. Soulignons que si  $p = 1$ , tous les sommets sont sur la même composante de bord donc seul le premier cas se présentera.

Dans le premier cas, on ajoute une arête qui joint les deux voisins de  $x$  sur la même composante de bord (s'il ne reste qu'un seul point sur cette composante, l'arête supplémentaire forme une boucle) et on appelle encore  $\Gamma'$  le graphe obtenu. La majoration de  $\delta$  obtenue pour  $\Gamma$  s'applique alors aussi à  $\Gamma'$ . Comme  $\Gamma'$  a  $s - 1$  sommets, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et le colorier avec  $c$  couleurs. On applique le même coloriage à tous les sommets de  $\Gamma$  sauf  $x$ , et comme le degré de  $x$  est majoré par  $c - 1$  on peut colorier  $x$  avec une couleur différente de ses voisins.

Dans le second cas, la composante de bord de  $x$  ne porte aucun sommet de  $\Gamma'$  et on se ramène à la surface  $\Sigma_{p-1}$  en collant un disque le long de cette composante de bord. Le graphe  $\Gamma'$  est proprement plongé dans  $\Sigma_{p-1}$ , et comme la constante  $c$  croît avec  $p$  l'hypothèse de récurrence assure que  $\Gamma'$  admet un coloriage à  $c$  couleurs. On conclut comme dans le cas précédent.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.1.* — On va noter temporairement  $\kappa(\Sigma_p)$  le nombre du sommet du plus grand graphe complet proprement plongeable dans  $\Sigma_p$ . Il est clair qu'un plongement dans  $\Sigma_p$  induit un plongement dans  $\Sigma_{p+1}$  et dans  $\Sigma$ , donc  $\kappa(\Sigma_p)$  et  $\text{Chr}_0(\Sigma_p)$  sont des fonctions croissantes de  $p$  et

$$(3.5) \quad \kappa(\Sigma_p) \leq \text{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \text{Chr}(\Sigma).$$

Supposons que  $p = 1$ . Si on se donne un plongement propre du graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets dans  $\Sigma_1$ , on peut construire un plongement de  $K_{n+1}$  dans  $\Sigma$  en collant un disque sur le bord et  $\Sigma_1$ , en ajoutant un sommet sur ce disque et en le reliant par des arêtes aux sommets de  $K_n$  (c'est possible puisqu'ils sont tous sur le bord du disque). Réciproquement, étant donné un graphe complet  $K_{n+1}$  étant plongé dans  $\Sigma$ , on peut enlever un disque contenant un seul sommet et déplacer les autres sommets de manière à ce qu'ils se situent sur le bord du disque. On obtient un plongement de  $K_n$  dans  $\Sigma_1$  dont les sommets sont sur  $\partial\Sigma_1$ . On en déduit que  $\kappa(\Sigma_1) = \text{Chr}(\Sigma) - 1$  et donc que

$$(3.6) \quad \text{Chr}(\Sigma) - 1 \leq \kappa(\Sigma_p) \leq \text{Chr}_0(\Sigma_p).$$

On peut maintenant montrer que  $\kappa(\Sigma_p) = \text{Chr}_0(\Sigma_p)$ . Ces deux nombres ne peuvent prendre que les valeurs  $\text{Chr}(\Sigma) - 1$  et  $\text{Chr}(\Sigma)$ . Si  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) = \text{Chr}(\Sigma) - 1$ , alors on a immédiatement l'égalité dans l'inégalité (3.6). Supposons donc que  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) = \text{Chr}(\Sigma)$  et considérons un graphe  $\Gamma$  proprement plongé dans  $\Sigma_p$ , dont le nombre chromatique est  $\text{Chr}(\Sigma)$  et qui est critique, c'est-à-dire qu'on ne peut pas lui enlever d'arêtes sans diminuer son nombre chromatique. Cette propriété de criticité est intrinsèque au graphe  $\Gamma$ , donc il est aussi critique comme graphe plongé dans  $\Sigma$ . Or, on sait qu'un tel graphe est nécessairement un graphe complet (cf. [Bol98], ch. V, p. 156-157), donc on a égalité dans l'inégalité (3.5).

Montrons que  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) = \text{Chr}(\Sigma)$  si  $p \geq (\text{Chr}(\Sigma) - 1)/2$ . On considère le graphe complet à  $\text{Chr}(\Sigma)$  sommets qu'on plonge dans  $\Sigma$  et on construit un plongement de ce graphe dans  $\Sigma_p$  en enlevant  $p$  disques (pour  $p$  suffisamment grand) à  $\Sigma$  de manière à ce que les disques ne rencontrent pas les arêtes et que les sommets soient situés sur le bord des disques. Pour déterminer une valeur de  $p$  adéquate, on remarque qu'en plaçant le premier disque de manière quelconque, on peut placer (au moins) trois sommets du graphe sur son bord. On peut ensuite regrouper les autres sommets par deux et placer un disque adjacent à ces deux sommets et qui longe l'arête qui les reli. En fonction de la parité du nombre de sommets, il peut en rester un qui nécessite un disque supplémentaire. Au total, on a utilisé  $\lceil (\text{Chr}(\Sigma) - 1)/2 \rceil$  disques.

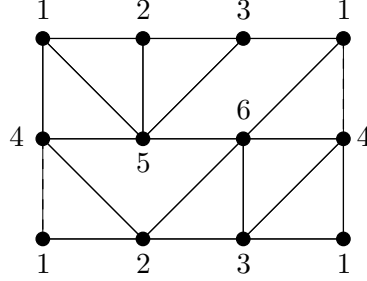
L'inégalité  $\text{Chr}_0(\Sigma_p) \leq \frac{5 + \sqrt{25 - 24\chi(\Sigma) + 24p}}{2}$  étant déjà démontrée dans le lemme 3.3, la démonstration est achevée.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.3.* — Le fait que  $\text{Chr}_0(\mathbb{P}_2^2) = 5$  découle des théorèmes 1.3 et 1.12.

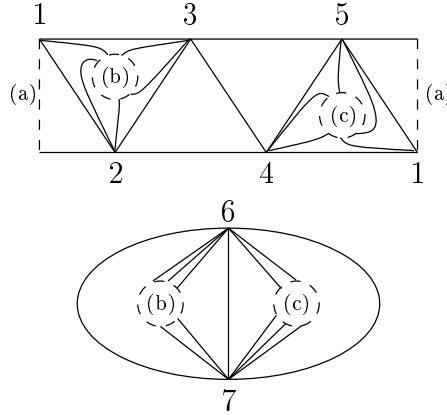
Le calcul de  $\text{Chr}_0(\mathbb{K}_2^2)$  repose sur une amélioration de l'estimation faite par le théorème 3.1 dans le cas où  $p \geq (\text{Chr}(\Sigma) - 1)/2$  en utilisant le plongement explicite d'un graphe complet dans la surface. Dans le cas de la bouteille de Klein, le plongement du graphe complet à 6 sommets est représenté sur la figure 1.

En enlevant les faces (125) et (346), on obtient un plongement propre de  $K_6$  dans  $\mathbb{K}_2^2$ .

