Fibrés paraboliques de rang 2 et fonctions thêta généralisées

Christian Pauly

Laboratoire J.-A. Dieudonné
Université Nice-Sophia-Antipolis
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 02
France
e-mail: pauly@math.unice.fr

1 Introduction

Soit C une courbe lisse, irréductible et projective sur $\mathbb{C}$ de genre $g \geq 2$ et notons $\mathcal{SU}_C(2)$ l'espace de modules paramétrant les classes de S-équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang 2 et de déterminant trivial. On sait que le groupe de Picard de $\mathcal{SU}_C(2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si l'on note $\mathcal{L}$ le générateur ample, alors les sections globales de $\mathcal{L}^k$ sont appelées *fonctions thêta généralisées* d'ordre k et les dimensions des espaces de sections $H^0(\mathcal{SU}_C(2), \mathcal{L}^k)$ sont données par la formule de Verlinde.

On a pu établir des relations entre les fonctions thêta généralisées sur $\mathcal{SU}_C(2)$ et les fonctions thêta (ordinaires) sur la jacobienne J de la courbe C. Ainsi, A. Beauville a montré que, si l'on considère le morphisme naturel $\Phi : J \longrightarrow \mathcal{SU}_C(2)$, le morphisme donné par l'image réciproque

$$\Phi^* : H^0(\mathcal{SU}_C(2), \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta)) = V$$

est un isomorphisme [B1]. De plus, via cet isomorphisme, on obtient des morphismes de multiplication $\mu_k : S^k V \longrightarrow H^0(\mathcal{SU}_C(2), \mathcal{L}^k)$ et on a pu montrer que μ_2 est un isomorphisme [B2] et que μ_4 est surjectif [vG-P] si aucune thêta-constante de C ne s'annule.

Considérons des points distincts $p_1, \dots, p_r$ sur C, ainsi que des entiers k et $\vec{d} = (d_1, \dots, d_r)$ tel que $0 < d_i < k$. On peut associer à ces données (voir section 2) un espace de modules $\mathcal{N}(k, \vec{d})$ de fibrés paraboliques semi-stables (par rapport aux paramètres $(k, \vec{d})$) de rang 2 et de déterminant trivial. Cet espace a été introduit par V.B. Mehta et C.S. Seshadri [M-S].

Dans la section 4, on détermine le groupe de Picard de $\mathcal{N}(k, \vec{d})$; c'est un $\mathbb{Z}$-module libre dont le rang est $\leq r + 1$ et dépend des entiers $(k, \vec{d})$. On peut construire cependant pour tout $(k, \vec{d})$ un fibré ample, noté $\mathcal{L}^{par}$, et qui apparait dans les travaux de M.S. Narasimhan et T.R. Ramadas [N-R] ainsi que de A. Bertram [Be1]. Remarquons que les dimensions des espaces de sections $H^0(\mathcal{N}(k, \vec{d}), \mathcal{L}^{par})$ sont données par la formule de Verlinde (voir [Be1]).

La définition géométrique du diviseur Θ sur J se généralise d'une manière naturelle à $\mathcal{SU}_C(2)$. Pour L un fibré en droites de degré $g-1$, on peut définir des diviseurs de Cartier dans $|\mathcal{L}|$ par

$$\Theta_L = \{E \in \mathcal{SU}_C(2) \mid h^0(C, E \otimes L) > 0\}$$

Cette définition se généralise au cas des fibrés paraboliques et nous définissons (section 5) des diviseurs de Cartier de $|\mathcal{L}^{par}|$ par

$$\Theta_F = \{E \in \mathcal{N}(k, \vec{d}) \mid h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E, F)) > 0\}$$

où F est un fibré parabolique de rang k, dont le degré et la structure parabolique dépendent de $(k, \vec{d})$.

Finalement, dans un cas particulier ($k = 2$ et $d_i = 1$), on peut donner des relations, comme dans le cas non-parabolique, entre les sections globales de $\mathcal{L}^{par}$ et les fonctions thêta d'ordre 4 sur J. Nous considérons une famille de morphismes

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{(s,A)} : J & \longrightarrow & \mathcal{N} = \mathcal{N}(2, \vec{1}) \\ j & \longmapsto & (j \otimes \lambda) \oplus_A (j \otimes \lambda)^{-1} \end{array}$$

où λ désigne un fibré en droites de degré s. Nous associons à certains sous-ensembles A de points paraboliques une structure parabolique sur $(j \otimes \lambda) \oplus (j \otimes \lambda)^{-1}$. Nous noterons $(j \otimes \lambda) \oplus_A (j \otimes \lambda)^{-1}$ le fibré parabolique ainsi obtenu. Le résultat principal (théorème 6.4) est alors:

Pour des points $p_1, \dots, p_r$ génériques, la famille de morphismes $\Phi_{(s,A)}$ induit par image réciproque un isomorphisme

$$\bigoplus_{(s,A)} \Phi^*_{(s,A)} : H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}^{par}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(s,A)} H^0(J, \mathcal{O}_J(4\Theta))$$

Notations et rappels

Si I est un ensemble fini, $|I|$ désigne son cardinal.

$[x]$ désigne la partie entière de x.

$J^{(d)}$ désigne la variété des classes d'isomorphismes des fibrés en droites de degré d sur C. $J^{(d)}$ est isomorphe (non canoniquement) à la jacobienne $J = J^{(0)}$ de la courbe C.

Soient X et Y des variétés algébriques, alors $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ désigne la projection sur X.

Si E est un fibré vectoriel sur X, $E^\vee = \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_X)$ désigne le fibré dual et $h^i(X, E) = \dim H^i(X, E)$

Soit L un fibré en droites sur C et A un ensemble fini de points de C. On notera $L(A)$ le fibré en droites $L \otimes \mathcal{O}_C(\sum_{p \in A} p)$.

L'équivalence linéaire de diviseurs sera notée $\equiv$.

Rappelons une proposition de Kempf sur la multiplication de fonctions thêta d'ordre 2 sur les variétés abéliennes: soit Θ un diviseur thêta symétrique sur une variété abélienne A, donnant la polarisation principale. Alors le fibré en droites $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ est indépendant du choix de Θ. Pour $x \in A$, notons $T_x : A \longrightarrow A$ la translation par x, et Θ_x l'image réciproque par T_x de Θ. Alors le théorème du carré [M1] donne $2\Theta_x + 2\Theta_{-x} \equiv 4\Theta$ et nous pouvons considérer le morphisme de multiplication (défini à un scalaire près)

$$m_x : H^0(A, \mathcal{O}_A(2\Theta_x)) \otimes H^0(A, \mathcal{O}_A(2\Theta_{-x})) \longrightarrow H^0(A, \mathcal{O}_A(4\Theta))$$

On a alors la proposition suivante, due à Kempf [K]:

Proposition 1.1 *Le rang du morphisme de multiplication m_x est égal au nombre de points de 2-torsion $\alpha \in A$ tel que $2x \not\in \Theta_\alpha$.*

2 Généralités sur les fibrés paraboliques

Considérons r points distincts $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sur la courbe C. Un *fibré parabolique* $(E, \{D_{p_i}\})$ de rang 2 est la donnée d'un fibré vectoriel E de rang 2 et pour chaque point p_i appelé *point parabolique*, d'une droite D_{p_i} dans la fibre E_{p_i} au-dessus du point p_i, ou, de manière équivalente, d'un quotient Q_{p_i} de dimension 1 de E_{p_i}. Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera aussi E le fibré parabolique $(E, \{D_{p_i}\})$. On peut définir une notion de stabilité pour les fibrés paraboliques, dépendant de certains paramètres supplémentaires. Soit $\mathrm{R} = \{\vec{d} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{Z}^r \mid \sum d_i \textit{ pair}\}$. C'est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang r et d'indice 2 dans $\mathbb{Z}^r$. Soit

$$\Delta = \{(k, \vec{d}) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{R} \mid k > 0 \text{ et } 0 < d_i < k\}$$

Un élément de $(k, \vec{d}) \in \Delta$ est appelé *poids parabolique.*

Définition 2.1 *Soit $(k, \vec{d}) \in \Delta$ et $(E, \{D_{p_i}\})$ un fibré parabolique de rang 2. On définit le degré parabolique*

$$\mathrm{pardeg}(E) := \deg(E) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{r} d_i$$

et pour un sous-fibré en droites $M \hookrightarrow E$

$$\mathrm{pardeg}(M) := \deg(M) + \frac{1}{k} \sum_{i \mid M_{p_i} = D_{p_i}} d_i$$

On dit que $(E, \{D_{p_i}\})$ est stable (resp. semi-stable) par rapport au poids parabolique $(k, \vec{d})$ si $\mathrm{pardeg}(M) < \frac{1}{2}\mathrm{pardeg}(E)$ *(resp. $\leq$) pour tout sous-fibré en droites M.*

Soit I un sous-ensemble de $\{p_1, \ldots, p_r\}$ et M, M' des fibrés en droites sur C. On notera $M \oplus_I M'$ le fibré parabolique dont le fibré sous-jacent est $M \oplus M'$ et la structure parabolique en p est donnée par le facteur direct M_p si $p \in I$ et par M'_p sinon.

