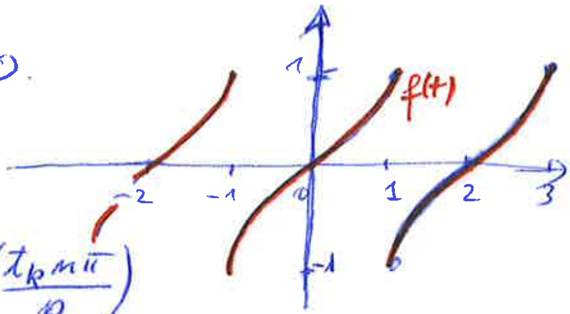
Corrigé des exercices

Ex 1 Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2, impaire et définie par $f(t) = t^2$ pour $0 \leq t \leq 1$.

$p = 1$; On écrit $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\pi t)$

f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Il suffit de déterminer b_n ; $n \in \mathbb{N}^*$.

f impaire $\Rightarrow f(t) = -t^2$ pour $-1 \leq t \leq 0$.



On applique la formule des sauts :

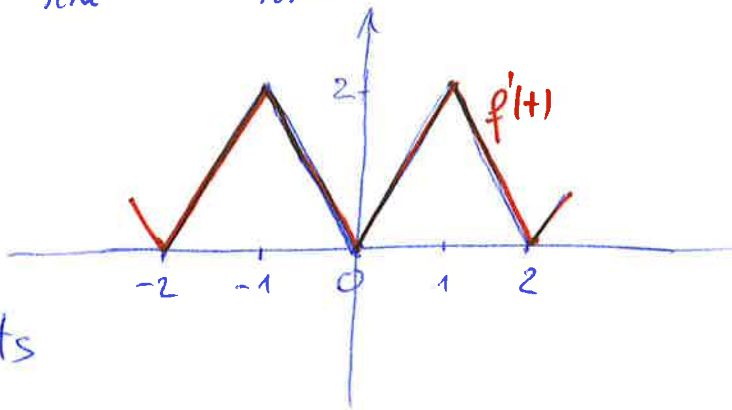
$$\begin{cases} a_n = -\dfrac{p}{\pi n} b'_n - \dfrac{1}{\pi n} \sum_k F_k \sin\left(\dfrac{t_k n\pi}{p}\right) \\[2ex] b_n = +\dfrac{p}{\pi n} a'_n + \dfrac{1}{\pi n} \sum_k F_k \cos\left(\dfrac{t_k n\pi}{p}\right) \end{cases}$$

Ici on a 1 saut en $t_1 = -1$ et $F_1 = -2$

d'où $b_n = \dfrac{1}{\pi n} a'_n + \dfrac{1}{\pi n}(-2)\cos(-n\pi)$

or $\cos(-n\pi) = (-1)^n \Rightarrow b_n = \dfrac{1}{\pi n} a'_n - \dfrac{2}{\pi n}(-1)^n$.

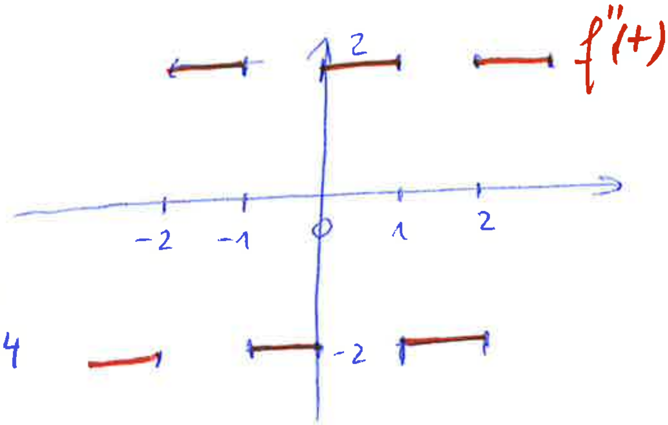
$$f'(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$



f' est continue $\Rightarrow$ pas de sauts

d'où $a'_n = -\dfrac{1}{\pi n} b''_n$

$$f''(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2 & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$



f'' a deux sauts en $t_1 = -1$ $\quad F_1 = -4$

$\qquad t_2 = 0 \quad F_2 = +4$

d'où la formule des sauts :

$$b''_n = \frac{1}{\pi n} \underbrace{a'''_n}_{=0} + \frac{1}{\pi n}\Big[(-4)\underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} + 4\cos(0)\Big]$$

car $f^{(III)}(t) = 0 \ \forall t$

$$b''_n = \frac{1}{\pi n}\left((-1)^n(-4) + 4\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{8}{\pi n} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

on remonte les calculs :

$$\Rightarrow \begin{cases} a'_n = 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ a'_n = -\dfrac{8}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = -\dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ pair} \\ b_n = \dfrac{1}{\pi n}\left(-\dfrac{8}{\pi^2 n^2}\right) + \dfrac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{n\pi} - \frac{8}{n^3\pi^3}$$

d'où le développement en série de Fourier :

