Feuille de TD3

Exercice 1 - On considère le tétraèdre T dans l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par les 4 inégalités

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

Trouver les extrémas sur T des fonctions suivantes :

1. $J(x_1, x_2, x_3) = 1 - x_1$.
2. $J(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$.

Exercice 2 - On considère la contrainte $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2^2$ et l'ensemble

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F_1(x_1, x_2) \leq 0\}.$$

1. Représenter l'ensemble K.
2. En quels points de K est-ce que la contrainte F_1 est qualifiée ?

Exercice 3 - On considère la fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $J(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$ et l'ensemble

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq x_1^2\}.$$

1. Déterminer les extrémas locaux de J sur l'ensemble K.
2. Y a-t-il des extrémas absolus ?

Exercice 4 - On considère la fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2.$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange déterminer les extrémas de J sur l'ensemble K déterminé par l'inégalité $x_1 + 2x_2 \leq 0$.

Exercice 5 - Soit $s \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$. On considère l'hyperplan affine H dans $\mathbb{R}^n$ d'équation

$$\langle s, x \rangle = r$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un point n'appartenant pas à H.

1. Etudier les extrémas de la fonction $J(x) = \langle x - v, x - v \rangle$ sur H.
2. Donner une interprétation géométrique du minimum.