Soit $(E, \{D_{p_i}\})$ un fibré parabolique semi-stable de rang 2. S'il existe un sous-fibré en droites $M \hookrightarrow E$ tel que $\mathrm{pardeg}(M) = \frac{1}{2}\mathrm{pardeg}(E)$, on pose $gr(E) = M \oplus_I E/M$, avec $I = \{i \mid M_{p_i} = D_{p_i}\}$. Dans le cas contraire, on pose $gr(E) = E$.

Définition 2.2 *On dit que deux fibrés paraboliques E et E' semi-stables de rang 2 sont S-équivalents si $gr(E) \cong gr(E')$.*

Définition 2.3 *Soit S une variété algébrique. Une famille $(S, \mathcal{E}, \{\mathcal{Q}_i\})$ de fibrés paraboliques de rang 2 est la donnée d'un fibré $\mathcal{E}$ de rang 2 sur $S \times C$, et pour chaque point parabolique p_i, d'un fibré en droites $\mathcal{Q}_i$ sur S quotient de $\mathcal{E}_{|S \times \{p_i\}}$.*

Alors Mehta et Seshadri ont construit un espace de modules des fibrés paraboliques [M-S]:

Théorème 2.4 *Etant donné un poids parabolique $(k, \vec{d})$, il existe un espace de module grossier $\mathcal{N}(k, \vec{d})$ projectif et irréductible, paramétrant fibrés paraboliques semi-stables de rang 2 et de déterminant trivial, modulo S-équivalence. De plus, l'ouvert des fibrés paraboliques stables $\mathcal{N}^s(k, \vec{d}) \hookrightarrow \mathcal{N}(k, \vec{d})$ est lisse.*

Voir aussi [Bh] et [Be2] pour une construction de ces espaces de modules utilisant une méthode de Gieseker. Il résulte de la construction via la théorie de géométrie invariante, due à Mumford, que ces espaces sont normaux et que $\dim \mathcal{N}(k, \vec{d}) = 3g - 3 + r$. Si les entiers d_i sont "petits" devant k, un fibré parabolique semi-stable est aussi semi-stable (au sens usuel). On a le lemme suivant [Be1]:

Lemme 2.5 *Pour $k > \frac{1}{2} \sum d_i$, il existe un morphisme (d'oubli)*

$$\pi : \mathcal{N}(k, \vec{d}) \longrightarrow \mathcal{SU}_C(2)$$

tel que $\pi^{-1}\mathcal{SU}_C^s(2)$ est un $(\mathbb{P}^1)^r$-fibré sur $\mathcal{SU}_C^s(2)$.

Remarque: Pour les autres choix de poids paraboliques, il existe des fibrés paraboliques semi-stables dont le fibré sous-jacent n'est pas semi-stable.

Dans la suite nous utiliserons une proposition décrivant la descente de fibrés, due à Kempf [D-N]: soit Y une variété intègre sur laquelle agit le groupe $SL(n)$. Un $SL(n)$-fibré sur Y est un fibré sur Y muni d'une action linéaire de $SL(n)$ compatible avec l'action de $SL(n)$ sur Y. On suppose qu'il existe un bon quotient $\pi : Y \to M$ (pour la définition de bon quotient, voir [S]). Pour tout fibré E' sur M, le fibré $\pi^* E'$ est muni d'une structure naturelle de $SL(n)$-fibré sur Y. Si E est un $SL(n)$-fibré sur Y, on dit que E *descend à* M, s'il existe un fibré E' sur M tel que les $SL(n)$-fibrés E et $\pi^* E'$ soient isomorphes.

Théorème 2.6 ("lemme de descente") *Soit E un $SL(n)$-fibré vectoriel sur Y. Alors E descend sur M si et seulement si pour tout point fermé $y \in Y$ tel que l'orbite de y par $SL(n)$ soit fermée, le stabilisateur de y dans $SL(n)$ agit trivialement sur la fibre E_y.*

3 Le diviseur déterminant

Soit S une variété intègre, C une courbe irréductible, projective et lisse, $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $S \times C$. On note $\mathcal{E}_s$ la restriction de $\mathcal{E}$ à $\{s\} \times C$. La proposition suivante [K-M] permet de définir le fibré déterminant associé à $\mathcal{E}$.

Proposition 3.1 *Il existe un complexe de longueur 1 de faisceaux localement libres sur S, $u : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_1$ tel que* Coker $u = R^1\pi_{S*}\mathcal{E}$ *et* Ker $u = \pi_{S*}\mathcal{E}$.

On définit le *fibré déterminant* associé à $\mathcal{E}$ comme étant le fibré en droites sur S

$$\det R\pi_S\mathcal{E} := (\det\mathcal{L}_0)^{-1} \otimes (\det\mathcal{L}_1)$$

Ce fibré en droites est indépendant du complexe choisi. Remarquons que, si les faisceaux $\pi_{S*}\mathcal{E}$ et $R^1\pi_{S*}\mathcal{E}$ sont localement libres, alors $\det R\pi_S\mathcal{E} = (\det\pi_{S*}\mathcal{E})^{-1} \otimes \det R^1\pi_{S*}\mathcal{E}$. Cette définition est l'inverse de la définition usuelle [K-M]. Rappelons que, comme $\mathcal{E}$ est plat sur S, l'application $s \longmapsto \chi(\mathcal{E}_s)$ est constante et que les applications $s \longmapsto h^i(C, \mathcal{E}_s)$ sont semi-continues supérieurement [M1] ou [H1].

Supposons en plus que $h^0(C, \mathcal{E}_s) = h^1(C, \mathcal{E}_s) = 0$ pour s générique. Ceci implique que $\pi_{S*}\mathcal{E} = 0$ et qu'on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \xrightarrow{u} \mathcal{L}_1 \longrightarrow R^1\pi_{S*}\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{rg}\mathcal{L}_0 = \mathrm{rg}\mathcal{L}_1$. Alors $\det u \in \mathrm{Hom}(\det\mathcal{L}_0, \det\mathcal{L}_1)$ définit une section globale non nulle de $\det R\pi_S\mathcal{E}$ dont le schéma des zéros est un diviseur de support $\{s \in S \mid h^0(C, \mathcal{E}_s) = h^1(C, \mathcal{E}_s) > 0\}$. C'est le *diviseur déterminant* associé à $\mathcal{E}$, noté $\mathrm{divdet} R\pi_S\mathcal{E}$. Voici quelques propriétés du fibré déterminant, démontrées dans [K-M] (lemmes 3.2 et 3.6) et dans [H2] (lemme 3.4).

Lemme 3.2 *Si l'on a une suite exacte de fibrés vectoriels sur $S \times C$*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow 0$$

alors $\det R\pi_S\mathcal{E} \cong \det R\pi_S\mathcal{E}' \otimes \det R\pi_S\mathcal{E}''$

Lemme 3.3 *Soit i_p l'immersion fermée $S \times \{p\} \longrightarrow S \times C$ et $\mathcal{F}$ un fibré sur S. Alors* $\det R\pi_S(i_{p*}\mathcal{F}) \cong (\det\mathcal{F})^{-1}$

Démonstration: Comme $\pi_S \circ i_p = Id_S$, on a $\pi_{S*}(i_{p*}\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $R^1\pi_{S*}(i_{p*}\mathcal{F}) = 0$, ce qui implique le lemme. □

Lemme 3.4 *Dualité de Serre:* $\det R\pi_S\mathcal{E} \cong \det R\pi_S(\mathcal{E}^\vee \otimes \pi_C^* K_C)$

Lemme 3.5 *Soit F un fibré sur C. Si* $\det(\mathcal{E}_s)$ *est indépendant de $s \in S$, alors*

1. $\det(\mathcal{E}_{|S\times\{p\}})$ *est indépendant de $p \in C$*
2. $\det R\pi_S(\mathcal{E} \otimes \pi_C^* F) \cong (\det R\pi_S\mathcal{E})^{\mathrm{rg} F} \otimes \det(\mathcal{E}_{|S\times\{p\}})^{-\deg F}$

Démonstration: 1. D'après le principe see-saw [M1], il existe un fibré en droites M sur S, tel que $det\mathcal{E} = \pi_S^* M \otimes \pi_C^*(\det\mathcal{E}_s)$. En restreignant à $S \times \{p\}$ on obtient: $\det(\mathcal{E}_{|S\times\{p\}}) = M$.

2. Démontrons le lemme par récurrence sur le rang de F. Si F est un fibré en droites: supposons d'abord $F = \mathcal{O}_C(D)$ avec $D = \sum n_q q$ un diviseur effectif. Prenons l'image réciproque par π_C de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_D \to 0$ et tensorisons par $\mathcal{E}$. On obtient sur $S \times C$ la suite exacte $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \pi_C^*\mathcal{O}_C(D) \to \oplus\mathcal{E}_{|S\times\{q\}}^{\oplus n_q} \to 0$. Les lemmes 3.2 et 3.3 donnent alors le résultat dans ce cas. Si D est un diviseur quelconque, on peut l'écrire comme différence de deux diviseurs effectifs $D_1 - D_2$ et on applique le résultat précédent, premièrement aux fibrés $\mathcal{E} \otimes \pi_C^*\mathcal{O}_C(-D_2)$ et $F = \mathcal{O}_C(D_2)$, puis aux fibrés $\mathcal{E} \otimes \pi_C^*\mathcal{O}_C(-D_2)$ et $F = \mathcal{O}_C(D_1)$.