Il reste à calculer  $\text{Chr}_0(\#3\mathbb{P}_2^2)$ . On sait déjà que  $\text{Chr}_0(\#3\mathbb{P}_2^2) \leq 7$  (théorème 3.1), il suffit donc d'exhiber un plongement propre de  $K_7$ . On procède

FIGURE 1. Plongement de  $K_6$  dans  $\mathbb{K}^2$ 

de la manière suivante : topologiquement, on enlève deux disques au ruban de Möbius  $\mathbb{M}^2$  et on colle un pantalon (une sphère privée de trois disques) sur les deux composantes de bord ainsi créées. Pour construire le graphe, on part du graphe  $K_5$  plongé dans le ruban de Möbius et on ajoute deux sommets situés sur le troisième bord du pantalon. Les détails de la construction sont représentés sur la figure 2.

FIGURE 2. Plongement propre de  $K_7$  dans  $\#3\mathbb{P}_2^2$ 

En haut de la figure est représenté le graphe  $K_5$  plongé dans  $\mathbb{M}^2$ . On enlève deux disques situés dans les faces (123) et (451). En bas est représenté le pantalon, les deux bords intérieurs étant recollés sur  $\mathbb{M}^2$ . Les sommets 6 et 7 sont bien reliés entre eux et aux cinq premiers sommets.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.4.* — Pour calculer les nombres chromatiques traités ici, on procède comme on l'a fait pour  $\text{Chr}_0(\mathbb{K}_2^2)$  : on considère le découpage de  $\Sigma$  induit par le plongement d'un graphe complet maximal et on cherche comment enlever des disques de manière à placer tous les sommets sur le bord.

On commence par le cas  $\chi = -2$ . Des plongements de  $K_8$  dans  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  et  $\#4\mathbb{P}_2^2$  ont été décrits respectivement par L. Heffter [Hef91] et I. N. Kagno [Kag35]. La figure 3 représente un plongement de  $K_8$  dans  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  : la surface  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  est obtenue en recollant les deux pantalons représentés sur la figure le long de leurs bords, la position des sommets de  $K_8$  indiquant l'orientation du recollement. On peut remarquer que l'arête (34) peut être placée arbitrairement d'un coté ou de l'autre du bord des pantalons portant les deux sommets. En fonction de ce choix, on obtient une surface orientable ou non.

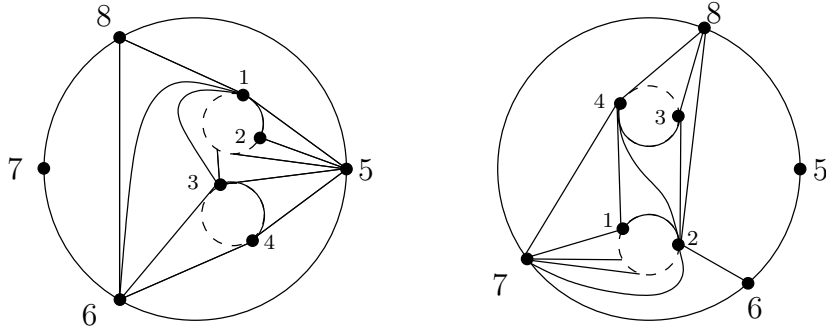


FIGURE 3. Plongement de  $K_8$  dans  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$

On peut noter que la décomposition de la surface induite par le plongement comporte un quadrilatère (5628). Si on enlève cette face, on peut ensuite enlever deux autres disques, par exemple le long des arêtes (13) et (47), de manière à obtenir un plongement propre de  $K_8$  dans  $(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)_3$  ou  $(\#4\mathbb{P}_2^2)_3$  selon le choix d'orientation. Par conséquent,  $\text{Chr}_0((\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)_3) = \text{Chr}_0(\#4\mathbb{P}_2^2)_3 = 8$ .

La figure 3 ne permet pas de montrer que  $\text{Chr}_0((\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)_2) = 8$  car les huit sommets ne sont pas sur le bord de deux quadrilatères. Cependant, le plongement de  $K_8$  dans  $(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)_2$  décrit dans [Rin74] (p. 23, table (2.9)) vérifie cette propriété, les deux quadrilatères étant (0246) et (1357).

Le plongement de  $K_9$  dans  $\#5\mathbb{P}_2^2$  a été construit par H.S.M. Coxeter dans [Cox43]. Ce plongement triangule la surface et on peut vérifier qu'on peut trouver trois faces dont les sommets sont tous distincts (par exemple les faces (129), (678) et (345) de la figure 11 de [Cox43]). En enlevant ces faces, on obtient un plongement propre de  $K_9$  dans  $\#5\mathbb{P}_2^2$ .

Le plongement de  $K_9$  dans  $\#3\mathbb{T}^2$  exhibé par L. Heffter dans [Hef91] comporte une face hexagonale ayant 5 sommets distincts. En enlevant cette face et deux autres disques, on peut donc obtenir un plongement propre de  $K_9$  dans  $\#3\mathbb{T}_3^2$ . Le cas de  $\#6\mathbb{P}_3^2$  s'obtient par somme connexe de  $\#5\mathbb{P}_3^2$  avec  $\mathbb{P}^2$ .

Dans [Bos39], R. C. Bose a donné la construction d'un plongement de  $K_{10}$  dans  $\#7\mathbb{P}_3^2$ , elle est aussi étudiée (et illustrée par une figure) par H. Coxeter dans [Cox43]. Le graphe triangule la surface et on peut trouver deux triangles

n'ayant pas de sommets communs (voir la figure 14 de [Cox43]). Les quatre autres sommets du graphe peuvent se placer sur le bord de deux disques ; en enlevant quatre disques, on peut donc bien placer tous les sommets sur le bord.

Le plongement de  $K_{10}$  dans  $\#4\mathbb{T}^2$  exhibé dans [Hef91] comporte des quadrilatères, chacun ayant ses quatre sommets distincts. Après avoir enlevé un de ces quadrilatères, il reste 6 sommets à placer sur un bord, ce qu'on peut faire en enlevant deux autres faces triangulaires (les trois faces sont  $(2, 1, 10, 4)$ ,  $(3, 6, 8)$ ,  $(1, 4, 5)$  dans la construction de Heffter).  $\square$

#### 4. Construction de valeurs propres multiples

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 1.3. Elle est très similaire à la démonstration du théorème 1.2 de [Jam14]. On va donc rappeler les différentes étapes en indiquant les modifications à apporter. Le principe consiste à faire tendre le début du spectre de la surface vers celui d'un laplacien combinatoire d'un graphe complet, puis d'utiliser la propriété de stabilité du spectre de ce graphe (cf. [CdV88] les rappels ci dessous) pour exhiber une valeur propre multiple sur la surface.

Par cette méthode on va en fait montrer un résultat analogue pour un graphe fini quelconque, cela nous sera utile en particulier pour démontrer le corollaire 1.10. L'énoncé général fait intervenir l'invariant de graphe forgé par Y. Colin de Verdière dans [CdV90] (voir aussi [CdV98]). Rappelons que cet invariant, qu'on notera  $\mu(\Gamma)$ , peut se définir comme étant la multiplicité maximale de la deuxième valeur propre des opérateurs de Schrödinger combinatoires sur le graphe  $\Gamma$  pour lesquels cette valeur propre multiple vérifie l'hypothèse de transversalité d'Arnol'd formalisée dans [CdV88] (on dit alors que la multiplicité est stable). Si on note  $M$  la matrice de cet opérateur de Schrödinger, cette hypothèse de transversalité consiste en ce que dans l'espace des matrices symétriques, le sous-espace des matrices d'opérateurs de Schrödinger et le sous-espace des matrices possédant une deuxième valeur propre de même multiplicité se coupent transversalement. En pratique, on manipulera des laplaciens à densité sur le graphe plutôt que des opérateurs de Schrödinger, les deux points de vue étant équivalents (cf. § 2.2). On peut consulter [CdV88], [CdV98] ou [Jam09] pour une description plus détaillée de cette propriété de transversalité et de son utilisation.

