

**LA DUALITÉ ÉTRANGE**  
[d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea]  
par **Christian PAULY**

**INTRODUCTION**

Le but de ces notes est de donner un bref aperçu d'un résultat important sur les fibrés vectoriels sur une courbe algébrique : la dualité étrange ou la dualité rang-niveau.

En 1994, disposant de la formule de Verlinde qui donne la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées d'ordre  $k$  sur les espaces de modules de fibrés de rang  $r$  (voir sections 1.2 et 1.3), on a conjecturé que les deux espaces associés aux couples  $(r, k)$  et  $(k, r)$  sont naturellement duaux, la dualité entre ces espaces vectoriels étant induite par le produit tensoriel des fibrés vectoriels. Cette conjecture a été démontrée seulement en 2006, d'abord par P. Belkale pour une courbe générale et ensuite par A. Marian et D. Oprea pour toute courbe.

Une des idées principales, commune aux deux démonstrations, est de construire une base explicite de fonctions thêta généralisées d'ordre  $r$  indexée par des fibrés vectoriels particuliers de rang  $r$ . P. Belkale obtient ces fibrés particuliers comme sous-fibrés d'un fibré de rang  $r + k$  sur la droite projective, et A. Marian et D. Oprea considèrent les sous-fibrés de degré maximal d'un fibré fixé de rang  $r + k$  sur une courbe quelconque. La deuxième idée clé est alors de montrer que le nombre de ces fibrés particuliers est égal à la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées donnée par la formule de Verlinde — notons que les deux problèmes énumératifs et leur nombre de solutions sont différents. C'est à ce niveau-là où interviennent la combinatoire de la formule de Verlinde et le lien entre l'anneau de fusion et la cohomologie quantique de la grassmannienne  $\text{Gr}(r, r + k)$ , déjà observé par E. Witten dans [W]. Tandis que P. Belkale montre que le nombre de ses fibrés particuliers vérifient les mêmes relations de récurrence que les nombres de Verlinde, A. Marian et D. Oprea utilisent la formule de Vafa et Intiligator donnant les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne  $\text{Gr}(r, r + k)$ .

Dans la dernière section je décris quelques généralisations de la dualité étrange, notamment aux fibrés vectoriels avec structure parabolique et aux  $G$ -fibrés principaux. Dans ce dernier cas de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans ces notes je ne mentionne que les constructions de dualité étrange sur les courbes. Des constructions analogues existent sur les surfaces projectives, en particulier sur le plan projectif et sur les surfaces abéliennes — voir [MO3].

Il existe des “surveys” récents sur la dualité étrange : les notes de cours de M. Popa [Po] section 5 et l’article de A. Marian et D. Oprea [MO3].

J’aimerais remercier P. Belkale et R. Oudompheng pour leurs commentaires sur ces notes.

## 1. ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

Dans cette section on rappelle brièvement les principaux résultats concernant les espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes et les espaces de fonctions thêta généralisées. Pour plus de détails on renvoie par exemple au livre de J. Le Potier [LP] et aux notes de M. Popa [Po] et de C. Sorger [S1].

### 1.1. Propriétés des espaces de modules

Soit  $X$  une courbe projective lisse complexe de genre  $g \geq 1$ . Etant donné un fibré vectoriel  $E$  sur la courbe  $X$ , on peut lui associer deux entiers : son rang  $r = \text{rg}(E)$  et son degré  $d = \text{deg}(E) := \text{deg}(\Lambda^r E)$ . Ce sont des invariants topologiques. Si l’on se donne la courbe  $X$  ainsi que  $r$  et  $d$ , il existe une variété projective, notée  $\mathcal{U}_X(r, d)$ , qui paramètre les classes de  $S$ -équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang  $r$  et de degré  $d$  sur la courbe  $X$ . Rappelons que  $\mathcal{U}_X(r, d)$  est une variété irréductible, de dimension  $r^2(g-1) + 1$  et que les points fermés de  $\mathcal{U}_X(r, d)$  correspondent aux sommes directes de fibrés vectoriels stables.

Si  $r = 1$ , l’espace de modules  $\mathcal{U}_X(1, d)$  coïncide avec la variété de Picard  $\text{Pic}^d(X)$  paramétrant les fibrés en droites de degré  $d$ . Nous notons  $\text{Jac}(X) := \text{Pic}^0(X)$  la jacobienne de la courbe  $X$ .

Il existe un morphisme de variétés induit par le déterminant

$$\det : \mathcal{U}_X(r, d) \longrightarrow \text{Pic}^d(X), \quad E \mapsto \det(E).$$

Nous notons  $\mathcal{SU}_X(r, L)$  la fibre  $\det^{-1}(L)$  au-dessus du fibré en droites  $L \in \text{Pic}^d(X)$  et  $\mathcal{SU}_X(r) := \mathcal{SU}_X(r, \mathcal{O})$ . Afin de simplifier la notation, nous introduisons aussi  $\mathcal{U}_X^*(r) := \mathcal{U}_X(r, r(g-1))$ .

A plusieurs reprises dans le texte on utilisera le résultat élémentaire suivant : le morphisme induit par le produit tensoriel

$$(1) \quad t : \mathcal{SU}_X(r) \times \text{Pic}^{g-1}(X) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(r), \quad (E, L) \mapsto E \otimes L$$

est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois égal au groupe  $\text{Jac}(X)[r] \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{2g}$  des points de  $r$ -torsion de la jacobienne.