Si F est un fibré de rang ≥ 2, on peut écrire F comme extension: $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$. Prenons l'image réciproque par π_C et tensorisons par $\mathcal{E}$. Alors le lemme 3.2 et l'hypothèse de récurrence permettent de conclure. □

Lemme 3.6 *Pour tout changement de base $\varphi : S' \longrightarrow S$, on a un isomorphisme* $\det R\pi_{S'}(\varphi^*\mathcal{E}) \cong \varphi^*(\det R\pi_S\mathcal{E})$.

4 Le groupe de Picard de $\mathcal{N}(k, \vec{d})$

Nous fixons désormais k et $\vec{d}$ et posons $\mathcal{N} := \mathcal{N}(k, \vec{d})$ et $\mathcal{N}^s := \mathcal{N}^s(k, \vec{d})$. Soit $\mathcal{O}(1)$ un fibré ample de degré 1 et ν un entier assez grand, $n = 2\nu + 2(1-g)$, Q le schéma de Hilbert des faisceaux cohérents quotients de $\mathcal{O}_C^n(-\nu)$, de déterminant trivial et de polynôme de Hilbert égal à $P(X) = 2X + 2(1-g)$. Considérons l'ouvert Ω des points q de Q tel que, si $\mathcal{O}_C^n(-\nu) \to \mathcal{F}_q \to 0$ est le quotient correspondant, alors $\mathcal{F}_q$ est localement libre, $H^1(\mathcal{F}_q(\nu)) = 0$, et $\mathcal{O}_C^n \to \mathcal{F}_q(\nu)$ induit un isomorphisme sur les sections globales. On sait que Ω est un ouvert lisse [S]. Notons $\mathcal{F}$ le fibré universel sur $\Omega \times C$. Considérons le produit fibré sur Ω

$$\mathcal{R} := \mathbb{P}(\mathcal{F}^\vee_{|\Omega\times\{p_1\}}) \times_\Omega \cdots \times_\Omega \mathbb{P}(\mathcal{F}^\vee_{|\Omega\times\{p_r\}})$$

c'est un $(\mathbb{P}^1)^r$-fibré sur Ω. Notons $\mathcal{Q}_i$ l'image réciproque sur $\mathcal{R}$ du fibré quotient universel sur $\mathbb{P}(\mathcal{F}^\vee_{|\Omega\times\{p_i\}})$. Soit $\mathcal{R}^{ss}$ (resp. $\mathcal{R}^s$) l'ouvert des points de $\mathcal{R}$ correspondants aux points semi-stables (resp. stables) sous l'action de $SL(n)$, la linéarisation étant donnée par le poids parabolique $(k, \vec{d})$ (voir [S] ou [Be2]). Ces ouverts sont lisses.

L'espace de module $\mathcal{N}$ est alors un bon quotient de $\mathcal{R}^{ss}$ par $SL(n)$, et $\mathcal{N}^s$ est un quotient géométrique de $\mathcal{R}^s$ par $SL(n)$.

Calcul de $\mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s)$

Considérons $\forall l \in \mathbb{Z}$ et $\forall \vec{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in$ R le fibré en droites sur $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{L}(l, \vec{a}) := (\det R\pi_{\mathcal{R}}\mathcal{F})^l \otimes (\otimes \mathcal{Q}_i^{a_i}) \otimes \det(\mathcal{F}_{|\mathcal{R}\times\{y\}})^{l(1-g)-\frac{1}{2}\sum a_i}$$

où y est un point de C.

Décrivons d'abord l'action de $SL(n)$ sur le fibré universel $\mathcal{F}$ sur $\Omega \times C$. A un point $q \in \Omega$ correspond un quotient $\beta : \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{O}_C(-\nu) \to \mathcal{F}_q$. Un élément $g \in SL(n)$ agit sur Ω par $\beta \mapsto \beta \circ g^{-1}$. On notera cet automorphisme de Ω aussi g. Nous pouvons munir le fibré trivial $\mathcal{O}_\Omega^n = \Omega \times \mathbb{C}^n$ d'une action de $SL(n)$ définie par $g.(q, v) = (g.q, g.v)$ pour tout $g \in SL(n)$, $q \in \Omega$ et $v \in \mathbb{C}^n$. On obtient ainsi des isomorphismes de fibrés $g^*\mathcal{O}_\Omega^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\Omega^n$ pour tout $g \in SL(n)$. Faisons agir $SL(n)$ trivialement sur C et $\mathcal{O}_C(-\nu)$. Nous munissons le fibré $\mathcal{O} := \pi_\Omega^*\mathcal{O}_\Omega^n \otimes \pi_C^*\mathcal{O}(-\nu)$ sur $\Omega \times C$ de l'action produit de $SL(n)$. Or le fibré universel $\mathcal{F}$ s'écrit comme quotient $\mathcal{O} \to \mathcal{F} \to 0$ et l'isomorphisme $g^*\mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$, qui définit l'action de g sur $\mathcal{O}$, passe au quotient: $g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

D'autre part, si l'on note aussi $\mathcal{F}$ l'image réciproque de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{R} \times C$, le fibré quotient universel $\mathcal{Q}_i$ s'écrit comme quotient $\mathcal{F}_{|\mathcal{R}\times\{p_i\}} \to \mathcal{Q}_i \to 0$ et on le munit de l'action linéaire quotient de $SL(n)$.

Le lemme 3.6 montre que l'action linéaire de $SL(n)$ sur $\mathcal{F}$ définit une action linéaire de $SL(n)$ sur $\det R\pi_{\mathcal{R}}\mathcal{F}$.

Montrons que la restriction du $SL(n)$-fibré en droites $\mathcal{L}(l,\vec{a})$ à l'ouvert $\mathcal{R}^s$ descend à $\mathcal{N}^s$: soit $q \in \mathcal{R}^s$, alors l'orbite de q sous l'action de $SL(n)$ est fermée. Comme un fibré parabolique stable est simple, c'est-à-dire que les seuls endomorphismes paraboliques sont les homothéties (proposition 9d de [S]), le stabilisateur de q dans $SL(n)$ est $\mathbb{C}^* Id \cap SL(n)$. Par définition de l'action de $SL(n)$, $\lambda Id \in SL(n)$ agit comme multiplication par λ sur le fibré $\mathcal{F}_q$ et sur les quotients $(\mathcal{F}_q)_{p_i} \to Q_i \to 0$, qui donnent la structure parabolique du fibré $\mathcal{F}_q$. La fibre au-dessus de q de $\det R\pi_S\mathcal{F}$ est isomorphe à $\det H^0(C,\mathcal{F}_q)^{-1} \otimes \det H^1(C,\mathcal{F}_q)$ et λId y agit par $\lambda^{-\chi(\mathcal{F}_q)}$. Finalement, l'action de λId sur la fibre $\mathcal{L}(l,\vec{a})_q$ est la multiplication par

$$\lambda^{-2(1-g)l+\sum a_i+2(l(1-g)-\frac{1}{2}\sum a_i)} = \lambda^0 = 1$$

donc, d'après le lemme de descente (théorème 2.6), $\mathcal{L}(l,\vec{a})$ descend sur $\mathcal{N}^s$.

Soit $\pi : \mathcal{R}^s \to \mathcal{N}^s$ le morphisme de passage au quotient et soit $\gamma : \mathbb{Z} \times \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s)$ l'application associant à $(l,\vec{a})$ le fibré sur $\mathcal{N}^s$ provenant de $\mathcal{L}(l,\vec{a})$.

Proposition 4.1 $\gamma : \mathbb{Z} \times \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration: 1. Montrons que γ est injectif. Le stabilisateur en un point $q \in \mathcal{R}^s$ (i.e. $\mathbb{C}^* Id \cap SL(n)$) agit trivialement sur la fibre $(\pi^*L)_q$, donc π^*L est un $PSL(n)$-fibré. Inversement, tout $PSL(n)$-fibré sur $\mathcal{R}^s$ descend sur $\mathcal{N}^s$ (lemme de descente), ce qui donne un isomorphisme $\pi^* : \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s) \to \mathrm{Pic}^{PSL(n)}(\mathcal{R}^s)$. Le raisonnement de [D-N, lemme 3.2] montre que le morphisme d'oubli $\mathrm{Pic}^{PSL(n)}(\mathcal{R}^s) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{R}^s)$ est injectif.

D'après le lemme 6.14 de [N-R], la codimension du complément de $\mathcal{R}^s$ dans $\mathcal{R}$ est $\geq g \geq 2$. Comme $\mathcal{R}$ est lisse, $\mathrm{Pic}(\mathcal{R}^s) \cong \mathrm{Pic}(\mathcal{R})$. Il résulte de la définition de $\mathcal{R}$ que $\mathrm{Pic}(\mathcal{R}) \cong \mathrm{Pic}(\Omega) \oplus \mathbb{Z}^r$ (exercice II.7.9 de [H1]), où les fibrés quotients $\mathcal{Q}_i$ sont les générateurs de $\mathbb{Z}^r$.