**Théorème 4.1.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe admettant un plongement propre dans une surface compacte à bord et  $\Sigma$ . Il existe des densités  $\gamma \in C^\infty(\Sigma)$ ,  $\rho \in C^\infty(\partial\Sigma)$  et une métrique  $g$  sur  $\Sigma$  telles que la multiplicité de  $\sigma_1(\Sigma, g, \rho, \gamma)$  égale  $\mu(\Gamma)$ .*

Le théorème 1.3 s'en déduit en remarquant d'une part qu'un graphe complet à  $n$  sommets vérifie  $\mu(K_n) = n - 1$  ([CdV88], section 4, th. 1), et d'autre part que si  $n = \text{Chr}_0(\Sigma)$ , alors  $K_n$  admet un plongement propre dans  $\Sigma$  (théorème 3.1 de la section précédente).

On peut aussi en déduire le critère de plongement qui suit :

**Corollaire 4.1.** — *Si  $\Gamma$  admet un plongement propre dans  $\Sigma$ , alors  $\mu(\Gamma) \leq m_1(\Sigma)$ .*

Le corollaire 1.10 est une conséquence de ce dernier ; il sera traité au paragraphe 4.1.

La première étape de la démonstration du théorème 4.1 consiste à construire une variété dont le début du spectre de Steklov tend vers celui d'un laplacien combinatoire pour une métrique donnée sur  $\Gamma$ , cette variété pouvant s'interpréter comme un voisinage tubulaire de  $\Gamma$ . En dimension 2, cette variété, qu'on notera  $\Omega$ , est formée de  $n$  demi-disques ( $n$  étant le nombre de sommets de  $\Gamma$ ), deux demi-disques étant reliés par un rectangle fin si les sommets correspondants sont reliés par une arête. Sur ce domaine, on considère le spectre de Steklov-Neumann (voir les rappels de la section 2.1) : le bord de Steklov est formé des diamètres des demi-disques, et on pose la condition de Neumann sur le reste du bord.

**Lemme 4.2** ([Jam14], **théorème 4.3**). — *Il existe une famille de métriques  $g_\varepsilon$  sur  $\Omega$  telle que les  $n$  premières valeurs propre de Steklov de  $(\Omega, g_\varepsilon)$  tendent vers le spectre de  $\Delta_\Gamma$ , avec convergence des espaces propres.*

**Remarque 4.2.** — Dans [Jam14], ce théorème est démontré pour des densités uniformes sur  $\partial\Omega_S$  et sur les sommets du graphes. Si on munit les sommets du graphe d'une autre mesure, on peut adapter la démonstration en munissant chaque composante de  $\partial\Omega_S$  (les diamètres des demi-disques) de la densité correspondante. On peut donc faire tendre le spectre de  $\Omega$  non seulement vers le spectre d'un laplacien sur  $\Gamma$ , mais aussi d'un opérateur de Schrödinger.

Le deuxième ingrédient de la démonstration est un résultat de convergence du spectre d'une surface vers celui d'un de ses domaines. Sur un domaine  $U$  d'une surface à bord  $\Sigma$ , on considérera le problème de Steklov-Neumann avec  $\partial U_S = \partial U \cap \partial\Sigma$  comme bord de Steklov et  $\partial U_N = \partial U \setminus \partial U_S$  comme bord de Neumann :

**Lemme 4.3.** — *Soit  $(\Sigma, g)$  une surface riemannienne compacte à bord,  $\rho$  une densité sur  $\partial\Sigma$  et  $U$  un domaine de  $\Sigma$  à bord  $C^1$  par morceaux tel que  $\partial U_S = \partial U \cap \partial\Sigma$  soit non vide. Il existe des familles de densités  $\gamma_\varepsilon \in C^\infty(\Sigma)$  et de métrique  $g_\varepsilon$  telles que  $\sigma_k(\Sigma, g_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, \rho) \rightarrow \sigma_k(U, \partial U_S, g, \rho|_{\partial U_S})$  avec convergence des espaces propres quand  $\varepsilon$  tend vers 0.*

La démonstration est la même que celle du théorème 3.8 de [Jam14], avec l'adaptation à la dimension 2 introduite par Y. Colin de Verdière dans [CdV87]. On introduit une densité singulière  $\bar{\gamma}_\eta$  qui vaut 1 sur  $U$  et  $\eta$  sur  $\Sigma \setminus U$ , une métrique  $\bar{g}_\eta$  égale à  $g$  sur  $U$  et à  $\eta^2 g$  sur  $\Sigma \setminus U$  et on travaille avec les familles de formes quadratiques et de normes de Hilbert induites par  $\bar{\gamma}_\eta$  et  $\bar{g}_\eta$  :

$$(4.4) \quad Q_\eta(f) = \inf_{\tilde{f}|_{\partial M} = f} \left( \int_U |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}v_g + \eta^3 \int_{M \setminus U} |\mathrm{d}\tilde{f}|^2 \mathrm{d}v_g \right)$$

et  $|f|_\eta = \int_{\partial U_S} f^2 dv_g + \eta^2 \int_{\partial M \setminus \partial U_S} f^2 dv_g$ . Le reste de la démonstration (convergence de spectre et lissage de la densité et de la métrique) est identique à [Jam14].

*Démonstration du théorème 4.1.* — Soit  $\Gamma$  admettant un plongement propre dans  $\Sigma$ . On peut trouver un voisinage de  $\Gamma$  dans  $\Sigma$  difféomorphe au domaine  $\Omega$  décrit précédemment. Étant donnée une métrique et une mesure sur  $\Gamma$ , on peut trouver une famille de métrique  $g_\varepsilon$  sur  $\Omega$  dont le début du spectre de Steklov-Neumann tend vers le spectre du laplacien combinatoire sur  $\Gamma$  (lemme 4.2). Pour toute métrique sur  $\Omega$  on peut trouver une famille de densités sur  $\Sigma$  et  $\partial\Sigma$  telle que le spectre de Steklov de  $\Sigma$  tende vers celui de  $\Omega$  (lemme 4.3). Par conséquent, il existe des familles de métriques  $g_\varepsilon$  de densités  $\rho_\varepsilon$  (étendant la métrique  $g_\varepsilon$  et la densité  $\rho$  de  $\Omega$ ) et de densités  $\gamma_\varepsilon$  sur  $\Sigma$  telles que le début du spectre de  $(\Sigma, g_\varepsilon, \rho_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$  tende vers le spectre du laplacien combinatoire sur  $\Gamma$ .