## 1.2. Fonctions thêta généralisées

Avant de définir les fonctions thêta généralisées, on rappelle quelques notions sur les fonctions thêta abéliennes. L'ensemble

$$\Theta := \{M \in \text{Pic}^{g-1}(X) \mid h^0(X, M) > 0\} \subset \text{Pic}^{g-1}(X)$$

détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta* — dans  $\text{Pic}^{g-1}(X)$ , qui définit, après translation  $T_L : \text{Jac}(X) \rightarrow \text{Pic}^{g-1}(X)$  par un fibré en droites  $L$  de degré  $g - 1$ , un diviseur  $\Theta_L := T_L^* \Theta$  dans la jacobienne donnant une polarisation principale, c'est-à-dire  $h^0(\text{Jac}(X), \mathcal{O}(\Theta_L)) = 1$ . Les sections globales du fibré  $\mathcal{O}(k\Theta_L)$  sont appelées les fonctions thêta d'ordre  $k$ .

La construction précédente se généralise sans trop d'obstacles aux espaces de modules  $\mathcal{U}_X(r, d)$  : on montre que l'ensemble

$$(2) \quad \Theta := \{[E] \in \mathcal{U}_X^*(r) \mid h^0(X, E) > 0\} \subset \mathcal{U}_X^*(r),$$

où  $[E]$  désigne la classe de  $S$ -équivalence d'un fibré semi-stable  $E$ , détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta généralisé* — dans  $\mathcal{U}_X^*(r)$ . Comme en rang 1, on a aussi la relation [BNR]

$$h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(\Theta)) = 1.$$

En prenant l'image inverse par le morphisme induit par produit tensoriel  $T_L : \mathcal{U}_X(r, 0) \rightarrow \mathcal{U}_X^*(r)$  avec un fibré en droites  $L$  de degré  $g - 1$  et en restreignant à la sous-variété  $\mathcal{SU}_X(r) \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$  on obtient un diviseur de Cartier  $\Theta_L$  dans  $\mathcal{SU}_X(r)$  dont le support est

$$\Theta_L = \{[E] \in \mathcal{SU}_X(r) \mid h^0(X, E \otimes L) > 0\}.$$

On sait [DN] que le fibré en droites associé  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\Theta_L)$  est ample, ne dépend pas du choix de  $L$  et engendre le groupe de Picard

$$\text{Pic}(\mathcal{SU}_X(r)) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{L}.$$

Par analogie avec le cas  $r = 1$ , on appelle les sections globales de  $\mathcal{L}^k$  sur  $\mathcal{SU}_X(r)$  les *fonctions thêta généralisées* d'ordre  $k$ .

## 1.3. La formule de Verlinde

La formule de Verlinde donne la dimension de l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre  $k$  sur  $\mathcal{SU}_X(r)$ . Remarquons que la formule de Verlinde donne en fait la dimension des espaces de blocs conformes, qu'on peut identifier aux espaces de fonctions thêta généralisées. On renvoie aux notes de A. Beauville [Bea1] et de C. Sorger [S1] pour une discussion détaillée et les démonstrations. Dans notre cas on utilisera la formule de Verlinde sous la forme suivante (due à D. Zagier) : on pose  $N = r + k$ .

$$(3) \quad N_k(\mathrm{SL}(r)) := h^0(\mathcal{SU}_X(r), \mathcal{L}^k) = \left(\frac{r}{N}\right)^g \sum_{\substack{S \cup T = \{0, \dots, N-1\} \\ |S|=k, |T|=r}} \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \left| 2 \sin \pi \frac{s-t}{N} \right|^{g-1}$$

On observe que cette formule présente une symétrie en les variables  $r$  et  $k$ . Plus précisément on a la relation

$$(4) \quad \frac{N_k(\mathrm{SL}(r))}{r^g} = \frac{N_r(\mathrm{SL}(k))}{k^g}.$$

On déduit la dimension  $N_k(\mathrm{GL}(r))$  de  $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$  à partir de la formule de Verlinde (3) en utilisant le revêtement étale galoisien (1) : on calcule l'image inverse

$$t^*\mathcal{O}(k\Theta) = \mathcal{L}^k \boxtimes \mathcal{O}(kr\Theta),$$

ce qui permet de déduire

$$(5) \quad N_k(\mathrm{GL}(r)) = \frac{k^g}{r^g} N_k(\mathrm{SL}(r)) = N_r(\mathrm{SL}(k)).$$

## 2. LA DUALITÉ ÉTRANGE

### 2.1. La construction de Beauville-Donagi-Tu

Dans cette section on va énoncer le théorème principal de l'exposé. Ce théorème avait été conjecturé en 1994 par A. Beauville [Bea1], ainsi que par R. Donagi et L. Tu [DT]. Cette conjecture était fondée sur des travaux antérieurs en théorie conforme des champs — voir par exemple [NS]. La construction de la “dualité étrange” est la suivante : on considère deux entiers  $r$  et  $k$  et le morphisme entre espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang  $r$  et  $k$  induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{SU}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(kr), \quad (E, F) \mapsto E \otimes F.$$