Finalement, en composant les morphismes précédents, on obtient un morphisme injectif $\tau : \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\Omega) \oplus \mathbb{Z}^r$ et il est immédiat que $pr_2 \circ \tau \circ \gamma(l,\vec{a}) = \vec{a}$. De plus, $\tau(\gamma(1,\vec{0})) \in \mathrm{Pic}(\Omega)$ descend sur $\mathcal{SU}_C(2)$ (plus précisément, la restriction à l'ouvert des points semi-stables) et engendre $\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}_C(2)) \cong \mathbb{Z}$ [D-N]. L'injectivité de γ résulte alors du fait que $\gamma(1,\vec{0})$ n'est pas de torsion.

2. Montrons que γ est surjectif. Soit L un fibré en droites sur $\mathcal{N}^s$. Alors $\tau(L) \in \mathrm{Pic}(\Omega) \oplus \mathbb{Z}^r$ s'écrit $(M, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, où M est un $SL(n)$-fibré sur Ω et $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Il existe alors un entier, noté $e(M)$, tel que pour tout point $q \in \Omega$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^* Id \cap SL(n)$, l'action de λ sur M_q soit la multiplication par $\lambda^{e(M)}$. Remarquons que l'entier $e(M)$ est défini modulo n (qui est pair). D'après la proposition 5.1 de [D-N], $e(M)$ est pair. Comme $\pi^* L$ est un $PSL(n)$-fibré sur $\mathcal{R}^s$, on a $e(M) + \sum \alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$, et par conséquent $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in$ R. Alors les fibrés

$$\tau(\gamma(1, \vec{0})) \quad \text{et} \quad \tau(L \otimes \gamma(0, -\vec{\alpha})) \in \mathrm{Pic}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\Omega) \oplus \mathbb{Z}^r$$

sont des $PSL(n)$-fibrés sur $\mathcal{R}^s$. Soit $\mathcal{W}$ l'ouvert des points de $\mathcal{R}^s$ dont le fibré sous-jacent est semi-stable. Nous pouvons définir sur cet ouvert un morphisme d'oubli $\mathcal{W} \to \Omega^{ss}$ (l'ouvert des points semi-stables (au sens usuel) de Ω). Comme la codimension dans $\mathcal{R}^s$ du complémentaire de $\mathcal{W}$ est ≥ 2 (lemme 4.2), on obtient un isomorphisme $\mathrm{Pic}^{PSL(n)}(\mathcal{R}^s) \to \mathrm{Pic}^{PSL(n)}(\mathcal{W})$ et les $PSL(n)$-fibrés $\tau(\gamma(1, \vec{0}))$ et $\tau(L \otimes \gamma(0, -\vec{\alpha}))$, restreints à $\mathcal{W}$, proviennent de $PSL(n)$-fibrés sur Ω^{ss}. D'après la proposition 4.1 de [D-N] tout $PSL(n)$-fibré sur Ω^{ss} descend sur $\mathcal{SU}_C(2)$ et, en particulier, $\tau(\gamma(1, \vec{0}))$ donne par descente le générateur ample de $\mathrm{Pic}(\mathcal{SU}_C(2)) \cong \mathbb{Z}$. Par conséquent, il existe un entier $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\gamma(\alpha_0, 0) \cong L \otimes \gamma(0, -\vec{\alpha})$. □

Lemme 4.2 *La codimension dans $\mathcal{R}^s$ du complémentaire de $\mathcal{W}$ est ≥ 2.*

Démonstration: L'idée de la démonstration est de contruire des familles de fibrés paraboliques, dont le fibré sous-jacent n'est pas stable, comme extensions de fibrés en droites, puis d'évaluer la dimension de leurs images dans $\mathcal{R}^s$. On peut adapter, sans difficultés, la démonstration du lemme 6.14 de [N-R]. □

Calcul de $\mathrm{Pic}(\mathcal{N})$

Montrons d'abord que la codimension dans $\mathcal{N}$ du complémentaire de $\mathcal{N}^s$ est ≥ 2. D'après la définition 2.2, une classe de S-équivalence de $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^s$ peut être représentée par un fibré parabolique $M \oplus_I M^{-1}$. De plus, on a la relation $\mathrm{pardeg}(M) = \frac{1}{2}\mathrm{pardeg}(E)$, ce qui est encore équivalent à $\deg(M) + \frac{1}{2k}(\sum_{i \in I} d_i - \sum_{i \in I^c} d_i) = 0$. Comme le nombre de sous-ensembles $I \subset \{1, \ldots, r\}$ est fini, $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^s$ est recouvert par un nombre fini d'images de jacobiennes. Donc codim $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}^s \geq 3g - 3 + r - g \geq 2$ (car $r \geq 1$ et $g \geq 2$).

Comme la variété $\mathcal{N}$ est normale, la restriction de fibrés en droites sur $\mathcal{N}$ à $\mathcal{N}^s$ est injective:

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s)$$

Déterminons, en utilisant le lemme de descente, lesquels des fibrés $\mathcal{L}(l, \vec{a})$ (restreints à $\mathcal{R}^{ss}$) pour $(l, \vec{a}) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{R}$ descendent sur $\mathcal{N}$. Considérons un point $q \in \mathcal{R}^{ss} \setminus \mathcal{R}^s$ dont l'orbite sous l'action de $SL(n)$ est fermée. On a $\mathcal{F}_q = M \oplus M^{-1}$. On peut écrire, modulo l'action de $SL(n)$, $\mathcal{O}_C^n = \mathcal{O}_C^{n_1} \oplus \mathcal{O}_C^{n_2}$ avec $H^0(M(\nu)) \cong \mathbb{C}^{n_1}$ et $H^0(M^{-1}(\nu)) \cong \mathbb{C}^{n_2}$. La structure parabolique de $\mathcal{F}_q$ est donnée en p_i par la projection sur $M_{p_i}^{-1}$, si $i \in I$, et sur M_{p_i}, si $i \in I^c$. De plus, on a la relation:

$$\deg(M) + \frac{1}{2k}(\sum_{i \in I} d_i - \sum_{i \in I^c} d_i) = 0 \tag{1}$$

D'après la proposition 25(ii) de [S], le stabilisateur de q sous l'action de $PSL(n)$ est isomorphe au quotient $Aut(\mathcal{F}_q)/\mathbb{C}^* Id$, où $Aut(\mathcal{F}_q)$ désigne le groupe des isomorphismes paraboliques de $\mathcal{F}_q$, qui dans ce cas, est égal à $\mathbb{C}^* Id \times \mathbb{C}^* Id \subset GL(n_1) \times GL(n_2)$. Déterminons l'action de $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \subset GL(n)$ sur la fibre $\mathcal{L}(l, \vec{a})_q$ au-dessus de q: on a des quotients $\mathcal{O}_C^{n_1}(-\nu) \rightarrow M \rightarrow 0$ et $\mathcal{O}_C^{n_2}(-\nu) \rightarrow M^{-1} \rightarrow 0$ et (λ_1, λ_2) agit sur le fibré M (resp. M^{-1}) comme la multiplication par λ_1 (resp. λ_2). La fibre au-dessus de q de $\det R\pi_S(\mathcal{F})$ se décompose en

$$\det H^0(C, M)^{-1} \otimes \det H^1(C, M) \otimes \det H^0(C, M^{-1})^{-1} \otimes \det H^1(C, M^{-1})$$

et (λ_1, λ_2) agit par $\lambda_1^{-\chi(M)} \lambda_2^{-\chi(M^{-1})}$. Comme $\mathcal{Q}_{i,q} = M_{p_i}$ si $i \in I^c$ et $\mathcal{Q}_{i,q} = M_{p_i}^{-1}$ si $i \in I$, on déduit de ce qui précède que (λ_1, λ_2) agit sur $\mathcal{L}(l, \vec{a})_q$ par

$$\lambda_1^{-l\chi(M) + \sum_{i \in I^c} a_i + l(1-g) - \frac{1}{2}\sum a_i} \times \lambda_2^{-l\chi(M^{-1}) + \sum_{i \in I} a_i + l(1-g) - \frac{1}{2}\sum a_i}$$

En utilisant l'équation (1) et la relation $\chi(M) = \deg(M) + 1 - g$ (Riemann-Roch) l'exposant de λ_1 s'écrit

$$\begin{aligned} &-l(\deg(M) + 1 - g) + l(1-g) + \frac{1}{2}(\sum_{i \in I^c} a_i - \sum_{i \in I} a_i) \\ &= \frac{l}{2k}(\sum_{i \in I} d_i - \sum_{i \in I^c} d_i) - \frac{1}{2}(\sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I^c} a_i) \end{aligned}$$

et pareil pour l'exposant de λ_2, qui est égal à l'opposé de l'exposant de λ_1.