En munissant  $\Gamma$  de la métrique et de la mesure réalisant la multiplicité  $\mu(\Gamma)$ , on peut faire tendre le spectre de  $\Sigma$  vers un spectre limite (la métrique et la densité étant alors dégénérées) ayant la multiplicité souhaitée. Pour que  $\sigma_1(\Sigma, g_\varepsilon, \rho_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$  soit de multiplicité  $\mu(\Gamma)$  pour une métrique  $g_\varepsilon$  et des densités  $\rho_\varepsilon$  et  $\gamma_\varepsilon$  lisses, on utilise la propriété de stabilité de la multiplicité : quitte à déformer l'opérateur sur  $\Gamma$ , on peut trouver un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\sigma_1(\Sigma, g_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$  soit de multiplicité  $\mu(\Gamma)$ .  $\square$

**4.1. Critère de plongement non entrelacé.** — Cette section est consacrée au corollaire 1.10. Sa démonstration repose sur les propriétés de l'invariant  $\mu$  des graphes défini par Y. Colin de Verdière et déjà utilisé dans le paragraphe précédent. On utilisera en particulier le fait que cet invariant permet de caractériser les graphes non entrelacés :

**Théorème 4.3** ([RST95],[BCdV95],[LS98]). — *Un graphe  $\Gamma$  est non entrelacé si et seulement si  $\mu(\Gamma) \leq 4$ .*

Le fait  $\mu(\Gamma) \leq 4$  implique le non entrelacement du graphe découle de la caractérisation par mineurs exclus des graphes non entrelacés due à N. Robertson, P. Seymour et R. Thomas [RST95] et du calcul de  $\mu$  sur les graphes de la famille de Petersen fait dans [BCdV95]. La réciproque a été montrée par L. Lovász et A. Schrijver dans [LS98].

Le corollaire 1.10 découle de la remarque suivante : sachant que  $m_1(\mathbb{M}^2) = m_1(\mathbb{P}_2^2) = 4$ , si  $\Gamma$  admet un plongement propre dans  $\mathbb{M}^2$  ou  $\mathbb{P}_2^2$ , alors  $\mu(\Gamma) \leq 4$  d'après le théorème 4.1. Le théorème 4.3 permet alors de conclure.

**Remarque 4.4.** — Si  $\Gamma \rightarrow \Sigma$  est un plongement propre d'un graphe dans une surface et  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un plongement de cette surface dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut espérer par composition obtenir un plongement non entrelacé de  $\Gamma$ . Si le plongement usuel  $\mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  semble suffire pour tout plongement propre  $\Gamma \rightarrow \mathbb{M}^2$ , il n'en va pas de même pour  $\mathbb{P}_2^2$  : si on considère le plongement  $\mathbb{P}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  obtenu en enlevant un disque au plongement  $\mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , il existe des plongements propres  $\Gamma \rightarrow \mathbb{M}^2$  tels que le plongement  $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$  induit soit entrelacé (on utilise le fait que le

bord et l'âme du ruban de Möbius forment un entrelacs non trivial). Mais cela n'exclut pas l'existence, pour un plongement  $\Gamma \rightarrow \mathbb{M}^2$  fixé, d'un autre plongement  $\mathbb{P}_2^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que le plongement de  $\Gamma$  soit non entrelacé.

## 5. Bornes sur la multiplicité

**5.1. Propriétés de l'ensemble nodal d'une fonction propre.** — Ce paragraphe sera consacré aux propriétés générales de l'ensemble nodal des fonctions propres du problème de Steklov. Il s'agit généralement de rappels de résultats montrés dans [FS12], [Jam14] et [KKP], ou remontant à l'étude des fonctions propres du laplacien. Certaines sont reformulées ou précisées. Elles sont regroupées en deux théorèmes : le théorème 5.1 rassemble les propriétés locales de l'ensemble nodal et le théorème 5.2 les propriétés topologiques globales. Ces résultats ont généralement été démontrés dans le cas homogène mais leur démonstration reste valide dans le cas général. Si une fonction  $f$  s'annule en un point  $p$ , on appelle ordre d'annulation de  $f$  en  $p$  le plus petit entier  $k$  tel que  $\nabla^k f \neq 0$ .

**Théorème 5.1** ([Che76], [FS12]). — *Soit  $p$  un point de l'ensemble nodal d'une fonction propre  $f$  du problème de Steklov sur  $\Sigma$ . On note  $k$  l'ordre d'annulation de  $f$  en  $p$ .*

*Au voisinage de  $p$  l'ensemble nodal est la réunion de  $k$  arcs de courbes s'intersectant en  $p$ , de courbure géodésique nulle en  $p$  et formant un système équiangulaire. De plus :*

- *Si  $p$  un point intérieur à  $\Sigma$ , alors  $p$  est l'extrémité de  $2k$  arcs nodaux ;*
- *Si  $p$  est sur le bord de  $\Sigma$ , alors  $p$  est l'extrémité de  $k$  arcs nodaux rencontrant transversalement le bord.*

On peut en déduire, comme dans [Che76], que l'ensemble nodal est la réunion de sous-variétés de dimension 1 immergées dans  $\Sigma$ , chaque sous-variété étant soit un cercle ne rencontrant pas le bord, soit un intervalle dont les extrémités sont sur le bord. On appellera *lignes nodales* ces sous-variétés. On peut aussi interpréter l'ensemble nodal comme un graphe plongé dans  $\Sigma$ , les sommets étant les points critiques de la fonction propre. On appellera *arêtes nodales* les arêtes de ce graphe. Soulignons que les arêtes nodales sont plongées alors que les lignes nodales sont seulement immergées.

On aura aussi besoin du lemme qui suit et qui assure l'existence d'une fonction propre s'annulant à un ordre élevé quand la multiplicité est grande :

**Lemme 5.1.** — *Soit  $k$  un entier positif,  $p$  un point de  $\Sigma$  et  $E$  un espace propre du problème de Steklov. Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *$p$  est un point intérieur à  $\Sigma$  et  $E$  est de dimension au moins  $2k$  ;*
- *$p$  est sur le bord de  $\Sigma$  et  $E$  est de dimension au moins  $k + 1$  ;*

*alors  $E$  contient une fonction qui s'annule à l'ordre  $k$  en  $p$ .*

*Démonstration.* — Le cas où  $p$  est intérieur à  $\Sigma$  est traité dans [Bes80]. On va donc supposer sur  $p \in \partial\Sigma$  et que  $E$  est de dimension au moins  $k + 1$ . Par une déformation conforme, on peut identifier localement la surface au demi-plan supérieur muni des coordonnées  $(x, y)$  et le point  $p$  au point  $(0, 0)$ .

Comme  $E$  est de dimension au moins  $k + 1$ , on peut trouver une fonction non nulle de  $E$  telle que

$$(5.2) \quad f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = \dots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(p) = 0.$$

On sait aussi que  $f$  vérifie l'équation aux valeurs propres  $\partial f / \partial y = \sigma \rho f$  en tout point du bord. En dérivant cette relation par rapport à  $x$  et en l'évaluant au point  $p$ , on obtient que

$$(5.3) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) = \dots = \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y}(p) = 0.$$

Ces relations suffisent pour conclure si  $k = 1$  ou  $2$ .