Notons que cette flèche est bien un morphisme, car la semi-stabilité des fibrés est préservée par produit tensoriel. On calcule comme précédemment l'image inverse

$$t^*\mathcal{O}(\Theta) = \mathcal{L}^r \boxtimes \mathcal{O}(k\Theta).$$

L'image inverse par  $t$  du diviseur thêta généralisé (2) donne un élément  $t^*\Theta$  de  $H^0(t^*\mathcal{O}(\Theta))$  qui se décompose par la formule de Künneth

$$H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r) \otimes H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta)).$$

On peut donc considérer le tenseur  $t^*\Theta$  comme une application linéaire

$$(6) \quad SD : H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r)$$

entre deux espaces vectoriels de même dimension (5). Le résultat principal est le

THÉORÈME 2.1 ([MO2] Theorem 2, [Bel1], [Bel2]). — *L’application linéaire  $SD$  est un isomorphisme pour toute courbe  $X$ .*

Remarque 2.2. — Le fait que  $SD$  est un isomorphisme admet l’interprétation géométrique suivante. Etant donné un fibré semi-stable  $F$  avec  $[F] \in \mathcal{U}_X^*(r)$  on peut considérer l’ensemble

$$\Theta_F := \{[E] \in \mathcal{SU}_X(k) \mid h^0(X, E \otimes F) > 0\}.$$

Pour  $F$  général  $\Theta_F$  détermine un diviseur dans le système linéaire  $|\mathcal{L}^r|$  et l’application rationnelle

$$\mathcal{U}_X^*(r) \dashrightarrow |\mathcal{L}^r|, \quad F \mapsto \Theta_F,$$

se factorise à travers l’application linéaire  $SD$  projectivée. On observe alors que  $SD$  est un isomorphisme si et seulement si les diviseurs  $\Theta_F$ , quand  $F$  parcourt  $\mathcal{U}_X^*(r)$ , engendrent linéairement le système  $|\mathcal{L}^r|$ .

## 2.2. La dualité de Wirtinger généralisée

Un défaut de l’énoncé précédent est qu’il met en relation deux groupes structuraux de type différent  $SL(k)$  et  $GL(r)$ . Un énoncé plus symétrique a été formulé et démontré par A. Marian et D. Oprea : on considère le morphisme

$$\pi : \mathcal{U}_X(k, 0) \times \mathcal{U}_X(r, 0) \longrightarrow \mathcal{U}_X(kr, 0) \times \text{Jac}(X), \quad (E, F) \mapsto (E \otimes F, (\det E)^{-1} \otimes \det F).$$

On fixe deux fibrés en droites  $L$  et  $M$  de degré  $g - 1$  sur  $X$  et on note  $K$  le fibré canonique de  $X$ . L’image inverse par  $\pi$  du diviseur thêta généralisé produit

$$\Theta_M \boxtimes \Theta_{L^{-1}K} \subset \mathcal{U}_X(kr, 0) \times \text{Jac}(X)$$

peut être considéré (voir [MO2] Lemma 1) comme une application linéaire

$$(7) \quad D : H^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^*\Theta_L))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K}))$$

THÉORÈME 2.3 (Dualité de Wirtinger généralisée, [MO2] Theorem 1)

*L’application linéaire  $D$  est un isomorphisme pour toute courbe  $X$  et pour tous fibrés en droites  $L$  et  $M$ .*

Remarque 2.4. — Ce théorème généralise aux fibrés vectoriels un résultat sur les fonctions thêta abéliennes [Mu] appelée *dualité de Wirtinger*. On obtient ce résultat classique en prenant dans le théorème précédent  $r = k = 1$  et  $L = M = \kappa$  une thêta-caractéristique de  $X$ . Nous notons alors  $\Theta = \Theta_\kappa$  le diviseur thêta symétrique dans  $\text{Jac}(X)$ . Le morphisme  $\pi$  est une isogénie et on a la relation  $\pi^*(\Theta \boxtimes \Theta) = 2\Theta \boxtimes 2\Theta$ . L’isomorphisme  $D$  fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & |2\Theta|^\vee \\ & \nearrow & \downarrow^D \\ \text{Jac}(X) & \xrightarrow{i} & |2\Theta|, \end{array}$$

avec  $i(x) = T_x^* \Theta + T_{-x}^* \Theta$ , où  $T_x$  désigne la translation par  $x$  dans  $\text{Jac}(X)$ . Remarquons que la dualité de Wirtinger est démontrée pour toute variété abélienne avec polarisation principale.

La dualité étrange (Théorème 2.1), telle qu'elle avait été conjecturée par Beauville-Donagi-Tu, est alors un corollaire de la dualité de Wirtinger généralisée.

PROPOSITION 2.5 ([MO2] section 4). — *Si  $D$  est un isomorphisme, alors  $SD$  est aussi un isomorphisme.*

PREUVE (esquisse) — Le produit tensoriel avec  $M$  induit un isomorphisme entre  $H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M))$  et  $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ . D'autre part les deux applications linéaires  $D$  et  $SD$  apparaissent dans la diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r)^\vee & \xrightarrow{\rho^\vee} & H^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^* \Theta_L))^\vee \\ \downarrow^{SD^\vee} & & \downarrow^D \\ H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M)) & \hookrightarrow & H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^* \Theta_{L^{-1}K})) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont la duale de la restriction  $\rho$  et la multiplication par la section  $\det^* \Theta_{L^{-1}K}$  respectivement. Cette dernière flèche est injective. Comme  $D$  est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que l'application de restriction  $\rho$  des sections globales à  $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(k)$  est surjective. Etant donné  $s \in H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r)$  on construit “à la main” une section  $\text{Jac}(X)[k]$ -invariante sur le revêtement étale galoisien  $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(k) \times \text{Jac}(X) \rightarrow \mathcal{U}_X(k, 0)$  qui se restreint à  $s$  sur  $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(k) \times \{\mathcal{O}_X\}$ .  $\square$

### 3. LA DÉMONSTRATION DE A. MARIAN ET D. OPREA

Dans cette section nous allons expliquer brièvement la démonstration de la dualité de Wirtinger généralisée (Théorème 2.3).