Introduisons alors pour $\varepsilon = (u, J)$, où $u \in \mathbb{Z}$ et $J \subset \{1, \ldots, r\}$

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \{(x, \vec{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{R} \mid (2u)x - \sum_{i \in J} y_i + \sum_{i \in J^c} y_i = 0\}$$

c'est un sous-$\mathbb{Z}$-module libre de $\mathbb{Z} \times \mathrm{R}$ de rang r. Remarquons que les $\mathcal{H}_\varepsilon$ sont distincts et que seulement un nombre fini des $\mathcal{H}_\varepsilon$ intersectent Δ. En effet, si $(x, \vec{y}) \in \mathcal{H}_\varepsilon \cap \Delta$, alors $\mid (2u)x \mid = \mid \sum_{i \in J} y_i + \sum_{i \in J^c} y_i \mid < rx$, ce qui implique que $|u| < \frac{r}{2}$.

Supposons que $(k, \vec{d}) \in \mathcal{H}_\varepsilon$ avec $\varepsilon = (u, J)$, ce qui est équivalent à $\frac{1}{2k}(\sum_{i \in J} d_i - \sum_{i \in J^c} d_i) = u$. Il existe un point $q \in \mathcal{R}^{ss} \setminus \mathcal{R}^s$, dont l'orbite est fermée, qui correspond au fibré parabolique $M^{-1} \oplus_J M$, avec $\deg(M) = u$. L'action du stabilisateur de q sur la fibre $\mathcal{L}(l, \vec{a})_q$ est trivial si et seulement si $(2u)l - \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in J^c} a_i = 0$, c'est-à-dire $(l, \vec{a}) \in \mathcal{H}_\varepsilon$.

La condition du lemme de descente s'énonce de la manière suivante:

$$\mathcal{L}(l, \vec{a}) \textit{ descend sur } \mathcal{N} \iff$$
$$(l, \vec{a}) \in \mathcal{H}_\varepsilon \textit{ pour tout } \varepsilon \textit{ tel que } (k, \vec{d}) \in \mathcal{H}_\varepsilon$$

Remarquons que $\mathcal{L}(k, \vec{d})$ vérifie trivialement cette condition. De plus, d'après le théorème 1B de [N-R] ou le théorème 2.2 de [Be1], $\mathcal{L}(k, \vec{d})$ descend sur un fibré ample, que l'on notera dans la suite $\mathcal{L}^{par}$.

Proposition 4.3 *$Pic(\mathcal{N})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, non nul, dont le rang est $\leq r+1$ et dépend du poids parabolique $(k, \vec{d})$.*

Exemples

1. Pour des poids paraboliques génériques $(k, \vec{d}) \in \Delta$ (plus précisément, pour $(k, \vec{d}) \notin \bigcup_\varepsilon \mathcal{H}_\varepsilon$), tout fibré parabolique stable est semi-stable, donc $\mathcal{N} = \mathcal{N}^s$.

2. Considérons le cas de 2 points paraboliques ($r = 2$):

   si $d_1 < d_2$, alors $(k, \vec{d})$ n'appartient à aucun des hyperplans $\mathcal{H}_\varepsilon$ et $\mathrm{Pic}(\mathcal{N}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{N}^s) \cong \mathbb{Z}^3$

si $d_1 = d_2$, alors $(k, \vec{d})$ appartient à un unique hyperplan $\mathcal{H}_{(0,\{1\})}$ et par conséquent $\mathrm{Pic}(\mathcal{N}) \cong \mathcal{H}_{(0,\{1\})} = \{(l, \vec{a}) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{R} \mid a_1 = a_2\} \cong \mathbb{Z}^2$

3. Considérons le cas de $r = 2m \geq 4$ points paraboliques avec poids parabolique $k = 2$ et $d_1 = \cdots = d_r = 1$. On remarque alors que $(k, \vec{d}) \in \mathcal{H}_{(0,J)}$ pour tout $J \subset \{1, \ldots, r\}$ de cardinal m. Ceci implique que si $\mathcal{L}(l, \vec{a})$ descend sur $\mathcal{N}$, alors les a_i sont nécessairement tous égaux. De plus, comme $m \geq 2$, $(k, \vec{d}) \in \mathcal{H}_{(1,J)}$ pour tout J de cardinal $m+2$. Ceci implique que $l = \frac{a_i}{2}(\mid J \mid - \mid J^c \mid) = 2a_i$. Donc $(l, \vec{a})$ est nécessairement un multiple de $(k, \vec{d})$ et $\mathrm{Pic}(\mathcal{N}) = \mathbb{Z}\mathcal{L}^{par}$, où $\mathcal{L}^{par}$ désigne le fibré ample provenant de $\mathcal{L}(k, \vec{d})$.

5 Les diviseurs Θ_F

Rappelons les notations: on associe aux poids parabolique $(k, \vec{d}) \in \Delta$ l'espace de modules $\mathcal{N} := \mathcal{N}(k, \vec{d})$ et le fibré en droites ample $\mathcal{L}^{par}$ sur $\mathcal{N}$ (voir section 4). Dans cette section nous allons définir des diviseurs de Cartier appartenant au système linéaire $\mid \mathcal{L}^{par} \mid$, dont le support admet une description géométrique simple.

Considérons donc deux fibrés paraboliques E de rang 2 et F de rang $k \geq 2$. Ici, on prend comme structure parabolique de F au-dessus de p_i un sous-espace $D_i(F) \subset F_{p_i}$ de dimension $k - d_i$ (ou, de manière équivalente, un quotient $Q_i(F)$ de F_{p_i} de dimension d_i). La droite de E_{p_i} donnant la structure parabolique au-dessus de p_i est notée $D_i(E)$. Un *morphisme parabolique* entre E et F est un morphisme de fibrés $f : E \longrightarrow F$ qui conserve la structure parabolique, ce qui s'exprime encore: $f_{p_i}(D_i(E)) \subset D_i(F)$. Nous pouvons alors considérer le morphisme linéaire (surjectif):

$$u_{p_i} : \mathcal{H}om(E, F)_{p_i} \cong E_{p_i}^{\vee} \otimes F_{p_i} \longrightarrow D_i(E)^{\vee} \otimes Q_i(F) \longrightarrow 0$$

Il est alors clair que f est un morphisme parabolique si et seulement si $\forall i$, $u_{p_i}(f_{p_i}) = 0$. En choisissant pour tout point parabolique p_i un isomorphisme $D_i(E)^{\vee} \otimes Q_i(F) \cong \mathbb{C}^{d_i}$, on a une suite exacte de faisceaux sur C:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E, F) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, F) \longrightarrow \oplus \mathbb{C}_{p_i}^{d_i} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

où la somme directe est prise sur les points paraboliques et $\mathbb{C}_{p_i}$ est le faisceau gratte-ciel sur C de support p_i. Le faisceau $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E, F)$ est localement libre, car c'est un sous-faisceau du fibré $\mathcal{H}om(E, F)$.

Considérons un fibré parabolique F de rang k et de degré $k(g-1)+\frac{1}{2}\sum d_i$ ayant la structure parabolique décrite ci-dessus. On a alors, par Riemann-Roch : $\chi(\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E,F)) = 0$ pour tout fibré parabolique E de rang 2 et de déterminant trivial. Supposons qu'il existe un fibré parabolique $E \in \mathcal{N}^s$ tel que

$$h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E,F)) = h^1(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E,F)) = 0 \tag{3}$$

On dira que F *définit un diviseur thêta sur* $\mathcal{N}$ si cette condition est vérifiée.

Proposition 5.1 *Il existe un diviseur de Cartier, noté Θ_F, appartenant au système linéaire $\mathcal{L}^{par}$, dont la restriction à l'ouvert des points stables est ensemblistement égal à:*

$$\{E \in \mathcal{N}^s \mid h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E,F)) > 0\}$$

Démonstration: Soit $(S, \mathcal{E}, \{\mathcal{Q}_i\})$ une famille de fibrés paraboliques de rang 2 sur $S \times C$ tel que $\forall s \in S$, $det(\mathcal{E}_s) \cong \mathcal{O}_C$. Soit $\mathcal{S}_i$ le noyau du morphisme surjectif: $\mathcal{E}_{|S\times\{p_i\}} \longrightarrow \mathcal{Q}_i$. On peut alors définir un faisceau $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F)$ pour la famille de fibrés paraboliques $(S, \mathcal{E}, \{\mathcal{Q}_i\})$ sur $S \times C$. Sur $S \times \{p_i\}$ on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{E}_{|S\times\{p_i\}} \longrightarrow \mathcal{Q}_i \longrightarrow 0$$

En adaptant le raisonnement précédent, on obtient un morphisme linéaire surjectif:

$$u_{p_i} : \mathcal{H}om(\mathcal{E}_{|S\times\{p_i\}}, \pi_C^* F_{p_i}) \cong \mathcal{E}^{\vee}_{|S\times\{p_i\}} \otimes \pi_C^* F_{p_i} \longrightarrow \mathcal{S}_i^{-1} \otimes Q_i(F) \longrightarrow 0$$

et, comme précédemment, en choisissant un isomorphisme $Q_i(F) \cong \mathbb{C}^{d_i}$, on a la suite exacte de faisceaux sur $S \times C$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F) \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F) \longrightarrow \oplus(\mathcal{S}_i^{-1})^{\oplus d_i} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