Enfin, la fonction  $f$  est harmonique relativement à la densité  $\gamma$ , c'est-à-dire qu'elle vérifie la relation  $\operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0$ . Par conséquent,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  peut s'écrire comme une expression d'ordre 0 ou 1 en  $f$ , et donc, en utilisant les relations déjà obtenues,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) = 0$  si  $k \geq 3$ . En dérivant successivement l'équation  $\operatorname{div}(\gamma \nabla f) = 0$ , on obtient par récurrence que toutes les dérivées partielles de  $f$  d'ordre au moins 2 par rapport à  $y$  sont nulles en  $p$  jusqu'à l'ordre souhaité.  $\square$

**Théorème 5.2.** — *Tous les domaines nodaux rencontrent le bord de la surface  $\Sigma$ . Les domaines nodaux et les composantes connexes du graphe nodal d'une fonction propre sont incompressibles dans la surface  $\Sigma$ . De plus, si  $\Gamma$  est l'union d'une ou plusieurs composantes connexes du graphe nodal, alors on a la relation  $\chi(\Gamma) \geq \chi(\Sigma)$ .*

*Démonstration.* — Les premières propriétés énoncées dans ce théorème sont déjà connues (voir par exemple [Jam14]), mais nous allons rappeler leur démonstration.

Si un domaine nodal ne rencontre pas le bord de  $\Sigma$ , alors la fonction propre est nulle sur toute la frontière du domaine, donc elle est nulle à l'intérieur du domaine puisqu'elle est harmonique et par conséquent elle est nulle partout selon la propriété d'unique prolongement.

Supposons qu'un domaine nodal  $D$  contienne une courbe contractile dans  $\Sigma$  mais pas dans  $D$ . Alors le disque bordé par cette courbe contient un domaine nodal distinct de  $D$  et qui ne rencontre pas le bord de  $\Sigma$ . Or on vient de voir que c'est impossible, donc toute courbe de  $D$  contractile dans  $\Sigma$  est contractile dans  $D$ . Le même argument montre que le graphe nodal est incompressible.

Enfin, si on note  $\Gamma$  la réunion d'une ou plusieurs composantes connexes du graphe nodal, et  $D_i$  les composantes connexes de  $\Sigma \setminus \Gamma$ , la formule d'Euler-Poincaré nous dit que

$$(5.4) \quad \chi(\Sigma) = \chi(\Gamma) + \sum_i \chi(D_i).$$

Pour un  $i$  donné, la caractéristique d'Euler de l'intérieur de  $D_i$  est au plus égale à 1. Mais comme  $D_i$  contient nécessairement un domaine nodal de la fonction propre, il rencontre le bord. Donc  $D_i$  est la réunion de son intérieur et d'un (ou plusieurs) intervalle ouvert du bord de  $\Sigma$ , donc  $\chi(D_i) \leq 0$ . Par conséquent,  $\chi(\Gamma) \geq \chi(\Sigma)$ .  $\square$

**Remarque 5.3.** — L'argument d'incompressibilité de l'ensemble nodal permet en fait de montrer un résultat plus fort mais dont nous ne ferons pas usage : l'ensemble nodal ne contient pas de courbe fermée qui borde un domaine.

**5.2. Majoration de multiplicité.** — Le but de cette section est de démontrer les bornes sur la multiplicité données par les théorèmes 1.5 et 1.8.

*Démonstration du théorème 1.5.* — La démonstration de l'inégalité (1.7) reprend la technique de N. Nadirashvili [Nad88] avec les améliorations que permet le problème de Steklov. On fixe un entier  $k \geq 1$  et on note  $m$  la multiplicité de la  $k$ -ième valeur propre. On se donne aussi un point  $p \in \partial\Sigma$ . Selon le lemme 5.1, on peut trouver une fonction non nulle dans le  $k$ -ième espace propre qui s'annule à l'ordre  $m - 1$  en  $p$ . Le point  $p$  est donc l'extrémité de  $m - 1$  lignes nodales (théorème 5.1).

Parmi les lignes nodales d'extrémité  $p$ , il y en a au plus  $1 - \chi(\Sigma)$  dont les deux extrémités sont  $p$ . En effet, si on note  $q$  le nombre de lignes allant de  $p$  à  $p$ , la composante connexe de  $p$  dans le graphe nodal aura une caractéristique d'Euler au plus égal à  $1 - q$ , et donc  $\chi(\Sigma) \leq 1 - q$  d'après le théorème 5.2. On déduit de cette remarque que  $p$  est l'extrémité d'au moins  $m + \chi(\Sigma) - 2$  lignes distinctes.

On peut alors majorer  $m$  en appliquant la formule d'Euler-Poincaré à la surface  $\Sigma$ . Contrairement à ce qui est fait dans la démonstration du théorème 5.2, on considérera la surface *ouverte*, c'est-à-dire en ignorant le bord et les sommets du graphe nodal qui s'y trouve. On notera  $\dot{\Gamma}$  le graphe ainsi obtenu. On a alors

$$(5.5) \quad \chi(\Sigma) = \chi(\dot{\Gamma}) + \sum_i \chi(D_i).$$

Chaque domaine nodal vérifie  $\chi(D_i) \leq 1$  donc  $\sum_i \chi(D_i) \leq k + 1$  selon le théorème de Courant. Comme  $\dot{\Gamma}$  est la réunion d'au moins  $m + \chi(\Sigma) - 2$  lignes nodales homéomorphes à des intervalles ouverts, sa caractéristique d'Euler vérifie  $\chi(\dot{\Gamma}) \leq -m - \chi(\Sigma) + 2$ . On obtient finalement que

$$(5.6) \quad m \leq k + 3 - 2\chi(\Sigma).$$

$\square$

Avant d'entamer la démonstration du théorème 1.8, on va montrer une propriété des fonctions propres qui sera utile pour établir l'inégalité (1.9) :

**Lemme 5.4.** — *Soit  $f$  une fonction propre de Steklov et  $c > 0$  un réel positif. Chaque composante connexe de l'ensemble  $f^{-1}(]-c, +\infty[)$  contient au moins un domaine nodal positif de  $f$ . En particulier, si  $f$  est associée à la première valeur propre non nulle, cet ensemble est connexe.*

*Démonstration.* — Soit  $D$  une composante connexe de  $f^{-1}(]-c, +\infty[)$  qui ne contient pas de domaine nodal positif. Comme  $f$  est harmonique, le maximum de  $f$  sur  $D$  est atteint en un point  $x$  situé sur le bord de la surface.

On a nécessairement  $f(x) < 0$ . En effet, si  $f(x) > 0$  alors  $D$  contient un domaine nodal positif. Si  $f(x) = 0$ , alors  $x$  est l'extrémité d'une ligne nodale de  $f$  qui traverse le domaine, donc  $f$  change de signe dans  $D$ , en particulier elle prend des valeurs strictement positive dans  $D$  ce qui est impossible.

Au point  $x$ , la fonction  $f$  vérifie l'équation aux valeurs propres  $\partial f / \partial \nu = \rho \sigma f$ . Par conséquent,  $(\partial f / \partial \nu)(x)$  est strictement négatif. Comme  $\nu$  est un vecteur *sortant* normal au bord, on a une contradiction avec le fait que  $x$  soit le maximum de  $f$  sur  $D$ .

