Optimisation | | Université de Nice
L3 MASS | | Année 2013-2014

Examen du 25 mars

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 - Soit $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction f en n variables $x_1, \ldots, x_n$ (on note $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$)

$$f(x) = (\langle a, x \rangle)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^2 .$$

1. Déterminer le gradient $(\nabla f)_x$ de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ et l'exprimer d'abord en fonction des coordonnées a_i et x_i, ensuite en fonction de a et x.
2. Déterminer la matrice hessienne $\mathcal{H}(f)_x$ de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ et l'exprimer d'abord en fonction des coordonnées a_i et x_i, ensuite en fonction de a et x.
3. Calculer $\langle w, \mathcal{H}(f)_x w \rangle$ pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ et déterminer son signe.
4. Est-ce que f est une fonction convexe ? strictement convexe ?
5. **BONUS.** On considère un deuxième vecteur $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et la fonction

$$g(x) = (\langle a, x \rangle)^2 + (\langle b, x \rangle)^2 .$$

Est-ce que g est convexe ? strictement convexe (on distinguera les cas $n = 2$ et $n > 2$) ?

Exercice 2 - On considère la fonction en trois variables x_1, x_2, x_3

$$J(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2$$

sous les deux contraintes

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0, \qquad F_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

1. Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$ associé à ce problème. On notera les multiplicateurs de Lagrange λ_1 et λ_2.
2. Calculer les 2 vecteurs gradient $(\nabla F_1)_x$ et $(\nabla F_2)_x$ et montrer qu'ils sont linéairement indépendants quand $F_1(x) = F_2(x) = 0$.
3. Déterminer les points critiques du lagrangien $\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)$. On posera $\alpha = \frac{1}{\lambda_1 + 1}$, après avoir vérifié que $\lambda_1 \neq -1$, et on résoudra le système des 5 équations portant sur $x_1, x_2, x_3, \alpha, \lambda_2$.
4. **BONUS 1.** Montrer que l'un des deux points critiques est un maximum local et l'autre un minimum local en utilisant un critère sur la matrice hessienne du lagrangien. Est-ce aussi des extréma globaux ?
5. **BONUS 2.** Donner une interprétation géométrique de ce problème d'optimisation.