On peut montrer que $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F)$ est localement libre ([S] page 57). D'après le lemme 3.5 (1), $\det(\mathcal{E}_{|S\times\{p_i\}})$ est indépendant du point p_i. Appelons ce fibré $\mathcal{D}$. Appliquons le lemme 3.2 à la suite exacte (4):

$$\begin{aligned}&\det R\pi_S(\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F))\\ &\cong \det R\pi_S(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F)) \otimes (\det R\pi_S(\oplus(\mathcal{S}_i^{-1})^{\oplus d_i}))^{-1}\end{aligned}$$

puis au second facteur:

$$\cong \det R\pi_S(\mathcal{H}om(\mathcal{E}, \pi_C^* F)) \otimes \otimes(\det R\pi_S(\mathcal{S}_i^{-1}))^{-d_i}$$

appliquons le lemme 3.4 (dualité de Serre) et le lemme 3.3:

$$\cong \det R\pi_S(\mathcal{E} \otimes \pi_C^*(F^\vee \otimes K_C)) \otimes (\otimes \mathcal{S}_i^{-d_i})$$

et comme $\mathcal{S}_i^{-1} \cong \mathcal{Q}_i \otimes \mathcal{D}^{-1}$

$$\cong \det R\pi_S(\mathcal{E} \otimes \pi_C^*(F^\vee \otimes K_C)) \otimes (\otimes \mathcal{Q}_i^{d_i}) \otimes \mathcal{D}^{-\sum d_i}$$

or $\deg(F^\vee \otimes K_C) = k(g-1) - \frac{1}{2}\sum d_i$ et le lemme 3.5 (2) donne:

$$\cong \det R\pi_S(\mathcal{E})^k \otimes (\otimes \mathcal{Q}_i^{d_i}) \otimes \mathcal{D}^{k(1-g)-\frac{1}{2}\sum d_i}$$

En particulier, le fibré déterminant associé à la famille universelle $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{R}^{ss} \times C$ (voir section 4) $\det R\pi_{\mathcal{R}^{ss}}(\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \pi_C^* F))$ est isomorphe au fibré en droites $\mathcal{L}(k, \vec{d})$. Or, ce fibré descend sur $\mathcal{N}$: il est l'image réciproque du fibré en droites ample $\mathcal{L}^{par}$. D'autre part, on a supposé qu'il existe $q \in \mathcal{R}^{ss}$ tel que $h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(\mathcal{F}_q, F)) = 0$ et d'après le théorème de semi-continuité [H], ceci est vrai sur un ouvert de $\mathcal{R}^{ss}$. On peut donc définir (voir section 3), à un scalaire près, une section de $\mathcal{L}(k, \vec{d})$, $SL(n)$-invariante, qui descend en une section de $\mathcal{L}^{par}$ sur $\mathcal{N}$ et dont le schéma des zéros est un diviseur de support (sur l'ouvert des points stables) $\{E \in \mathcal{N}^s \mid h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om(E, F)) > 0\}$. $\square$

Deux questions se posent naturellement:

1. Est-ce qu'il existe des fibrés paraboliques F qui définissent un diviseur thêta sur $\mathcal{N}$? S'il existe un tel F, le théorème de semi-continuité affirme que pour des fibrés paraboliques F génériques, cette condition est encore vérifiée.

2. Supposons que F définit un diviseur thêta sur $\mathcal{N}$. Est-ce que les diviseurs Θ_F engendrent le système linéaire $\mid \mathcal{L}^{par} \mid$?

Dans un cas particulier ($k = 2$ et $d_i = 1$), nous pouvons donner une réponse affirmative à 1 et 2. (voir section 6)

6 Le système linéaire $|\mathcal{L}^{par}|$ et fonctions thêta d'ordre 4

Dans cette section nous considérons le cas particulier, où le poids parabolique est "minimal", c'est-à-dire $k = 2$ et $d_1 = \cdots = d_r = 1$. Soit $\mathcal{N} := \mathcal{N}(2, \vec{1})$ l'espace de modules correspondant. Remarquons que $\mathcal{N}$ n'est pas lisse et que $\mathrm{Pic}(\mathcal{N}) = \mathbb{Z}\mathcal{L}^{par}$ (voir section 4 exemple 3). La formule de Verlinde [Be1] permet de calculer:

$$h^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}^{par}) = 4^g 2^{m-1}$$

Dans ce cas particulier, nous pouvons donner des relations entre les sections de $\mathcal{L}^{par}$ (appelées fonctions thêta généralisées) et les fonctions thêta d'ordre 4 sur la jacobienne J.

Le nombre de points paraboliques est pair ($r = 2m$) et l'on peut regrouper les points en deux sous-ensembles $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ et $Q = \{p_{m+1}, \dots, p_{2m}\}$.

On notera C_m^s l'ensemble des sous-ensembles de cardinal s de P. Pour $A \in C_m^s$, on notera $A^c \in C_m^{m-s}$ le complémentaire de A dans P. On a : $| C_m^s |= \binom{m}{s}$. De plus, on a l'identité suivante, qui résulte des propriétés élémentaires du triangle de Pascal:

$$\binom{m}{m} + \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-4} + \cdots + \binom{m}{m-2[\frac{m}{2}]} = 2^{m-1}$$

Pour tout $s \in \{0, 1, \dots, [\frac{m}{2}]\}$ et tout $A \in C_m^{m-2s}$ on peut considérer la famille de fibrés paraboliques $L \oplus_A L^{-1}$ pour $L \in J^{(s)}$.

Lemme 6.1 *Ces fibrés paraboliques sont semi-stables (mais pas stables) par rapport au poids parabolique* $(2, \vec{1})$.

Démonstration: Le fibré parabolique $L \oplus_A L^{-1}$ est extension (parabolique) des fibrés en droites (paraboliques) semi-stables L et L^{-1} avec $\mathrm{pardeg}(L) = \deg(L) + \frac{1}{2}(m - 2s) = \frac{m}{2}$ et $\mathrm{pardeg}(L^{-1}) = \deg(L^{-1}) + \frac{1}{2}(m + 2s) = \frac{m}{2}$. Le corollaire 10 de [S] implique alors que $L \oplus_A L^{-1}$ est semi-stable. $\square$

Nous pouvons donc définir pour tout $s \in \{0, 1, \dots, [\frac{m}{2}]\}$ et tout $A \in C_m^{m-2s}$ des morphismes

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{(s,A)} : J & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ j & \longmapsto & (j \otimes \lambda) \oplus_A (j \otimes \lambda)^{-1} \end{array}$$

où λ est un fibré en droites de degré s et tel que $\lambda^4 = \mathcal{O}(A^c + Q - A)$

Nous pouvons définir de même des familles, paramétrées par $J \times J$, de diviseurs du système linéaire $|\mathcal{L}^{par}|$. Pour tout $s' \in \{0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}]\}$ et tout $B \in C_m^{2s'}$, nous pouvons considérer les fibrés paraboliques de rang 2 et de degré $2g-2+m$ données par $M \oplus_B M'$ avec $M \in J^{(g-1+m-s')}$ et $M' \in J^{(g-1+s')}$. D'après la proposition 5.1, les diviseurs $\Theta_{M \oplus_B M'}$ appartiennent au système linéaire $|\mathcal{L}^{par}|$ (on verra plus loin que $M \oplus_B M'$ définit un diviseur thêta sur $\mathcal{N}$). On notera $\mathcal{F}_{(s',B)}$ le sous-espace linéaire de $H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}^{par})$ engendré par les sections correspondant à ces diviseurs.

Lemme 6.2 *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme de fibrés*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(L \oplus_A L^{-1}, M \oplus_B M') \cong \\
&\quad \mathcal{H}om(L, M')(-A \cap B) \oplus \mathcal{H}om(L, M)(-A \cap B^c) \oplus \\
&\quad \mathcal{H}om(L^{-1}, M')(-A^c \cap B) \oplus \mathcal{H}om(L^{-1}, M)(-A^c \cap B^c - Q)
\end{aligned}$$

Démonstration: L'ensemble P est l'union disjointe des 4 sous-ensembles $A \cap B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ et $A^c \cap B^c$. Le fibré $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(L \oplus_A L^{-1}, M \oplus_B M')$ est un sous-fibré de $\mathcal{H}om(L \oplus L^{-1}, M \oplus M')$ qui se décompose en somme directe $\mathcal{H}om(L, M) \oplus \mathcal{H}om(L, M') \oplus \mathcal{H}om(L^{-1}, M) \oplus \mathcal{H}om(L^{-1}, M')$. Considérons une section locale f du fibré $\mathcal{H}om(L \oplus L^{-1}, M \oplus M')$ autour du point parabolique p. Alors f est une section de $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(L \oplus_A L^{-1}, M \oplus_B M')$ si et seulement si f_p conserve la filtration parabolique (f_p désigne le morphisme linéaire au-dessus de p). Suivant la décomposition précédente, on a $f = f_{LM} + f_{LM'} + f_{L^{-1}M} + f_{L^{-1}M'}$. Traitons, par exemple, le cas où $p \in A \cap B$: la structure parabolique de $L_p \oplus L_p^{-1}$ est donnée par L_p et celle de $M_p \oplus M'_p$ par M_p. Alors f section locale autour de p de $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om(L \oplus_A L^{-1}, M \oplus_B M') \Leftrightarrow f_p(L_p) \subset M_p \Leftrightarrow f_{LM'}, p = 0 \Leftrightarrow f_{LM'}$ section locale de $\mathcal{H}om(L, M')(-p)$. Le même raisonnement s'applique pour les autres cas, et l'on trouve: f_{LM} section locale de $\mathcal{H}om(L, M)(-p)$ si $p \in A \cap B^c$, $f_{L^{-1}M'}$ section locale de $\mathcal{H}om(L^{-1}, M')(-p)$ si $p \in A^c \cap B$, $f_{L^{-1}M}$ section locale de $\mathcal{H}om(L^{-1}, M)(-p)$ si $p \in A^c \cap B^c$. □