#### 3.1. L'idée principale

L'idée clé, qui avait déjà été utilisée dans l'article antérieur de P. Belkale [Bel1] sur une courbe singulière, est de construire de manière explicite deux familles de fibrés vectoriels, dont les diviseurs thêta associés forment des bases duales des deux espaces vectoriels, qui apparaissent dans (7). On notera leur dimension

$$\begin{aligned} q &= h^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^* \Theta_L)) = h^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^* \Theta_{L^{-1}K})) \\ &= \left(\frac{N}{r}\right)^g h^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r), \mathcal{L}^k). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant le revêtement étale (1). Plus précisément on montre le

THÉORÈME 3.1 ([MO2] Proposition 3). — Il existe  $q$  couples de fibrés vectoriels stables

$$(A_i, B_i) \in \mathcal{U}_X(k, 0) \times \mathcal{U}_X(r, 0), \quad 1 \leq i \leq q,$$

vérifiant les conditions

1.  $h^0(X, A_i \otimes B_j \otimes M) \neq 0$  si  $i \neq j$ , et  $= 0$  si  $i = j$ ,
2.  $h^0(X, (\det A_i)^{-1}(\det B_i)L^{-1}K) = 0$ .

Ce théorème signifie que les  $q$  diviseurs  $\Theta_{A_i} \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$  du système linéaire  $|k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K}|$  dont le support est donné par

$$\Theta_{A_i} = \{[F] \in \mathcal{U}_X(r, 0) \mid h^0(X, A_i \otimes F \otimes M) > 0 \text{ ou } h^0((\det A_i)^{-1}(\det F)L^{-1}K) > 0\}$$

contiennent les fibrés stables  $B_j \in \mathcal{U}_X(r, 0)$  pour  $j \neq i$  et ne contiennent pas  $B_i$ . Ceci entraîne immédiatement que les  $q$  diviseurs  $\Theta_{A_i}$  forment une famille libre, et donc que  $D$  est un isomorphisme.

### 3.2. Le schéma Quot de Grothendieck, invariants de Gromov-Witten et la formule de Vafa-Intriligator

Dans cette section nous allons construire les  $q$  couples  $(A_i, B_i)$  du théorème 3.1. Pour cela nous introduisons le schéma Quot de Grothendieck  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  qui paramètre les suites exactes

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X^N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

où  $E$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{O}_X^N$  de rang  $k$  et de degré  $-d$  et  $F$  un faisceau de rang  $r$ . Rappelons la notation  $N = r + k$ . Le schéma  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  est projectif, mais pour  $d$  général ce schéma peut avoir plusieurs composantes irréductibles et des singularités — voir par exemple [Po] section 4 ou [MO1]. Il existe une suite exacte de faisceaux universels sur  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X}^N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs les points  $\sigma$  de  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  qui correspondent aux faisceaux quotients  $F = \mathcal{F}|_{\{\sigma\} \times X}$  localement libres forment un ouvert

$$\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N)) \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k),$$

qui paramètre les morphismes de degré  $d$  de la courbe  $X$  dans la grassmannienne  $\text{Gr}(k, N)$  des sous-espaces de dimension  $k$  dans  $\mathbb{C}^N$ . Si l'on suppose le degré  $d$  assez grand, le schéma  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  est irréductible [BDW] et de dimension égale à

$$\dim \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = \chi(\text{Hom}(E, F)) = Nd - rk(g - 1).$$

Par conséquent l'ouvert  $\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N))$  est dense. On suppose aussi que  $d$  est divisible par  $k$  et on introduit l'entier  $s = \frac{Nd}{k} - r(g - 1)$ , de sorte que  $\dim \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = sk$ .

Comme le faisceau  $\mathcal{E}$  est localement libre, on peut définir les classes de Chern

$$a_i = c_i(\mathcal{E}|_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times \{x\}}^\vee).$$

On observe que ces classes de Chern ne dépendent pas du choix du point  $x \in X$ . Le résultat crucial est alors la

PROPOSITION 3.2 ([MO2] Proposition 1). — *On a l'égalité suivante*

$$q = \int_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)} a_k^s$$

La preuve passe par une vérification directe de l'égalité numérique, car d'une part  $q$  est donnée par la formule de Verlinde (3) et d'autre part les nombres d'intersection de classes de Chern sur le schéma  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  sont en fait des *invariants de Gromov-Witten* associés à la grassmannienne — voir par exemple [Ber]. La formule de Vafa et Intriligator, qui calcule ces invariants de Gromov-Witten, a été démontrée en 1994 par B. Siebert et G. Tian [ST] — voir aussi [MO1] pour une formulation plus explicite.