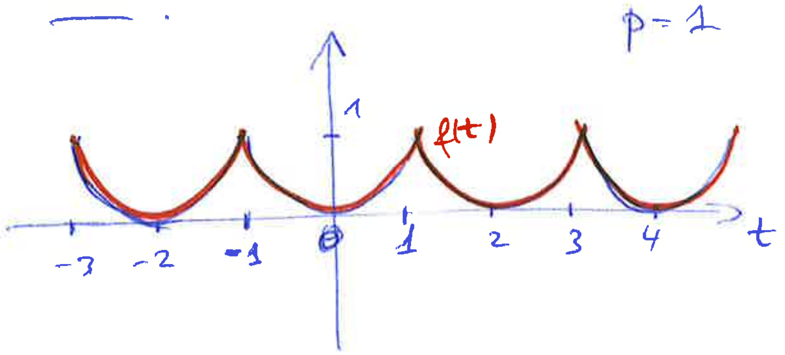
$$\boxed{f(t) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \left(-\frac{2}{n\pi}\right)\sin(n\pi t) + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{8}{n^3\pi^3}\right)\sin(n\pi t)}$$

(3)

Ex 2 • Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2, paire et définie par $f(t) = t^2$ pour $0 \leq t \leq 1$.

• En déduire les sommes des séries :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$



f continue $\Rightarrow$ pas de sauts.

f paire $\Rightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

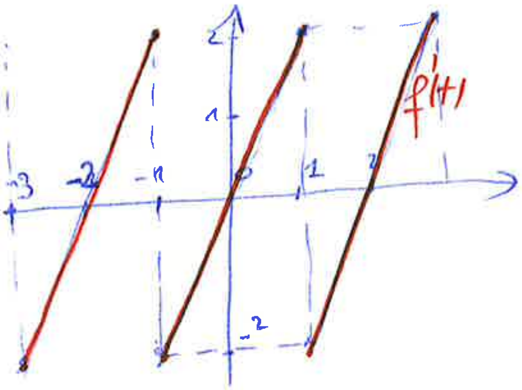
$$= 2\int_0^1 t^2\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Donc $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\pi t)$.

D'après la formule des sauts : $a_n = -\frac{1}{\pi n} b'_n$ pour $n \geq 1$.

$f'(t) = 2t \quad -1 \leq t \leq 1$

f' a un saut en $t_1 = -1$, $F_1 = -4$



D'où la formule :

$$b'_n = \frac{1}{\pi n} a''_n + \frac{1}{\pi n}(-4)\cos(-n\pi)$$

avec $\cos(-n\pi) = (-1)^n$

donc $b'_n = \frac{1}{\pi n} a''_n + \frac{(-4)(-1)^n}{\pi n}$

or $f''(t) = 2 \ \forall t$, donc $a''_n = 0$

donc $b'_n = \frac{(-4)(-1)^n}{\pi n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{\pi n}$

$$\Rightarrow a_n = (-1)^n \cdot \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

Finalement, on obtient le développement en série de Fourier

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(n\pi t).}$$

- Si on pose $t=0$, on obtient

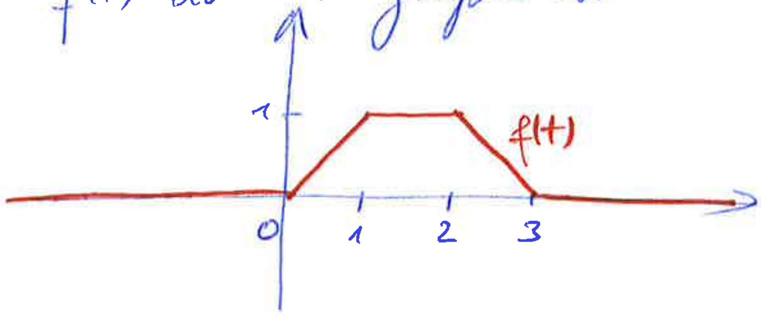
$$f(0) = 0 = \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2} \implies \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\implies \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- Si on pose $t=1$, on obtient

$$f(1) = 1 = \frac{1}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi^2 n^2} \implies \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ex 3 Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ dont le graphe est