Lemme 6.3 $\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{L}^{par}) = \mathcal{O}_J(4\Theta)$

Démonstration: On va calculer $\Phi^*_{(s,A)}(\Theta_{M \oplus_B M'})$ pour $\Theta_{M \oplus_B M'} \in \mathcal{F}_{(s',B)}$ avec $s = s'$ et $B = A^c$. D'après le lemme 3.6, $\Phi^*_{(s,A)}(\Theta_{M \oplus_B M'})$ est un diviseur de

J, dont le support est égal à (ensemblistement):

$$\{j \in J \mid h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om((j \otimes \lambda) \oplus_A (j \otimes \lambda)^{-1}, M \oplus_B M')) > 0\}$$

Or, d'après le lemme 6.2 , pour tout $j \in J$ ce fibré est isomorphe à la somme directe de 4 fibrés en droites de degré $g-1$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}om(j \otimes \lambda, M') \oplus \mathcal{H}om(j \otimes \lambda, M)(-A) \oplus \\ &\mathcal{H}om((j \otimes \lambda)^{-1}, M')(-A^c) \oplus \mathcal{H}om((j \otimes \lambda)^{-1}, M)(-Q)\end{aligned}$$

En choisissant une thêta-caractéristique κ, on peut définir un diviseur thêta symétrique $\Theta = \mathrm{divdet} R\pi_J(\mathcal{P} \otimes \pi_C^* \kappa)$, où $\mathcal{P}$ est un fibré de Poincaré sur $J \times C$. Le support de $\Phi^*_{(s,A)}(\Theta_{M \oplus_B M'})$ est alors égal au support de $\Theta_{x_1} + \Theta_{x_2} + \Theta_{x'_1} + \Theta_{x'_2}$, où x_1, x'_1, x_2, x'_2 sont des points de J. Un calcul facile montre que

$$\begin{array}{ll} x_1 = \lambda \otimes \kappa \otimes M'^{-1} & x_2 = \lambda \otimes \kappa^{-1} \otimes M'(-A^c) \\ x'_1 = \lambda \otimes \kappa \otimes M(-A)^{-1} & x'_2 = \lambda \otimes \kappa^{-1} \otimes M(-Q) \end{array}$$

On a donc $x_1 + x_2 = \lambda^2(-A^c)$ et $x'_1 + x'_2 = \lambda^2(A - Q) = -(x'_1 + x'_2)$ car $\lambda^4 = \mathcal{O}_C(A^c + Q - A)$. D'autre part, le théorème du carré [M1] donne $\Theta_{x_1} + \Theta_{x_2} + \Theta_{x'_1} + \Theta_{x'_2} \equiv 4\Theta$ et par conséquent $\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{L}^{par}) = \mathcal{O}_J(4\Theta)$. $\square$

Remarque: ce résultat montre en particulier que $M \oplus_B M'$ définit un diviseur thêta sur $\mathcal{N}$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal:

Théorème 6.4 *Pour des points paraboliques génériques de C, les morphismes $\Phi_{(s,A)}$ pour $s \in \{0, 1, \ldots, [\frac{m}{2}]\}$ et $A \in C_m^{m-2s}$ induisent par image réciproque un isomorphisme:*

$$\bigoplus_{(s,A)} \Phi^*_{(s,A)} : H^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}^{par}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(s,A)} H^0(J, \mathcal{O}_J(4\Theta))$$

Démonstration: Remarquons d'abord que ces deux espaces ont même dimension: d'une part, la formule de Verlinde donne $h^0(\mathcal{N}, \mathcal{L}^{par}) = 4^g 2^{m-1}$ et d'autre part, on sait que $h^0(J, \mathcal{O}_J(4\Theta)) = 4^g$ et on prend la somme sur 2^{m-1} facteurs directs. Il suffit donc de montrer que $\oplus \Phi^*_{(s,A)}$ est surjectif.

L'idée de la démonstration est de considérer les images par $\Phi^*_{(s,A)}$ des sous-espaces $\mathcal{F}_{(s',B)}$. Considérons d'abord le cas $s = s'$ et $B = A^c$:

Si l'on choisit $x \in J$ tel que $2x = x_1 + x_2 = \lambda^2(-A^c)$ alors

$$\begin{array}{rcl} \Phi^*_{(s,A)}(\Theta_{M \oplus_B M'}) & = & \Theta_{x_1} + \Theta_{x_2} + \Theta_{x_1'} + \Theta_{x_2'} \text{ (dém. du lemme 6.3)} \\ & \equiv & 2\Theta_x + 2\Theta_{-x} \text{ (théorème du carré)} \end{array}$$

Si l'on note $\theta_{M \oplus_B M'}$ la section globale (déterminée à un scalaire près) ayant comme diviseur des zéros $\Theta_{M \oplus_B M'}$, on a alors

$$\Phi^*_{(s,A)}(\theta_{M \oplus_B M'}) \in \mathrm{Im}\{H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_x)) \otimes H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_{-x}))\}$$

Soit $(\alpha, \alpha') \in J_2 \times J_2$ (le groupe fini des points de 2-torsion de $J \times J$). Il est alors immédiat que

$$\Phi^*_{(s,A)}(\Theta_{(M \otimes \alpha) \oplus_B (M' \otimes \alpha')}) = \Theta_{x_1 + \alpha} + \Theta_{x_2 + \alpha} + \Theta_{x_1' + \alpha'} + \Theta_{x_2' + \alpha'} \equiv 2\Theta_x + 2\Theta_{-x}$$

or, $\mathbb{P}(H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_x)) \otimes H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_{-x})))$ est une représentation projective irréductible de $J_2 \times J_2$ (d'après la théorie des fonctions thêta de Mumford [M2]), et par conséquent $\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{F}_{(s,A^c)})$ est égal à l'image du morphisme de multiplication

$$m_x : H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_x)) \otimes H^0(J, \mathcal{O}_J(2\Theta_{-x})) \longrightarrow H^0(J, \mathcal{O}_J(4\Theta))$$

donc $\Phi^*_{(s,A)}$ restreint à $\mathcal{F}_{(s,A^c)}$ est surjectif si et seulement si m_x est surjectif.

Lemme 6.5 *Pour des points paraboliques génériques, le morphisme de multiplication m_x est surjectif.*

Démonstration du lemme 6.5: Rappelons que $2x = \lambda^2(-A^c)$, ce qui implique que $4x = \mathcal{O}_C(Q - P)$. Considérons le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \rho : C^{2m} & \longrightarrow & J \\ (P, Q) & \longmapsto & \mathcal{O}_C(Q - P) \end{array}$$

D'après la proposition 1.1, le morphisme m_x est surjectif si et seulement si $2x \notin \sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha$. Remarquons que pour des points fixés, le fibré x est déterminé à un élément de J_4 (points de 4-torsion) près, donc $2x$ est déterminé à un élément de J_2 près. Comme $\sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha$ est un diviseur J_2-invariant, m_x est surjectif si et seulement si $\forall z \in J$ tel que $2z = \rho(P, Q)$ on a $z \notin \sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha$. Soit $2 : J \to J$ le morphisme de multiplication par 2. C'est un morphisme surjectif, étale. Considérons le produit fibré $\widetilde{C^{2m}}$ de C^{2m} par J:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C^{2m}} \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "2"] & J \arrow[d, "2"] \\ C^{2m} \arrow[r, "\rho"] & J \end{tikzcd}$$

Montrons que $\widetilde{C^{2m}}$ est irréductible. Comme $\widetilde{C^{2m}}$ est un revêtement étale de C^{2m}, c'est une variété lisse et il suffit de montrer qu'elle est connexe. En choisissant un point fixe q, on peut définir des plongements $j : C \hookrightarrow C^{2m}$ par $p \mapsto (q, q, \ldots, q, p)$ et $\mu : C \hookrightarrow J$ par $p \mapsto \mathcal{O}_C(p - q)$. Il est alors facile de voir que $\rho \circ j = \mu$. On sait que, au niveau des groupes fondamentaux, on a une application surjective: $\mu_* : \pi_1(C) \to \pi_1(J)$. Il en résulte que $\rho_* : \pi_1(C^{2m}) \to \pi_1(J)$ est aussi surjective. Comme $\pi_1(J)$ agit transitivement sur la fibre du morphisme de multiplication par 2 au-dessus d'un point de J, $\pi_1(C^{2m})$ agit aussi transitivement sur la fibre au-dessus d'un point de C^{2m}, ce qui implique la connexité de $\widetilde{C^{2m}}$.