Afin de terminer la construction des  $q$  couples  $(A_i, B_i)$ , il faut donner une interprétation énumérative du nombre d'intersection  $\int a_k^s$ . Ceci résulte directement du travail de A. Bertram sur les invariants de Gromov-Witten : soient  $H \subset \mathbb{C}^N$  un hyperplan et  $x \in X$  et notons  $\mathcal{E}_x$  la restriction  $\mathcal{E}_{|\text{Quot} \times \{x\}}$ . Alors  $H$  détermine une section globale  $\varphi$  de  $\mathcal{E}_x^\vee$  dont le lieu des zéros  $Z \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  est une extension de la sous-variété de  $\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N))$  définie par

$$\{\phi : X \rightarrow \text{Gr}(k, N) \mid \phi(x) \in \text{Gr}(k, H) \subset \text{Gr}(k, N)\}$$

PROPOSITION 3.3 ([Ber]). — *Pour des hyperplans  $H_1, \dots, H_s$  et des points  $x_1, \dots, x_s$  généraux, on a :*

1. *les lieux des zéros  $Z_l$ , pour  $1 \leq l \leq s$ , sont de codimension  $k$  dans  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  et*

$$[Z_l] = c_k(\mathcal{E}_{\text{Quot} \times \{x_l\}}^\vee) \cap [\text{Quot}]$$

2. *les  $Z_l$  intersectent transversalement dans le lieu des fibrés stables, c'est-à-dire*

$$\mathcal{Z} := Z_1 \cap \dots \cap Z_s$$

*est un schéma réduit de dimension 0 correspondant à des fibrés stables.*

La preuve utilise essentiellement le théorème de transversalité de Kleiman [K].

On déduit de cette proposition que le nombre d'intersection  $\int a_k^s$  est égal au cardinal de  $\mathcal{Z}$ , dont les éléments correspondent à des suites exactes  $0 \rightarrow E_i \rightarrow \mathcal{O}_X^N \rightarrow F_i \rightarrow 0$  avec  $E_i$  et  $F_i$  stables. D'autre part si l'on introduit le sous-faisceau  $S = \ker(\mathcal{O}_X^N \xrightarrow{\oplus u_l} \oplus_l \mathbb{C}_{x_l})$  avec  $(\ker u_l)_{x_l} = H_l$ , on a par construction que  $E_i$  est un sous-fibré de  $S$ ; en fait les  $E_i$  sont les sous-fibrés de  $S$  de rang  $k$  et de degré maximal. Notons  $F'_i$  le conoyau de l'inclusion  $E_i \subset S$ . Un argument standard montre alors que l'espace tangent de Zariski au point  $(E_i, F_i) \in \mathcal{Z} \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  à l'intersection  $\mathcal{Z}$  s'identifie à

$$T_{(E_i, F_i)} \mathcal{Z} \cong H^0(X, E_i^* \otimes F'_i).$$



Or comme  $\mathcal{Z}$  est lisse, on en déduit que  $h^0(X, E_i^* \otimes F'_i) = 0$ . D'autre part, si  $i \neq j$ , on montre facilement, en utilisant la stabilité des fibrés  $E_i$ , que  $h^0(X, E_i^* \otimes F'_j) \neq 0$ . Finalement on tensorise les deux fibrés stables  $E_i^*$  et  $F'_i$  par des fibrés en droites bien choisis (en fonction de  $d$  et  $M, L$ ) et on obtient les  $q$  couples  $(A_i, B_i)$  vérifiant les conditions du théorème 3.1.

### 3.3. Quelques remarques

*Remarque 3.4.* — La coïncidence entre la dimension  $q$  calculée à partir de la formule de Verlinde et les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne  $\text{Gr}(k, N)$  paraît à première vue très étonnante. L'idée, qui sous-tend l'égalité de la proposition 3.2, repose sur un argument de physique théorique (voir l'article de Witten [W]) établissant un lien entre le modèle de Wess-Zumino-Witten associé au groupe  $GL(k)$  et au niveau  $r$ , c'est-à-dire l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre  $r$ , et le modèle sigma de la grassmannienne  $\text{Gr}(k, N)$ , c'est-à-dire les invariants de Gromov-Witten.

D'autre part rappelons (voir par exemple [S1]) que la combinatoire de la formule de Verlinde, dérivée des règles de factorisations de blocs conformes [TUY], est liée à la structure de l'anneau de fusion et de ses caractères. Dans le cas du groupe  $SL(k)$  et du niveau  $r$  l'anneau de fusion associé peut être mis en relation avec l'anneau de cohomologie quantique de la grassmannienne  $\text{Gr}(k, N)$ . Pour d'autres groupes structuraux, par exemple  $\text{Sp}(k)$  ou  $\text{Spin}(k)$ , cette relation reste mystérieuse — voir aussi section 5.2.1

*Remarque 3.5.* — La dualité de Wirtinger généralisée peut être étendue aux espaces de modules de fibrés de degré quelconque ([MO2] Theorem 3).

## 4. LA DÉMONSTRATION DE P. BELKALE

La démonstration de la dualité étrange (Théorème 2.1) donnée par P. Belkale se fait en deux étapes : dans son premier article [Bel1], antérieur à [MO2], il démontre la dualité pour une courbe générale et complète la preuve en montrant dans [Bel2] que le rang de l'application  $SD$  ne varie pas avec la courbe  $X$ .