Pour finir, d'après ce qui précède le nombre de composantes connexes de  $f^{-1}(]-c, +\infty[)$  est majoré par le nombre de domaines nodaux positifs de  $f$ . Or, si  $f$  est associée à la première valeur propre non nulle elle a exactement deux domaines nodaux, un positif et un négatif. Par conséquent,  $f^{-1}(]-c, +\infty[)$  n'a qu'une composante connexe.  $\square$

Le théorème 1.8 repose sur un théorème de B. Sévenec que nous allons rappeler ici :

**Théorème 5.5** ([Sév02], **théorème 5**). — *Si  $\Sigma$  est une surface close de caractéristique d'Euler strictement négative et  $E$  un espace de fonction continues sur  $\Sigma$  tel que pour toute fonction  $f \in E \setminus \{0\}$ , les ensembles  $f^{-1}]0, +\infty[$  et  $f^{-1}[0, +\infty[$  sont connexes et non vides, alors  $\text{Dim}(E) \leq 5 - \chi(\Sigma)$ .*

**Remarque 5.6.** — Le principe du maximum assure que pour une fonction propre de Steklov  $f \neq 0$ , l'ensemble  $f^{-1}[0, +\infty[$  n'a pas de composante connexe disjointe de  $f^{-1}]0, +\infty[$ .

*Démonstration du théorème 1.8.* — On commence par l'inégalité (1.8). En collant un disque sur chaque composante du bord de  $\Sigma$ , on obtient une surface close  $\bar{\Sigma}$  de caractéristique d'Euler  $\bar{\chi} = \chi + l$ .

On prolonge chaque fonction propre  $f$  de la première valeur propre sur chacun de ces disques de la manière suivante : en notant  $p$  le centre du disque et  $x$  un point générique sur le bord, on fixe  $f(p) = 0$  et on interpole linéairement  $f$  sur le segment  $[p, x]$ . La fonction  $f$  ainsi prolongée est continue, et elle a deux domaines nodaux, un positif et un négatif (en effet, comme elle est de signe constant sur  $[px]$ , les points intérieurs aux disques appartiennent aux mêmes domaines nodaux

que les points de  $\Sigma$ ). Compte tenu de la remarque 5.6, cette construction assure que les ensembles  $f^{-1}[0, +\infty[$  et  $f^{-1}] - \infty, 0]$  sont eux aussi connexes. D'après le théorème de Sévenec, cet espace est de dimension au plus  $5 - \bar{\chi}$ . On a donc  $m_1 \leq 5 - \bar{\chi} = 5 - \chi - l$ .

Pour montrer l'inégalité (1.9), on va encore appliquer le théorème 5 de Sévenec mais à un espace plus grand : on considère l'espace  $E$  engendré par les fonctions propres prolongées à  $\bar{\Sigma}$  comme précédemment et par la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi \equiv 1$  sur  $\Sigma$ ,  $\varphi(p) = -1$  et en interpolant la fonction de manière affine sur les rayons du disque (comme on suppose que  $l = 1$ , il n'y a qu'un disque et le point  $p$  est unique). L'espace  $E$  est constitué de fonction continues, on doit donc montrer que ces fonctions (à l'exception de la fonction nulle) ont exactement deux domaines nodaux, un positif et un négatif.

Une fonction de  $E$  est une combinaison linéaire  $f_{a,b} = a \cdot f + b \cdot \varphi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f$  étant une fonction propre prolongée à  $\bar{\Sigma}$ . Si  $a$  ou  $b$  est nul, il est clair que la fonction a un seul domaine nodal positif.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que  $a = 1$  et que  $b$  est strictement positif. La fonction  $f_{a,b}$  est égale à  $f + b$  sur  $\Sigma$  et  $f_{a,b}(p) = -b$ . Selon le lemme 5.4 appliqué à la fonction  $f$ , l'ensemble  $f_{a,b}^{-1}(]0, +\infty[) = f^{-1}] - b, +\infty[$  restreint à  $\Sigma$  est connexe. Comme  $f_{a,b}$  est affine sur les rayons du disque et négative en son centre, les points du disque où  $f_{a,b}$  est positive sont connectés au domaine nodal positif sur  $\Sigma$ . La fonction  $f_{a,b}$  n'a donc globalement qu'un seul domaine nodal positif.

En restriction à  $\Sigma$ , la fonction  $f_{a,b}$  peut avoir plusieurs domaines nodaux négatifs. Cependant, ils sont connectés à  $p$  par des rayons sur lesquels  $f_{a,b}$  est négative. Il n'y a donc qu'un seul domaine nodal négatif sur  $\bar{\Sigma}$ . Comme  $E$  est de dimension  $m_1 + 1$ , l'application du théorème de Sévenec donne  $m_1 + 1 \leq 5 - \bar{\chi} = 4 - \chi$ , soit  $m_1 \leq 3 - \chi$ .  $\square$

**5.3. Première valeur propre en petit genre.** — On commencera dans ce paragraphe par démontrer le théorème 1.11, puis on montrera séparément les calculs des trois valeurs de  $m_k$  annoncées dans par le théorème 1.12, les deux premières dans ce paragraphe et la 3<sup>e</sup> dans le suivant.

*Démonstration du théorème 1.11.* — Pour majorer la multiplicité il s'agit, comme dans [FS12], [Jam14] et [KKP], de se ramener à la démonstration utilisée dans le cas des opérateurs de Schrödinger sur les surfaces closes. La minoration découle du théorème 1.3.

Dans le cas de  $\mathbb{T}_p^2$ , on fixe un point  $x$  intérieur à la surface et on suppose que la multiplicité de  $\sigma_1$  est au moins 7. Il existe alors un espace de dimension 2 de fonctions propres qui s'annulent à l'ordre 3 en  $x$ , et on note  $f_\theta$  le cercle unité de cet espace. Si on ferme la surface en contractant chaque bord de  $\mathbb{T}_p^2$  en un point, les lignes nodales de  $f_\theta$  qui atteignent le bord se prolongent sur le quotient en des courbes  $C^1$  par morceaux. On peut alors reprendre les arguments de [Bes80]

pour montrer que sur le quotient, l'ensemble nodal est formé d'exactly trois lacets disjoints non homotopes et aboutir à une contradiction en faisant varier  $\theta$ .

Sur  $\mathbb{K}_p^2$ , on se ramène de la même manière à la démonstration du théorème 4.1 de [CdV87] en quotientant chaque bord sur un point.  $\square$

Avant de traiter le cas de  $\mathbb{P}_2^2$ , on va montrer que  $m_1(\mathbb{M}^2) = 4$  par une méthode légèrement différente de celle du théorème 1.5. Cette démonstration servira de base pour les deux propositions qui vont suivre.

On commence par montrer qu'il existe une fonction propre pour laquelle il existe au moins 6 extrémités de lignes nodales qui rejoignent le bord. Soit  $x$  un point du bord de  $\mathbb{M}^2$ . Si la multiplicité de  $\sigma_1$  est supérieure ou égale à 5, il existe une fonction propre pour laquelle  $x$  est l'extrémité d'au moins quatre lignes nodales. S'il est l'extrémité d'au moins 5 lignes, alors il y a au moins six extrémités de lignes qui rejoignent le bord puisque ce nombre est toujours pair. S'il est l'extrémité d'exactly quatre lignes alors le signe de la fonction propre est constant le long du bord au voisinage de  $x$ , par conséquent la fonction propre change de signe ailleurs sur le bord (sinon la fonction est positive ou nulle partout sur le bord, donc partout sur  $\mathbb{M}^2$ ) et il y a donc au moins six extrémités de lignes le long du bord. Si on définit une application  $\mathbb{M}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$  par contraction du bord de  $\mathbb{M}^2$  sur un point (qu'on notera encore  $x$ ), on peut considérer l'image de la décomposition nodale de  $\mathbb{M}^2$  par cette application : elle décompose  $\mathbb{P}^2$  en deux domaines, et  $x$  est l'extrémité de six arcs nodaux. Or G. Besson a montré dans [Bes80] qu'une telle décomposition de  $\mathbb{P}^2$  est impossible.

