OPTIMISATION
L3 MASS

UNIVERSITÉ DE NICE
ANNÉE 2013-2014

Feuille de TD1

Exercice 1 - *Rappels sur les espaces vectoriels*

Est-ce que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$?

1. $A = \{f$ fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+\}$.
2. $B = \{f$ fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}\}$.
3. $C = \{P$ polynôme en une variable vérifiant $P(0) = 1\}$.
4. $D = \{P$ polynôme en une variable de degré ≤ 10 vérifiant $P(0) = 0\}$.

Dans le cas affirmatif, dire si l'espace vectoriel est de dimension finie ou infinie. Si la dimension est finie, déterminer la dimension en donnant une base de l'espace vectoriel.

Exercice 2 - *Fonction "infinie à l'infini"*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 7x_2^2.$$

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $||(x_1, x_2)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Montrer que f est "infinie à l'infini" en minorant f par une expression en $||(x_1, x_2)||$.
2. Trouver le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 - *Caractéristation variationnelle des valeurs propres d'une matrice symétrique*

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2.$$

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Est-ce que f est "infinie à l'infini" ?
2. Déterminer la matrice A symétrique d'ordre 2 vérifiant

   $$f(x_1, x_2) = X^t A X, \qquad \text{pour tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

   où X est le vecteur colonne $\binom{x_1}{x_2}$ et $X^t = (x_1 \; x_2)$ le vecteur ligne transposée de X.
3. Trouver le maximum et le minimum de la fonction f sur le cercle de rayon 2, en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres de la matrice A.

Exercice 4 - On considère l'ensemble suivant

$$K = \{P \text{ polynôme en une variable de degré } \leq 2 \text{ vérifiant } P(0) = 1\}.$$

et la fonction f définie sur l'espace vectoriel E des polynômes de degré ≤ 2 par

$$f(P) = \max_{t \in [1,2]} |P(t)|.$$

1. Montrer que la fonction f définit une norme sur l'espace vectoriel E.
2. Montrer que K est un sous-espace affine de E et donner son équation dans un système de coordonnées.
3. Montrer que la fonction f est "infini à l'infini" sur K, c'est-à-dire que $f(P)$ tend vers $+\infty$ quand $f(P - P_0)$ tend vers $+\infty$, où $P_0 \in K$ est un polynôme fixé. *Indication : utiliser l'inégalité triangulaire de la norme.*
4. En déduire que f admet un minimum sur K.
5. Calculer ce minimum. On écrira la fonction f comme une fonction en les coefficients du polynôme $P \in K$.

Exercice 5 - *Calcul de différentielles et matrices hessiennes*

Déterminer les différentielles et les matrices hessiennes des fonctions suivantes. Dans quels cas est-ce que ces fonctions sont convexes ? strictement convexes ? On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle + b$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.
2. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \langle Ax, x \rangle + \langle a, x \rangle + b$, où A est un matrice carrée d'ordre n, $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.
3. $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, x \rangle^2$, où $a_i \in \mathbb{R}^n$ et $m \geq 1$.

Exercice 6 - On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = (1 + z)^3(x^2 + y^2) + z^2.$$

1. Montrer que $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ est le seul point critique de f.
2. Montrer que $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ est un minimum local strict.
3. Est-ce que $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ est un minimum global ?

Exercice 7 - On considère la fonction $f : \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -\ln(xy) + x + 3y + 1.$$

1. Est-ce que f est un fonction convexe ? strictement convexe ?
2. Déterminer le minimum de f sur Ω