### 4.1. Fibrés vectoriels sur une courbe rationnelle nodale [Bel1]

Tout d'abord P. Belkale observe — voir aussi section 3.1 — qu'il suffit de construire  $m$  couples  $(E_i, F_i) \in \mathcal{SU}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r)$  avec  $m = h^0(\mathcal{SU}_X(k), \mathcal{L}^r) = h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$  vérifiant la condition

$$h^0(X, E_i \otimes F_j) = 0 \quad \iff \quad i = j.$$

La construction de ces  $m$  couples est faite sur une courbe rationnelle  $X_0$  avec  $g$  noeuds  $n_1, \dots, n_g$ , ou plus précisément sur sa normalisation  $\eta : \mathbb{P}^1 \rightarrow X_0$  : d'abord on montre l'égalité numérique entre le nombre de Verlinde  $m$  et le nombre  $m'$  de sous-fibrés  $V$  de

rang  $r$  et de degré 0 d'un fibré général  $T$  de rang  $N$  et de degré  $k(g-1)$  sur  $\mathbb{P}^1$  vérifiant les deux conditions suivantes pour  $1 \leq l \leq g$

$$\gamma_l(V_{p_l}) \subset V_{q_l}, \quad \text{et} \quad \ker(\gamma_l) \subset V_{p_l},$$

où les  $\gamma_l : T_{p_l} \rightarrow T_{q_l}$  sont des applications linéaires de rang  $N-1$ , et  $p_l, q_l \in \mathbb{P}^1$  tels que  $\eta(p_l) = \eta(q_l) = n_l$ . L'égalité  $m = m'$  est obtenue en vérifiant que ces deux nombres satisfont aux mêmes relations de récurrence — voir [Bel1] section 8; rappelons que les blocs conformes satisfont aux règles de factorisation [TUY] qui donnent une relation entre leurs dimensions en genre  $g$  et  $g-1$ .

Ensuite on observe que les applications quotient  $\bar{\gamma}_l : (T/V)_{p_l} \rightarrow (T/V)_{q_l}$  sont des isomorphismes, ce qui donne par recollement aux points  $p_l$  et  $q_l$  les fibrés vectoriels  $F_i$  sur  $X_0$ . Les fibrés  $E_i$  sur  $X_0$  sont obtenus après déformation des applications linéaires  $\gamma_l$ . Finalement on déforme les  $m$  couples  $(E_i, F_i)$  vers une courbe lisse; d'où la dualité pour une courbe  $X$  générale.

## 4.2. La connexion projectivement plate [Bel2]

La construction de l'application de dualité étrange  $SD$  peut se faire pour une famille de courbes lisses  $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$ : il existe des fibrés vectoriels  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sur  $S$  tels que  $\mathcal{V}_s \cong H^0(\mathcal{S}\mathcal{U}_{\mathcal{X}_s}(k), \mathcal{L}^r)$  et  $\mathcal{W}_s \cong H^0(\mathcal{U}_{\mathcal{X}_s}^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$  et un morphisme entre fibrés vectoriels

$$SD : \mathcal{W}^\vee \longrightarrow \mathcal{V},$$

tel que  $SD_s$  coïncide avec  $SD$  (6) sur la courbe  $\mathcal{X}_s$ . D'autre part ces fibrés sont munis de deux connexions  $\nabla_{\mathcal{V}}$  et  $\nabla_{\mathcal{W}}$  (la connexion de Hitchin [H] ou connexion WZW [TUY]), qui sont projectivement plates. Le résultat principal est le

**THÉORÈME 4.1** ([Bel1] Theorem 1.1). — *L'homomorphisme  $SD$  est horizontal.*

Un corollaire est que le rang de  $SD_s$  ne dépend pas de  $s \in S$ .

*Remarque 4.2.* — Le théorème précédent peut être démontré dans un contexte plus général — voir section 5.2 et [Bel2] section 5.

## 5. AUTRES CAS DE DUALITÉ ÉTRANGE

Dans cette section je présenterai quelques généralisations des théorèmes 2.1 et 2.3.

### 5.1. Fibrés vectoriels avec structure parabolique

Une structure parabolique sur un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  est la donnée d'un nombre fini de points  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$  de  $X$ , de poids dominants  $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_r$  (représentés par leur tableau de Young) et de drapeaux  $F_\bullet(E_{p_i})$  dans la fibre  $E_{p_i}$  de type  $\lambda_i$ . Rappelons que l'espace des fonctions thêta généralisées paraboliques, c'est-à-dire les sections globales d'un fibré en droites  $\mathcal{L}^{par}$  sur l'espace de modules  $\mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda})$  paramétrant fibrés paraboliques, peut être identifié [Pa] à l'espace des blocs conformes [TUY] associé à la donnée  $(X, \underline{p}, \underline{\lambda})$ , ce qui permet de donner leur dimension.

Un travail récent de R. Oudompheng [O] établit la dualité étrange pour fibrés paraboliques en suivant la démonstration de A. Marian et D. Oprea. Si l'on note  $\lambda^T$  le tableau de Young conjugué de  $\lambda$ , on observe que, pour  $(E, F) \in \mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}) \times \mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T)$  la condition  $h^0(X, \text{Hom}^{par}(E, F)) \neq 0$ , où  $\text{Hom}^{par}(E, F)$  désigne le faisceau des homomorphismes compatibles avec les structures paraboliques sur  $E$  et  $F$ , détermine un diviseur dans le produit et par conséquent une application linéaire

$$SD^{par} : H^0(\mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T), \mathcal{L}^{par})^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{SU}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}), \mathcal{L}^{par}),$$

qui est un isomorphisme [O].