On note $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

On peut écrire

$$f(t) = t\left(\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}(t-1)\right) + 1\cdot\left(\mathcal{H}(t-1) - \mathcal{H}(t-2)\right) + (3-t)\left(\mathcal{H}(t-2) - \mathcal{H}(t-3)\right)$$

$$= t\,\mathcal{H}(t) + (1-t)\,\mathcal{H}(t-1) + (2-t)\,\mathcal{H}(t-2) + (t-3)\,\mathcal{H}(t-3)$$

On utilise la formule :

$$\mathcal{L}\left(g(t)\,\mathcal{H}(t-a)\right) = \mathcal{L}\left(g(t+a)\right) e^{-as}$$

donc . $\mathcal{L}\left(t\,\mathcal{H}(t)\right) = \frac{1}{s^2}$

. $\mathcal{L}\left((1-t)\,\mathcal{H}(t-1)\right) = \mathcal{L}\left(1-(t+1)\right) e^{-s} = \mathcal{L}(-t)\, e^{-s}$

$$= -\frac{e^{-s}}{s^2}$$

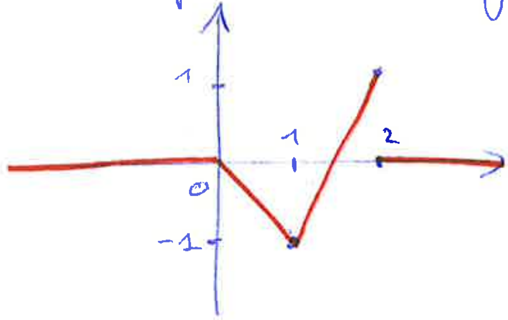
. $\mathcal{L}\left((2-t)\,\mathcal{H}(t-2)\right) = \mathcal{L}\left(2-(t+2)\right) e^{-2s} = \mathcal{L}(-t)\, e^{-2s}$

$$= -\frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

. $\mathcal{L}\left((t-3)\,\mathcal{H}(t-3)\right) = \mathcal{L}\left((t+3)-3\right) e^{-3s} = \mathcal{L}(t)\, e^{-3s} = \frac{e^{-3s}}{s^2}.$

d'où $\boxed{\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s}\right).}$

Ex 4 Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ dont le graphe est



On peut écrire. ($\mathcal{H}(t)$ = fonction de Heaviside)

$$f(t) = -t\left(\mathcal{H}(t)-\mathcal{H}(t-1)\right) + (2t-3)\left(\mathcal{H}(t-1)-\mathcal{H}(t-2)\right)$$

$$= -t\,\mathcal{H}(t) + (3t-3)\,\mathcal{H}(t-1) - (2t-3)\,\mathcal{H}(t-2).$$

On utilise la formule $\mathcal{L}(g(t)\mathcal{H}(t-a)) = \mathcal{L}(g(t+a))e^{-as}$

D'où : . $\mathcal{L}(-t\,\mathcal{H}(t)) = -\dfrac{1}{s^2}$

. $\mathcal{L}((3t-3)\mathcal{H}(t-1)) = \mathcal{L}(3(t+1)-3)\cdot e^{-s} = \mathcal{L}(3t)\,e^{-s} = \dfrac{3e^{-s}}{s^2}$

. $\mathcal{L}(-(2t-3)\mathcal{H}(t-2)) = \mathcal{L}(-2(t+2)+3)\,e^{-2s} = \mathcal{L}(-2t-1)\,e^{-2s}$

$$= \left(-\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}\right)e^{-2s}$$

d'où $\boxed{\mathcal{L}(f(t)) = \dfrac{1}{s^2}\left(-1 + 3e^{-s} - e^{-2s}(2+s)\right)}$

Ex5 Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\boxed{\phi(s) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{s}{(s+1)^2}}$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

d'où : $\mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)$

$$= \frac{t^3 e^{-t}}{3!} + e^{-t} - te^{-t}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + 1 - t\right)}$$

Ex6 Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$\boxed{\phi(s) = \ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)}$$

On écrit : $\phi(s) = \ln(s^2) - \ln(s^2+1)$

donc $\frac{\partial \phi}{\partial s}(s) = \frac{2s}{s^2} - \frac{2s}{s^2+1} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right)$$

$$= (2 - 2\cos(t))\mathcal{H}(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = \frac{(2-2\cos(t))\mathcal{H}(t)}{-t}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = \left(\frac{2\cos(t)-2}{t}\right) \cdot \mathcal{H}(t).}$$