Montrons que $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}}) \not\subset \sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha$. Comme $\widetilde{C^{2m}}$ est irréductible, $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}})$ est aussi irréductible. Or $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}}) \subset \sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha$ implique que $\exists \alpha_0 \in J_2$ tel que $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}}) \subset \Theta_{\alpha_0}$. On remarque que $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}})$ est invariant par J_2, d'où $\tilde{\rho}(\widetilde{C^{2m}}) \subset \Theta_\alpha \ \forall \alpha \in J_2$. Mais on a $\bigcap_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha = \emptyset$. Ceci résulte du fait que $\{2\Theta_\alpha\}_{\alpha \in J_2}$ engendre le systeme linéaire $|2\Theta|$ qui est sans points de base.

Ceci implique que l'ouvert $\widetilde{C^{2m}} - \tilde{\rho}^*(\sum_{\alpha \in J_2} \Theta_\alpha)$ n'est pas vide. Son image par le morphisme $2 : \widetilde{C^{2m}} \to C^{2m}$ est alors l'ouvert non vide de points (P, Q) pour lesquels m_x est surjectif. $\square$

Lemme 6.6 *Considérons le cas $s > s'$, alors $\forall A \in C_m^{m-2s}$ et $\forall B \in C_m^{2s'}$:*

$$\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{F}_{(s',B)}) = \{0\}$$

Démonstration du lemme 6.6: Il suffit de montrer que les images des diviseurs $\Theta_{M \oplus_B M'}$ de $\mathcal{F}_{(s',B)}$ sont nulles. Or, $\mathcal{P}ar\mathcal{H}om((j \otimes \lambda) \oplus_A (j \otimes \lambda)^{-1}, M \oplus_B M')$ est isomorphe $\forall j \in J$ à la somme directe de 4 fibrés en droites (lemme 6.2), et comme $| A^c \cap B | \leq 2s'$, on a $\deg(\mathcal{H}om((j \otimes \lambda)^{-1}, M')(-A^c \cap B)) = \deg(\lambda \otimes j) + \deg(M') - | A^c \cap B | \geq s + g - 1 + s' - 2s' > g - 1$. Donc d'après la formule de Riemann-Roch: $\forall j \in J \ : \ h^0(C, \mathcal{H}om((j \otimes \lambda)^{-1}, M')(-A^c \cap B)) > 0$ et a fortiori $h^0(C, \mathcal{P}ar\mathcal{H}om((j\otimes\lambda)\oplus_A(j\otimes\lambda)^{-1}, M\oplus_B M')) > 0$. Ceci signifie que l'image de la jacobienne J par $\Phi_{(s,A)}$ est contenue dans le diviseur $\Theta_{M\oplus_B M'}$, ce qui démontre le lemme. $\square$

Lemme 6.7 *Considérons le cas $s = s'$ et des points paraboliques génériques:*

$$\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{F}_{(s,B)}) = H^0(J, \mathcal{O}_J(4\Theta)) \textit{ si } B = A^c$$

$$\Phi^*_{(s,A)}(\mathcal{F}_{(s,B)}) = \{0\} \textit{ si } B \neq A^c$$

Démonstration du lemme 6.7: le cas $B = A^c$ a déjà été traité. Si $B \neq A^c$, alors $\mid B\cap A^c \mid < 2s$ et par conséquent $\deg(\mathcal{H}om(L^{-1}, M')(-A^c\cap B)) = s+g-1+s- \mid B\cap A^c \mid > g-1$. On conclut comme dans le lemme 6.6 . $\square$

Fin de la démonstration du théorème 6.4: Le tableau suivant résume les résultats des lemmes 6.6 et 6.7. Les 2^{m-1} colonnes sont indexées par les familles de diviseurs de $\mid \mathcal{L}^{par} \mid$ et les 2^{m-1} lignes sont indexées par les morphismes de J dans $\mathcal{M}^{par}$. L'élément correspondant à la colonne $\mathcal{F}_{(s',B)}$ et à la ligne $\Phi_{(s,A)}$ est 0 si la restriction de $\Phi^*_{(s,A)}$ à $\mathcal{F}_{(s',B)}$ est nulle, 1 si elle est surjective (pour des points paraboliques génériques) et /// représente le cas non-déterminé. On a identifié les ensembles C_m^{m-2s} et C_m^{2s} via le passage au complémentaire.

	$\mathcal{F}_0$	$\mathcal{F}_{(1,B)}$	$\mathcal{F}_{(2,B)}$	$\cdots$	$\mathcal{F}_{([\frac{m}{2}],B)}$
Φ_0	1	///	///	$\cdots$	///
$\Phi_{(1,A)}$	$\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}$	///	$\cdots$	///
$\Phi_{(2,A)}$	$\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}$	$\ddots$	///
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	///
$\Phi_{([\frac{m}{2}],A)}$	$\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{matrix}$	$\cdots$	$\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}$

Comme ce tableau est triangulaire supérieur, il est immédiat que $\oplus\Phi^*_{(s,A)}$ est surjectif. $\square$

Corollaire 6.8 *Les morphismes $\Phi_{(s,A)} : J \longrightarrow \mathcal{N}$ sont des plongements.*

Démonstration: Considérons le morphisme rationnel $\varphi_{\mathcal{L}^{par}}$ donné par le système linéaire $|\,\mathcal{L}^{par}\,|$. D'après le lemme 6.3 nous savons que $\Phi_{(s,A)}(J)$ ne contient pas de points de base (pour des points paraboliques génériques), donc la restriction de $\varphi_{\mathcal{L}^{par}}$ à $\Phi_{(s,A)}(J)$ est bien définie. Comme le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varphi_{4\Theta}"] & \mathcal{N} \arrow[d, dashed, "\varphi_{\mathcal{L}^{par}}"] \\ |4\Theta|^{\vee} \arrow[r, "\Phi^{*\vee}"] & |\mathcal{L}^{par}|^{\vee} \end{tikzcd}$$

Le lemme résulte alors du fait que $\varphi_{4\Theta}$ est un plongement et que l'application linéaire transposée $\Phi^{*\vee}_{(s,A)}$ est injective. $\square$

Corollaire 6.9 *Le système linéaire $|\mathcal{L}^{par}|$ est engendré par les diviseurs Θ_F, où F est un fibré de rang 2, de degré $2g-2+m$ et F définit un diviseur thêta sur $\mathcal{N}$.*

Remarques:

1. Un calcul explicite montre que le lieu des classes de fibrés paraboliques semi-stables, non stables de $\mathcal{N}$, est isomorphe à la réunion disjointe de 4^{m-1} jacobiennes J.

2. Excepté les cas $m = 1, 2$, où il est facile de voir que $|\,\mathcal{L}^{par}\,|$ est sans points de base, je ne sais rien dire pour $m \geq 3$.

Bibliographie

[B1] A.Beauville : *Fibrés de rang 2 sur les courbes, fibré déterminant et fonctions thêta.* Bull.Soc.math.France **116**, 431-448 (1988)

[B2] A.Beauville : *Fibrés de rang 2 sur les courbes, fibré déterminant et fonctions thêta II.* Bull.Soc.math.France **119**, 259-291 (1991)

[Be1] A. Bertram : *Generalized SU(2) theta functions.* Invent. math. **113**, 351-372 (1993)

[Be2] A. Bertram : *Stable pairs and stable parabolic pairs.* J. Algebraic Geometry **3**, 703-724 (1994)

[Bh] U.N. Bhosle : *Parabolic vector bundles on curves.* Arkiv for Math. **27**, 15-22 (1989)

[D-N] J.M. Drezet, M.S. Narasimhan : *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. math. **97**, 53-94 (1989)

[H1] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry.* GTM **52**, Springer (1977)

[H2] R. Hartshorne : *Residues and Duality.* Lecture Notes in Math. **20**, Springer-Verlag, Heidelberg (1966)

[K] G. Kempf : *Multiplication over abelian varieties.* Amer. Jour. of Math. **110**, 765-773 (1988)

[K-M] F. Knudsen, D. Mumford : *The projectivity of the moduli space of stable curves I.* Math. Scand. **39**, 19-55 (1976)

[M1] D. Mumford : *Abelian Varieties.* Oxford Univ. Press, Oxford (1970)

[M2] D. Mumford : *On the equations defining abelian varieties.* Invent. Math. **1**, 287-354 (1966)

[M-S] V.B. Mehta, C.S. Seshadri : *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures.* Math. Ann. **248**, 205-239 (1980)

[N-R] M.S. Narasimhan, T.R. Ramadas : *Factorisation of generalized theta functions I.* Invent. Math. **114**, 565-623 (1993)

[S] C.S. Seshadri : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque **96**, (1982)

[vG-P] B. Van Geemen, E. Previato : *Prym varieties and the Verlinde formula.* Math. Annalen **294**, 741-754 (1992)