Remarquons que la proposition 3.2 a un analogue parabolique, qui identifie le nombre de Verlinde parabolique à un nombre d'intersection dans  $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$  associés aux variétés de Schubert de type  $\lambda_i$  dans  $\text{Gr}(k, N)$ .

### 5.2. $G$ -fibrés principaux

La formule de Verlinde est démontrée en fait pour les espaces de modules de  $G$ -fibrés principaux sur une courbe  $X$  — voir par exemple [S1]. On suppose que  $G$  est un groupe de Lie complexe, simple et simplement connexe. Afin d'avoir des théorèmes d'uniformisation des  $G$ -fibrés principaux et une description commode des fibrés en droites sur les espaces de modules, on travaille sur le *champ* de modules  $\mathcal{M}_X(G)$  paramétrant  $G$ -fibrés principaux sur  $X$ . On sait que le groupe de Picard  $\text{Pic}(\mathcal{M}_X(G))$  est  $\mathbb{Z}$  et on note  $\mathcal{L}_G$  son générateur ample. La formule de Verlinde (par exemple [S1] Théorème 4.2.2) donne alors la dimension

$$N_k(G) := \dim H^0(\mathcal{M}_X(G), \mathcal{L}_G^k).$$

*5.2.1. Groupes classiques.* — Motivés par les relations (4) et (5), W.M. Oxbury et S.M.J. Wilson [OW] étudient les symétries rang-niveau de la formule de Verlinde pour les groupes classiques. Pour les groupes symplectiques ils montrent que  $N_k(\text{Sp}(2r)) = N_r(\text{Sp}(2k))$ . Par ailleurs on peut construire [Bea2], en utilisant une construction pfaffienne du diviseur thêta généralisé pour fibrés orthogonaux, une application linéaire

$$SD^{Sp} : H^0(\mathcal{M}_X(\text{Sp}(2r)), \mathcal{L}^k)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\text{Sp}(2k)), \mathcal{L}^r).$$

Les travaux récents de T. Abe [A1], [A2] et P. Belkale [Bel3] montrent que  $SD^{Sp}$  est un isomorphisme.

Pour les groupes  $\text{Spin}(2m)$  et  $\text{Spin}(2m + 1)$  certaines symétries rang-niveau sont formulées dans [OW], mais une construction générale d’une dualité  $SD^{\text{Spin}}$  fait (à ce jour) défaut. Mentionnons une première approche [PR], qui établit un isomorphisme

$$H^0(\mathcal{M}_X(\text{Spin}(2m + 1)), \mathcal{L}^2)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\text{Pin}(2)), \mathcal{L}^{2m+1})_+,$$

où l’espace de modules  $\mathcal{M}_X(\text{Pin}(2))$  peut être identifié à la réunion de toutes les variétés de Prym des revêtements étales doubles de  $X$ .

*5.2.2. Groupes exceptionnels.* — Dans le cadre des groupes exceptionnels il est possible de construire certaines applications de type “dualité étrange” en imitant la construction de l’application  $SD$  pour les groupes  $\text{SL}(k)$  et  $\text{GL}(r)$ . On part de l’observation suivante [S2] : pour le groupe exceptionnel  $E_8$  la formule de Verlinde donne  $\dim H^0(\mathcal{M}_X(E_8), \mathcal{L}_{E_8}) = 1$ , ce qui entraîne l’existence d’un diviseur thêta  $\Theta_{E_8} \subset \mathcal{M}_X(E_8)$  distingué, qu’on peut considérer comme un analogue du diviseur thêta généralisé  $\Theta \subset \mathcal{U}_X^*(r)$ . D’autre part le groupe  $E_8$  possède plusieurs couples  $(A, B)$  de sous-groupes commutants, par exemple :

$$(\text{SL}(2), E_7), \quad (\text{SL}(3), E_6), \quad (G_2, F_4), \quad (\text{Spin}(8), \text{Spin}(8)).$$

Il existe alors un morphisme entre champs de modules

$$t : \mathcal{M}_X(A) \times \mathcal{M}_X(B) \longrightarrow \mathcal{M}_X(E_8),$$

et, si  $(A, B)$  est l’un des quatre couples précédents, le diviseur  $t^*(\Theta_{E_8})$  détermine une application linéaire

$$(8) \quad SD : H^0(\mathcal{M}_X(A), \mathcal{L}_A)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(B), \mathcal{L}_B)$$

entre espaces vectoriels de même dimension [BP]. On conjecture que  $SD$  est un isomorphisme.

*Remarque 5.1.* — Il est intéressant de constater que les quatre cas de sous-groupes  $(A, B)$  donnent des *plongements conformes* — voir par exemple [SW] — entre leurs algèbres de Lie associées  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{e}_8$ . D’autre part, en s’appuyant sur l’article [NT], P. Belkale a montré ([Bel2] Proposition 5.8) que pour tout plongement conforme  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  le morphisme induit par ce plongement entre les fibrés vectoriels des fonctions thêta généralisées associés aux groupes de Lie  $H$  et  $G$  et munis des connexions WZW est horizontal, ce qui prouve en particulier que le rang de l’application  $SD$  (8) ne dépend que du genre de la courbe  $X$ . On peut donc espérer que tout plongement conforme, dont la classification complète est faite dans [SW] Table I et II, donne lieu à des tenseurs intéressants entre espaces de fonctions thêta généralisées.