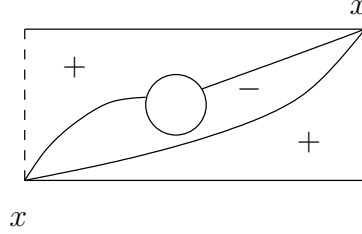
**Proposition 5.7.** —  $m_1(\mathbb{P}_2^2) = 4$ .

*Démonstration.* — On représente  $\mathbb{P}_2^2$  comme étant  $\mathbb{M}^2$  privé d'un disque. On parlera de bord de  $\mathbb{M}^2$  et de bord du disque pour désigner les deux bords de  $\mathbb{P}_2^2$ .

Le point de départ de la démonstration est le même que celle qui précède. On suppose que la multiplicité de  $\sigma_1(\mathbb{P}_2^2)$  est 5. Étant donné un point  $x$  du bord de  $\mathbb{M}^2$ , il existe une fonction propre  $f$  telle que  $x$  soit localement l'extrémité de quatre lignes nodales. On a vu précédemment qu'il ne peut pas y avoir d'autres extrémités de lignes nodales sur le bord de  $\mathbb{M}^2$ . Le signe de  $f$  le long de ce bord est donc constant et on le supposera positif. Comme les deux domaines nodaux de  $f$  rencontrent le bord de  $\mathbb{P}_2^2$ , le domaine négatif rencontre nécessairement le bord du disque.

Si on considère un arc qui part orthogonalement de  $x$  (avec par conséquent deux lignes nodales de part et d'autre, selon le théorème 5.1) et qui rejoint un autre point du bord en restant dans le domaine nodal positif, il découpe nécessairement le ruban  $\mathbb{M}^2$  en un rectangle comme sur la figure 4. La décomposition nodale de  $\mathbb{P}_2^2$  est donc nécessairement topologiquement équivalente à celle de cette figure, à ceci près que le bord du disque peut être entièrement contenu dans le domaine nodal négatif.

Après avoir contracté le bord du disque sur un point qu'on notera  $p$ , on pourra donc toujours trouver dans  $\mathbb{M}^2$  un lacet  $\gamma_x$  d'extrémité  $x$ , unique à homotopie

FIGURE 4. Décomposition nodale de  $\mathbb{P}_2^2$ 

près, contenu dans le domaine nodal négatif, passant par  $p$  et homotope à un générateur du groupe fondamental de  $\mathbb{M}^2$ .

Supposons maintenant qu'on déplace continûment le point  $x$ . Le lacet  $\gamma_x$  peut alors se déformer continûment avec la contrainte de toujours passer par  $p$ . Si on fait faire à  $x$  un tour complet du bord de  $\mathbb{M}^2$  en partant d'un point  $x_0$ , on revient à la même décomposition de  $\mathbb{P}_2^2$ , donc le lacet  $\gamma_x$  devient homotope au lacet initial  $\gamma_{x_0}$ . Or, chacun des arcs de  $\gamma_{x_0}$  allant de  $x_0$  à  $p$  serait homotope à sa concaténation avec un générateur du groupe fondamental du bord, ce qui est impossible.  $\square$

**Proposition 5.8.** —  $m_1(\mathbb{T}_1^2) = 5$

*Démonstration.* — On procède par l'absurde en supposant que  $\sigma_1(\mathbb{T}_1^2)$  est de multiplicité 6 pour une métrique  $g$  et des densités  $\rho, \gamma$  données.

Soit  $x$  un point du bord de  $\mathbb{T}_1^2$ . Selon le théorème 5.1 et le lemme 5.1, il existe une fonction propre  $f$  qui s'annule à l'ordre 5 en  $x$  et telle que cinq arcs nodaux partent de  $x$ . Notons que cette fonction est unique : dans le cas contraire, on pourrait en choisir une s'annulant à l'ordre 6 et on aurait une contradiction comme dans le théorème 1.5. Comme les extrémités de lignes nodales rejoignant le bord sont nécessairement en nombre pair, il existe une 6<sup>e</sup> extrémité en un point  $x'$  du bord,  $x'$  étant distinct de  $x$  (sinon  $f$  s'annulerait à l'ordre 6 en  $x$ ).

Comme dans la démonstration précédente, on va déplacer le point  $x$  le long du bord. Les arguments développés par G. Besson dans [Bes80] permettront d'aboutir à une contradiction. Si on contracte le bord sur un point — notons-le  $\bar{x}$  — alors il y a six arcs nodaux partant de  $\bar{x}$ . On sait alors que l'ensemble nodal est la réunion de trois lacets non homotopes entre eux et qui ne s'intersectent qu'en  $\bar{x}$  (cf. la démonstration du théorème 3.C.1 dans [Bes80]). Cette remarque permet alors de transposer le reste de la démonstration de [Bes80] : si  $x$  se déplace continûment en partant d'un point  $x_0$ , on peut construire une homotopie entre les lignes nodales de la fonction propre  $f_x$  correspondante et les lignes nodales de  $f_{x_0}$  (il est crucial ici que  $x \neq x'$  quel que soit  $x$ ). Après un tour complet de  $x$  le long du bord, les classes d'homotopies des lignes nodales sont donc les conjuguées des lignes de  $f_{x_0}$  par la classe d'homotopie du bord. Or elles doivent être identiques

aux lignes nodales de  $f_{x_0}$ . Il y a contradiction car les classes d'homotopies des lignes nodales sont des classes d'homotopies non triviales dans le tore  $\mathbb{T}^2$  obtenu par contraction du bord, elles ne commutent donc pas avec la classe du bord.  $\square$

**5.4. Deuxième valeur propre du disque.** — Pour finir, on montre la majoration de  $m_2(\mathbb{D}^2)$  annoncée par le théorème 1.13. On sait déjà, d'après le théorème 1.5, que  $m_2(\mathbb{D}^2) \leq 3$ . On va supposer qu'il y a égalité pour aboutir à une contradiction.

On se donne une métrique  $g$  et une densité  $\gamma$  telle que la multiplicité de  $\sigma_2(\mathbb{D}^2)$  soit 3. Selon le théorème de Courant, une fonction propre de  $\sigma_2(\mathbb{D}^2)$  a deux ou trois domaines nodaux. Comme ces domaines sont simplement connexes, la décomposition nodale du disque est nécessairement topologiquement équivalente à l'une des trois indiquées sur la figure 5.

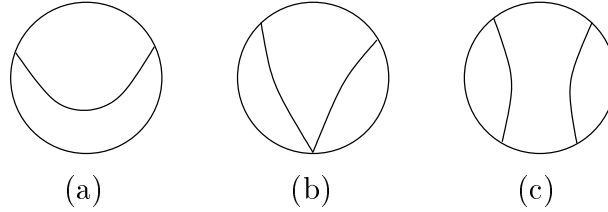


FIGURE 5. Domaines nodaux sur le disque

On considère la sphère unité de l'espace propre de  $\sigma_2(\mathbb{D}^2)$ , qu'on notera  $S^2$ , et on note respectivement  $D_a$  (resp.  $D_b$  et  $D_c$ ) l'ensemble des fonctions propres de  $S^2$  dont la décomposition nodale est celle de la figure 5.a (resp. 5.b et 5.c). La contradiction découlera de l'étude de la partition de  $S^2$  ainsi formée.

