Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux et de croissance au plus exponentielle. On note la tranformée de Laplace de f par

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad \text{pour} \qquad s > s_0,$$

où s_0 est l'abscisse de sommabilité de f.

On note $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside ou fonction échelon unité, c'est-à-dire $\mathcal{H}(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\mathcal{H}(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

On note $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.

1 Fonctions usuelles

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(s)$	convergence
$\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{R}$
$\mathcal{H}(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$e^{-at}t^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$s > a$
$e^{-at}\cos(bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$s > a$
$e^{-at}\sin(bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$s > a$

2 Propriétés

1. Linéarité : $\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s+a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{L}(f(t-a)\mathcal{H}(t-a)) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))$ pour tout $a \geq 0$.
4. Convolution : $\mathcal{L}((f * g)(t)) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))$.
5. Pour f continue sur $[0, +\infty[$, $\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$.
6. $\mathcal{L}(\int_a^t f(u)du) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))(s) + \frac{1}{s}\int_a^0 f(u)du$ pour tout $a \geq 0$.
7. Si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$ existe, alors $\lim_{s\to 0^+} s\mathcal{L}(f(t))(s) = l$.
8. Si f est continue en 0, alors $\lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}(f(t))(s) = f(0)$.
9. S'il existe des fonctions f, F telles que $\mathcal{L}(F(t))(s) = \phi(s)$ et $\mathcal{L}(f(t))(s) = s\phi(s)$, alors $f(t) = F'(t)$.
10. $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f(t))(s) = -\mathcal{L}(tf(t))(s)$.