## RÉFÉRENCES

- [A1] T. ABE – *Degeneration of the strange duality map for symplectic bundles*. J. reine angew. Math., à paraître

- [A2] T. ABE – *Strange duality for parabolic symplectic bundles on a pointed projective line*. prépublication 2008
- [Bea1] A. BEAUVILLE – *Vector bundles on curves and generalized theta functions : recent results and open problems*. Current topics in complex algebraic geometry, 17-33, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995
- [Bea2] A. BEAUVILLE – *Orthogonal bundles on curves and theta functions*. Ann. Inst. Fourier 56 (2006), 1405-1418
- [BNR] A. BEAUVILLE, M.S. NARASIMHAN et S. RAMANAN – *Spectral curves and the generalised theta divisor*. J. Reine Angew. Math. 398 (1989), 169-179
- [Bel1] P. BELKALE – *The strange duality conjecture for generic curves*. J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), 235-258
- [Bel2] P. BELKALE – *Strange duality and the Hitchin/WZW connection*. arXiv :0705.0717
- [Bel3] P. BELKALE – *Orthogonal bundles, Theta characteristics and the symplectic strange duality*. arXiv :0808.0863
- [Ber] A. BERTRAM – *Towards a Schubert Calculus for Maps from a Riemann Surface to a Grassmannian*. Internat. J. Math. 5 (1994), 811-825
- [BDW] A. BERTRAM, G. DASKALOPOULOS et R. WENTWORTH – *Gromov Invariants for Holomorphic Maps from Riemann Surfaces to Grassmannians*. J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 529-571
- [BP] A. BOYSAL et C. PAULY – *Strange duality for Verlinde spaces of exceptional groups at level 1*. prépublication 2008
- [DT] R. DONAGI et L. TU – *Theta functions for  $SL(n)$  versus  $GL(n)$* . Math. Res. Lett. 1 (1994), 345-357
- [DN] J.M. DREZET et M.S. NARASIMHAN – *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*. Invent. Math 97 (1989), 53-94
- [H] N. HITCHIN – *Flat connections and geometric quantization*. Comm. Math. Phys. 131 (1994), 347-380
- [K] S. KLEIMAN – *The transversality of a general translate*. Compositio Math. 28 (1974), 287-297
- [LP] J. LE POTIER – *Lectures on vector bundles*. Cambridge University Press (1997)
- [MO1] A. MARIAN et D. OPREA – *Virtual intersection on the Quot scheme and Vafa-Intriligator formulas*. Duke Math. J. 136 (2007), no.1, 81-113
- [MO2] A. MARIAN et D. OPREA – *The level-rank duality for non-abelian theta functions*. Invent. Math. 168 (2007), no.2, 225-247
- [MO3] A. MARIAN et D. OPREA – *A tour of theta dualities on moduli spaces of sheaves*. arXiv :0710.2908
- [Mu] D. MUMFORD – *Prym varieties I*. Contributions to Analysis, 325-350, Academic Press, New York 1974

- [NS] S. NACULICH et H. SCHNITZER – *Duality relations between  $SU(N)_k$  and  $SU(k)_N$  WZW models and their braid matrices*. Phys. Lett. B 244 (1990), no. 2, 235-240
- [NT] T. NAKANISHI et A. TSUCHIYA – *Level-rank duality of WZW models in conformal field theory*. Comm. Math. Phys. 144 (1992), no. 2, 351-372
- [O] R. OUDOMPHENG – *Rank-level duality for conformal blocks of  $GL_n$  and  $SL_n$* . arXiv :0805.1738
- [OW] W.M. OXBURY et S.M.J. WILSON – *Reciprocity laws in the Verlinde formulae for the classical groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2689-2710
- [Pa] C. PAULY – *Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes*. Duke Math. J. 84 (1996), no. 1, 217-235
- [PR] C. PAULY et S. RAMANAN – *A duality for Spin Verlinde spaces and Prym Theta functions*. Journal of the London Math. Soc. 63 (2001), 513-532
- [Po] M. POPA – *Generalized theta linear series on moduli spaces of vector bundles on curves*. arXiv :0712.3192
- [SW] A.N. SCHELLEKENS et N.P. WARNER – *Conformal subalgebras of Kac-Moody algebras*. Phys. Rev. D 34 (1986), 3092-3096
- [ST] B. SIEBERT et G. TIAN – *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*. Asian J. Math 1 (1997), 679-695
- [S1] C. SORGER – *La formule de Verlinde*. Séminaire Bourbaki, Novembre 1994, No. 794
- [S2] C. SORGER – *On moduli of  $G$ -bundles of a curve for exceptional  $G$* . Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 32 (1999), 127-133
- [TUY] A. TSUCHIYA, K. UENO et Y. YAMADA – *Conformal Field Theory on Universal Family of Stable Curves with Gauge Symmetries*. Adv. Studies in Pure Math. 19 (1989), 459-566
- [W] E. WITTEN – *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*. Geometry, topology and physics, 357-422, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995

Christian PAULY

Université de Montpellier II  
 Département de mathématiques  
 Case Courrier 051  
 Place Eugène Bataillon  
 F-34095 Montpellier Cedex 5  
 E-mail : pauly@math.univ-montp2.fr