Commençons par noter que, comme la multiplicité est égale à 3, le théorème 5.1 et le lemme 5.1, il existe nécessairement des fonctions propres réalisant la situation (b) de la figure 5 et donc  $D_b$  est non vide. Plus précisément, pour chaque point  $x$  de  $\partial\mathbb{D}^2$ , il existe une droite de fonction propre s'annulant à l'ordre 2 en  $x$ , et cette droite varie continûment avec  $x$  (elle est unique car dans le cas contraire, on pourrait trouver une fonction s'annulant à l'ordre 3 en  $x$ ). Comme cette droite coupe  $S^2$  en deux points, l'ensemble  $D_b$  est la réunion de deux cercles, l'un correspondant aux fonctions ayant un seul domaine nodal positif, l'autre à celles en ayant deux (en particulier, ces cercles sont disjoints).

Le complémentaire de  $D_b$  est donc formé de trois composantes connexes, deux qui sont antipodales et homéomorphes à des disques et une homéomorphe à un cylindre. Comme  $D_c$  a nécessairement deux composantes connexes antipodales, l'une formée des fonctions ayant un domaine nodal positif et l'autre des fonctions en ayant deux,  $D_c$  est la réunion des deux disques et  $D_a$  est le cylindre.

On choisit l'une des deux composantes de  $D_c$ , par exemple celle dont les fonctions ont deux domaines nodaux positifs, qu'on notera  $D_c^+$ , et on construit une

application de  $D_c^+$  dans le cercle de la manière suivante : on se donne une orientation sur  $\partial\mathbb{D}^2$ , et pour chaque fonction de  $D_c^+$  on considère la paire de points de  $\partial\mathbb{D}^2$  où la fonction s'annule en décroissant (par rapport à l'orientation du bord). Ces deux points sont nécessairement disjoints (sinon il y aurait au moins trois extrémités de lignes nodales se rejoignant en un même points du bord, ce qu'on a déjà exclu). On obtient ainsi une application continue partant de  $D_c^+$  et dont l'image est  $S^1 \times S^1$  privé de la diagonale et quotientée par  $(x, y) \sim (y, x)$ . Cette image est homotope à un cercle, ce qui permet de définir une application  $D_c^+ \mapsto S^1$ . Or, le long du bord de  $D_c^+$ , c'est-à-dire d'une des composantes de  $D_b$ , cette application est homotopiquement non triviale, ce qui fournit la contradiction cherchée.

### Références

- [AH76] K. APPEL & W. HAKEN – « Every planar map is four colorable », *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), no. 5, p. 711–712.
- [Ale98] G. ALESSANDRINI – « On Courant's nodal domain theorem », *Forum Math.* **10** (1998), no. 5, p. 521–532.
- [Ban80] C. BANDLE – *Isoperimetric inequalities and applications*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 7, Pitman, 1980.
- [BCdV95] R. BACHER & Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Multiplicités des valeurs propres et transformations étoile-triangle des graphes », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no. 4, p. 517–533.
- [Bes80] G. BESSON – « Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes », *Ann. inst. Fourier* **30** (1980), no. 1, p. 109–128.
- [Bol98] B. BOLLOBÁS – *Modern graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1998.
- [Bos39] R. C. BOSE – « On the construction of balanced incomplete block designs », *Ann. Eugenics* **9** (1939), p. 353–399.
- [CdV87] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée », *Ann. scient. Éc. norm. sup.* **20** (1987), no. 4, p. 99–615.
- [CdV88] ———, « Sur une hypothèse de transversalité d'Arnol'd », *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), no. 2, p. 184–193.
- [CdV90] Y. COLIN DE VERDIÈRE – « Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité », *J. Combin. Theory Ser. B* **50** (1990), no. 1, p. 11–21.
- [CdV98] Y. COLIN DE VERDIÈRE – *Spectre de graphes*, Cours spécialisés, vol. 4, Soc. Math. France, 1998.
- [Che76] S. Y. CHENG – « Eigenfunctions and nodal sets », *Comment. Math. Helv.* **51** (1976), no. 1, p. 43–55.
- [Cox43] H. S. M. COXETER – « The map-coloring of unorientable surfaces », *Duke Math. J.* **10** (1943), p. 293–304.
- [FS11] A. FRASER & R. SCHOEN – « The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces », *Adv. Math.* **226** (2011), no. 5, p. 4011–4030.

- [FS12] ———, « Eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball », prépublication, 2012.
- [Hea90] P. J. HEAWOOD – « Map-colour theorem », *Quart. J. Pure Appl. Math.* **24** (1890), no. 96.
- [Hef91] L. HEFFTER – « Ueber das Problem der Nachbargebiete », *Math. Ann.* **38** (1891), no. 4, p. 477–508.
- [Jam09] P. JAMMES – « Sur la multiplicité des valeurs propres d’une variété compacte », *Sémin. théor. spectr. géom.* **26** (2009), p. 1–11.
- [Jam14] ———, « Prescription du spectre de Steklov dans une classe conforme », *Anal. PDE* **7** (2014), no. 3, p. 529–550.
- [Kag35] I. N. KAGNO – « A note on the Heawood color formula », *J. Math. Phys.* **14** (1935), p. 228–231.
- [KKP] M. KARPUKHIN, G. KOKAREV & I. POLTEROVICH – « Multiplicity bounds for Steklov eigenvalues on Riemannian surfaces », *Ann. inst. Fourier*, à paraître.
- [LS98] L. LOVÁSZ & A. SCHRIJVER – « A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs », *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), no. 5, p. 1275–1285.
- [Nad88] N. NADIRASHVILI – « Multiple eigenvalues of the Laplace operator », *Math. USSR-Sb.* **61** (1988), no. 1, p. 225–238.
- [Rin74] G. RINGEL – *Map color theorem*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 209, Springer Verlag, 1974.
- [RST95] N. ROBERTSON, P. SEYMOUR & R. THOMAS – « Sachs’ linkless embedding conjecture », *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), no. 2, p. 185–227.
- [RY68] G. RINGEL & J. W. T. YOUNGS – « Solution of the Heawood map-coloring problem », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), p. 438–445.
- [Sév94] B. SÉVENNEC – « Multiplicité du spectre des surfaces : une approche topologique », *Sémin. théor. spectr. géom.* **12** (1994), p. 29–36.
- [Sév02] ———, « Multiplicity of the second Schrödinger eigenvalue on closed surfaces », *Math. Ann.* **324** (2002), no. 1, p. 195–211.
- [SU90] J. SYLVESTER & G. UHLMANN – « The Dirichlet to Neumann map and applications », in *Inverse problems in partial differential equations (Arcata, CA, 1989)*, SIAM, 1990, p. 101–139.
- [Uhl09] G. UHLMANN – « Electrical impedance tomography and Calderón’s problem », *Inverse Problems* **25** (2009), no. 12, p. 123011, 39.